J. P. Nelin

ALGEBRA ÉS AZ ANALÍZIS ELEMEI

Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek számára

Akadémiai szint

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma

Львів
"Світ"
2010

УДК 373:[512+517]
ББК 22.12я721+2.161я721
Н49

Перекладено з видання:
Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень. / Є. П. Нелін. – Х. : Гімназія, 2010.
Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ від 03.03.2010 № 177)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Наукову експертизу проводив
Інститут математики Національної академії наук України
Психолого-педагогічну експертизу проводив
Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України

Експерти, які здійснювали експерту:
П. Я. Кіндюх, гімназія м. Ужгорода, директор, заслужений вчитель України, вчитель-методист
Л. А. Бойко, Монастирищенська спеціалізована школа I–III ст. № 5 Монастирищенської районної ради Черкаської обл., вчитель, вчитель-методист
І. О. Воробей, Управління освіти Житомирської міської ради, методист
М. А. Муратов, Таврійський національний університет ім. В. І. Вернадського, кафедра математичного аналізу, доктор фізико-математичних наук

Нелін Є. П.
Н49 Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. із навчанням угорською мовою : академ. рівень / Є. П. Нелін // переклад угорською мовою Д. Ф. Поллої, Ю. І. Кулін. – Львів : Світ, 2010. – 416 с. : іл.
ISBN 978-966-603-664-6

УДК 373:[512+517]
ББК 22.12я721+2.161я721

© Нелін Є. П., 2010
© ТОВ ТО "Гімназія", оригінал-макет, 2010
© Поллої Д. Ф., Кулін Ю. І., переклад, 2010

ISBN 978-966-603-664-6 (угор.)
ISBN 978-966-474-095-8 (укр.)

ELŐSZÓ A TANULÓKHOZ

Egy új tantárgy, az *Algebra és az analízis elemei* tanulmányozását kezditek el. Ez a tárgy a matematika több ágát is magába foglalja. Az algebrához hasonlóan, itt is nagy szerepe lesz a kifejezések átalakításának, az egyenletek és egyenlőtlenségek, valamint az ezekből képzett egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek megoldásának, és a függvények tulajdonságainak. A már ismert többtagú kifejezésekkel, racionális törtekkel, hatványokkal és gyökökkel kapcsolatos feladatok megoldásaival egy időben a 10. osztályban megismerkedünk majd új fogalmakkal is: hatvány- és trigonometrikus függvényekkel, és a hozzájuk kapcsolódó egyenletekkel és egyenlőtlenségekkel.

A tantárgy merőben új részét – az analízis elemeit – a 11. osztályban fogjuk tárgyalni. A *matematikai analízis* (vagy egyszerűen analízis) a XVIII. században alakult ki, és jelentős szerepet játszott a természettudományok fejlődésében: ezzel megjelent egy hatékony és általános módszer a függvények vizsgálatára, amely alkalmazható különböző gyakorlati feladat megoldása során.

Néhány jó tanács a tankönyv használatához.

A tankönyv a tananyagot témánként két szinten tárgyalja. A kék sorszámú paragrafusok tartalmazzák a *kötelező tananyagot*. A *kiegészítő tananyag* (a paragrafusok sorszámait szürke színnel jelölték) az adott téma alapos elsajátítására szolgál (például a független érettségi feladatsor nehezebb feladatainak a megoldására). A tanulók ezeket a témákat mind egyedül, mind tanári segítséggel elsajátíthatják.

Sok paragrafus elején olyan *tájékoztató táblázatok* találhatók, amelyek a legfontosabb meghatározásokat, tulajdonságokat és az adott témakör feladatainak megoldását segítő *útmutatásokat* is tartalmazzák. A feladatmegoldás módszereivel való ismerkedés során a megoldást példákkal szemléltetik, és *magyarázatokkal* is ellátták ezeket, amely abban segíti a tanulókat, hogy megbirkózzanak hasonló típusú feladatokkal.

Az elsajátított tananyag begyakorlására, ellenőrzésére és önellenőrzésére minden paragrafus végén kérdések és gyakorlatok találhatók. Ezekre a kérdésekre a választ, és hasonló gyakorlatok megoldásait megtalálhatjuk az adott paragrafusban. A tananyaghoz tartozó gyakorlatok három nehézségi fokozatúak. Az *alapszintű feladatok*at «°»-rel jelölik, a nem sokkal nehezebb *középszintű feladatok*at nem jelölik, és az *emelt szintű* összetettebb, elgondolkodtató feladatokat «*»-gal jelölik. A tankönyvben számos – az emelt szintű feladatok megoldását segítő – tanács is van, amely segítséget nyújt a hasonló feladatok megoldási tervének kidolgozásában.

A feladatok többségének eredményeit a *Feleletek és útmutatások* megfelelő fejezetében találjuk. A *Matematikatörténeti adalékok* című rész a fogalmak és jelölések eredetével foglalkozik. A tankönyv végén egy összefoglaló melléklet található.

ELŐSZÓ A TANÁROKHOZ

Az ajánlott tankönyv a középiskolai kompetencia alapú oktatás koncepciójának megvalósítását, a személyre szabott matematika oktatást szolgálja. A tankönyv megfelel az aktuális algebra és analízis elemei tanmenet elvárásainak, figyelembe veszi a kompetencia alapú tanmeneteket és az emelt szintű matematika érettségi követelményeit.

E tankönyv és a többi algebra és analízis elemei tankönyv közötti különbségek a következők szerint határozhatók meg. Ez egy *kétszintű tankönyv*, melynek minden paragrafusában megtalálhatjuk a standard matematikaoktatásban részesülő diákoknak szánt tananyagon kívül, a matematika iránt érdeklődő tanulók részére szánt tananyagot is.

A paragrafus elején található *táblázat* a kötelező tananyag rövid változatát tartalmazza, melyet minden tanulónak el kell sajátítani. Ez a tananyag rendszerezett kivonata, amely elegendő a *feladatok megoldásához. Ezért elsősorban a táblázat tartalmát kell a tanulóknak elsajátítania.* Az új tananyag átadásakor célszerű a tankönyv használata mellett a táblázatot és a megfelelő rajzokat is alkalmazni. Minden szükséges további információ, magyarázat megtalálható a tankönyvben, és minden tanuló a neki megfelelő szintű segítségből választhat.

Hangsúlyozzuk, hogy bármilyen algebra és analízis elemei tankönyv nemcsak az algebrai fogalmak és azok tulajdonságai ismertetésére szolgál, hanem ezeknek a fogalmaknak alkotó módon való felhasználását is el kell sajátíttatni a tanulókkal. A műveletek végzése során a tanulókban kialakult intellektuális hálót a pszichológusok orientációs támpontoknak nevezik. Ha a tanulóknak biztosítunk ilyen – különböző szabályok és algoritmusok formájában megadott – általános érvényű orientációs támpontokat, akkor az orientációs támpontok második és harmadik szintjével ismertetjük meg őket. Általában a 10. osztályos algebra és analízis elemei tankönyvekben a tanulóknak csak mintafeladatok megoldásait ajánlják. A tanulók önállóan, a mintafeladatok alapján oldják meg ezeket (vagyis a tanulók az orientációs támpontok első szintjét alkalmazzák). Az ilyen oktatás azt feltételezi, hogy a tanulók egyedül rendszerezik és általánosítják az elvégzendő lépéseket, miközben a megoldás során a mintapéldára támaszkodnak. Ekkor a tanulókban kialakult orientációs támpontok hiányosak. Ráadásul ilyenkor a tanuló nem tudja megállapítani, hogy miért éppen így járt el a feladat megoldásakor.

Ennek a tankönyvnek a felépítése éppen abban különbözik a többitől, hogy itt a tanulókat a tananyag elsajátításában azok az orientációs támpontok segítik, amelyekkel közvetlenül a tankönyvben lévő feladatok megoldása során találkoznak.

A példák megoldását minden fejezetben az általános tájékozódási támpontok ismertetése előzi meg, melyeket a példa megoldásakor alkalmazni kell. Ezért nagyon fontos része e tankönyvvel való munkának a megfelelő orientációs támpontok, és a feladatmegoldás lépéseinek kiválasztása. A feladatmegoldás lépéseinek ismertetése a következő séma alapján történik:

Megoldás	*Magyarázat*

A tananyag ilyen formában történő tárgyalásakor a magyarázat nem zavarja a feladatmegoldás lépéseinek a követését. Emlékezteti azt a tanulót is a feladat megoldásának lépéseire, aki már elsajátította a megoldás módszerét, ugyanakkor a magyarázat tanácsot ad annak a tanulónak is, aki még nem tudja egyedül megoldani a feladatot.

Az általános orientációs támpontok kiemelése lehetőséget nyújt a nem szokványos feladatok megoldására, szokványos módszerek alkalmazásával (az egyenletek megoldásánál például alkalmazható a függvények tulajdonsága). Ez a módszer lehetőséget ad arra, hogy megismertessük a tanulókkal a bonyolult algebra és analízis elemei feladatainak megoldási módszereit, melyeket például a tudásszint felmérő teszt matematikai feladatsorai tartalmaznak.

Egyezményes jelek

A tananyag legfontosabb része
▶ a feladat megoldásának kezdete
◁ a feladat megoldásának vége
● az állítás magyarázatának kezdete
○ az állítás magyarázatának vége

A tankönyvben előforduló jelölések

N — a természetes számok halmaza

Z — az egész számok halmaza

Z_0 — a nemnegatív egész számok halmaza

Q — a racionális számok halmaza

R — a valós számok halmaza

R_+ — a pozitív valós számok halmaza

$[a; b]$ — az a kezdőpontú és b végpontú zárt intervallum, ahol $a < b$

$(a; b)$ — az a kezdőpontú és b végpontú nyitott intervallum, ahol $a < b$

$(a; b]$, $[a; b)$ — az a kezdőpontú és b végpontú félig nyitott intervallum, ahol $a < b$

$(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$ — végtelen intervallumok

$(-\infty; +\infty)$ — végtelen intervallum, számegyenes

$|x|$ — az x szám abszolút értéke

$[x]$ — az x szám egész része

$\{x\}$ — az x szám törtrésze

$f(x)$ — a függvény x pontbeli értéke

$D(f)$ — az f függvény értelmezési tartománya

$E(f)$ — az f függvény értékkészlete

sin — szinuszfüggvény

cos — koszinuszfüggvény

tg — tangensfüggvény

ctg — kotangensfüggvény

arcsin — arkuszszinusz-függvény

arccos — arkuszkoszinusz-függvény

arctg — arkusztangens-függvény

arcctg — arkuszcotangens-függvény

$\sqrt{a}$ — az a szám számtani gyöke

$\sqrt[2k]{a}$ — az a szám $2k$-adik számtani gyöke ($k \in N$)

$\sqrt[2k+1]{a}$ — az a szám $(2k+1)$-edik gyöke ($k \in N$)

1. fejezet
FÜGGVÉNYEK, EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK



KÖTELEZŐ TANANYAG

1. §. Halmazok
2. §. Függvények
3. §. Egyenletek
4. §. Egyenlőtlenségek

KIEGÉSZÍTŐ TANANYAG

5. §. Kétváltozós egyenletek és egyenlőtlenségek grafikonja
6. §. Matematikai indukció
7. §. Egyváltozós többtagú kifejezések és a velük végzett műveletek
8. §. Abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek
9. §. Paraméteres egyenletek és egyenlőtlenségek

A kötelező tananyagban összefoglaljuk és általánosítjuk a halmazokról, a függvényekről, egyenletekről és egyenlőtlenségekről eddig tanult ismereteket, pontosítjuk a függvényvizsgálat lépéseit és elmélyítjük a függvények legfontosabb tulajdonságairól tanultakat. Segítséget kapunk az egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásának különböző módszereihez.

E fejezet **kiegészítő részében** megismerkedünk a matematikai állítások legfontosabb bizonyítási módszerével (a matematikai indukcióval) és néhány összetettebb feladat megoldásának módszerével, melyeket az emelt szintű matematika érettségi vagy az állami összegző osztályzás feladatsorai is tartalmaznak.

1. §. HALMAZOK

1.1. Halmazok. Halmazműveletek

1. táblázat

A halmaz fogalma és elemei

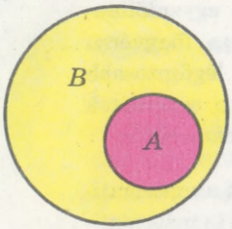
Az a elem az A halmazhoz tartozik	$\Leftrightarrow$	$a \in A$
A b elem nem tartozik az A halmazhoz	$\Leftrightarrow$	$b \notin A$
A halmaznak nincs eleme	$\Leftrightarrow$	$\varnothing$

A halmazt úgy képzelhetjük el, mint meghatározott, egymástól különböző elemek (objektumok) összességét, melyek ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkeznek. A halmaz a matematika egyik alapfogalma, ezért nem definiáljuk

Mindegyik objektum, amely az A halmazhoz tartozik, *eleme* ennek a *halmaznak*.

Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, *üres halmaznak* nevezzük és $\varnothing$-tel jelöljük.

Részhalmaz ($\subset$)



$A \subset B \Leftrightarrow$ Ha $x \in A$, akkor $x \in B$

Ha az A halmaz mindegyik eleme egy másik B halmaznak is eleme, akkor az első A halmaz részhalmaza a második B halmaznak,

amit így jelölnek: $A \subset B$.

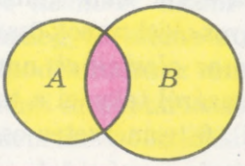
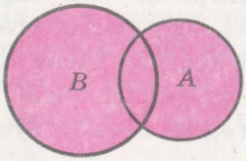
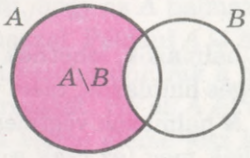
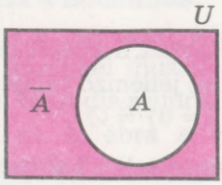
Alkalmazzák még az $A \subseteq B$, ha az A halmaz vagy részhalmaza a B-nek vagy egyenlő a B halmazzal

Halmazok egyenlősége

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$$

Két halmazt *egyenlőnek* nevezünk, ha az első halmaz minden eleme a második halmaznak is eleme, és fordítva, ha a második halmaz minden eleme az elsőnek is eleme

Az 1. táblázat folytatása

Halmazok metszete ($\cap$)	
 $C = A \cap B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ és $x \in B$	**Az *A* és *B halmazok metszetének* a közös részüket nevezzük, vagyis egy olyan *C* halmazt, melynek mindegyik eleme az *A* halmaznak is és a *B* halmaznak is eleme**
Halmazok uniója vagy egyesítése ($\cup$)	
 $C = A \cup B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ vagy $x \in B$	**Az *A* és a *B halmazok egyesítésének* egy olyan *C* halmazt nevezünk, amely az összes olyan elemből áll, mely legalább az egyik (*A* vagy *B*) halmazhoz tartozik**
Halmazok különbsége ($\setminus$)	
 $C = A \setminus B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ és $x \notin B$	**Az *A* és *B halmazok különbségének* egy olyan *C* halmazt nevezünk, amely az *A* halmaz minden olyan elemét tartalmazza, amely nem eleme a *B* halmaznak**
Komplementer halmaz (kiegészítő halmaz)	
 $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$	Ha mindegyik vizsgált halmaz részhalmaza egy úgynevezett *univerzális U* halmaznak, akkor az $U \setminus A$ különbséget az *A* halmaz *komplementer* (kiegészítő) halmazának nevezzük. Vagyis **az *A* halmaz komplementerének egy olyan halmazt nevezünk, amely az *A* halmazhoz nem tartozó összes elemből áll** (de az univerzális *U* halmazhoz hozzátartozik)

Magyarázat és indoklás

1. A halmaz fogalma. A *halmaz* a matematika egyik alapfogalma. Nem határozzuk meg. Körül lehet írni például így: bizonyos objektumok összességét *halmaznak*, és ezeket az objektumokat a *halmaz elemeinek* nevezzük. Beszélhetünk például az osztály tanulóinak halmazáról (elemei a tanulók), a hét napjainak halmazáról (elemei a hét napjai), 6 természetes osztóinak halmazáról (elemei az 1, 2, 3, 6 számok) stb.

Az algebrában és az algebra és analízis elemei tantárgyakban a leggyakrabban olyan halmazokat vizsgálunk, melynek elemei számok, ezért ezeket a halmazokat *számhalmazoknak* nevezzük.

A halmazokat a latin ábécé nagybetűivel jelölik. Ha például az M halmaz 1, 2, 3 számokból áll, akkor így jelöljük: $M = \{1; 2; 3\}$. Azt, hogy 2 ehhez a halmazhoz tartozik (az M halmaz eleme) így jelölik: $2 \in M$; és azt, hogy 5 nem tartozik ehhez a halmazhoz (nem eleme az adott halmaznak) így írják fel: $5 \notin M$.

Előfordulhat olyan halmaz is, amelynek egyetlen eleme sincs. Az ilyen halmazt *üres halmaznak* nevezzük.

Például 1 törzstényezői üres halmaz.

Néhány halmaznak speciális jelölése is van. Például az üres halmaz jelölése a $\emptyset$, a természetes számok halmazát $\boldsymbol{N}$ betűvel jelölik, az egész számok halmazát $\boldsymbol{Z}$-vel, a racionális számok halmazát $\boldsymbol{Q}$-val, a valós számok halmazát pedig $\boldsymbol{R}$ betűvel.

Attól függően, hogy hány elemet tartalmaznak a halmazok, lehetnek *végesek* és *végtelenek*. Például az $A = \{7\}$; $M = \{1; 2; 3\}$véges halmazok, mert véges számú elemet tartalmaznak, ugyanakkor az $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ halmazok végtelenek.

A halmazokat vagy az elemeik felsorolásával adják meg (ez csak a véges halmazok esetében végezhető el), vagy a halmaz elemeire *jellemző tulajdonság* megadásával, utasítással. Például $A = \{-1; 0; 1\}$ halmaz elemei felsorolásával van megadva, és B a páros egész számok halmaza (B) az elemeire jellemző tulajdonságaival van megadva. Ez utóbbi így is megadható: $B = \{b \mid b$ páros számok$\}$ vagy $B = \{b \mid b = 2m$, ahol $m \in \boldsymbol{Z}\}$. Itt a függőleges vonal után a halmaz elemeinek a tulajdonságait adjuk meg.

Általános alakban elemeik tulajdonságaival a halmaz a következőképpen adható meg: $A = \{x \mid P(x)\}$, ahol $P(x)$ a halmaz elemeire jellemző tulajdonságok. Például: $\{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$, $\{x \mid x \in R$ és $x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$.

2. A halmazok egyenlősége. Legyen A 312 számjegyeinek a halmaza, vagyis $A = \{3; 1; 2\}$, B pedig a 4-nél kisebb természetes számok halmaza, vagyis $B = \{1; 2; 3\}$. Mivel ezek a halmazok ugyanazokból az elemekből állnak, ezért őket egyenlőnek tekintjük. Ezt így írhatjuk fel: $A = B$. Végtelen számú elemeket

tartalmazó halmazok egyenlőségét ezzel a módszerrel nem lehet megállapítani. Ezért általános esetben a halmazok egyenlőségét a következőképpen adják meg.

Két halmazt akkor nevezünk *egyenlőnek*, ha az egyik halmaz mindegyik eleme a másik halmaznak is eleme, és fordítva, ha a második halmaz mindegyik eleme az elsőnek is eleme.

A fenti meghatározásból következik, hogy a halmazokban az azonos elemeket nem különböztetjük meg. Valóban a $\{1; 2; 2\} = \{1; 2\}$, mivel mindegyik eleme az első halmaznak (1 vagy 2) eleme lesz a második halmaznak is, és fordítva, mindegyik eleme a második halmaznak (1 vagy 2) eleme lesz az elsőnek is. Ezért a halmaz megadásánál elemeit csak egyszer írjuk fel.

3. Részhalmazok

Ha az A halmaz minden eleme eleme a B halmaznak is, akkor azt mondjuk, hogy az A halmaz részhalmaza a B halmaznak.

Amit így írunk fel: $A \subset B$[1]. Például $\{1; 2\} \subset \{0; 1; 2; 3\}$, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$ (mert bármely természetes szám egyúttal egész szám is), $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$ (mert bármely egész szám egyúttal racionális szám is), $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ (bármely racionális szám egyúttal valós szám is).

Mindig teljesül a $\varnothing \subset A$, vagyis *az üres halmaz részhalmaza bármely nem üres halmaznak.*

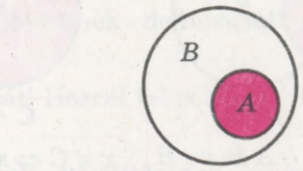
Néha az $A \subset B$ jelölés helyett az $A \subseteq B$ jelölést használjuk. Ez a jelölés azt jelenti, hogy az A halmaz vagy részhalmaza a B halmaznak, vagy egyenlő a B halmazzal. Például $A \subseteq A$.

Összehasonlítjuk a halmazok egyenlőségének és a részhalmaznak a meghatározását. Ha az A és a B halmazok egyenlők, akkor: 1) az A halmaz mindegyik eleme eleme lesz a B halmaznak is, vagyis az A részhalmaza a B-nek ($A \subseteq B$); 2) a B halmaz mindegyik eleme eleme lesz az A halmaznak is, vagyis a B részhalmaza az A-nak ($B \subseteq A$).

Ebből az következik, hogy:

két halmaz akkor egyenlő egymással, ha mindegyik részhalmaza a másiknak.

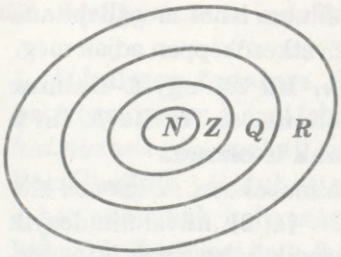
Néha a halmazok közötti összefüggéseket körökkel illusztrálják (melyeket gyakran Venn-diagramoknak nevezünk). Például az 1. ábra a részhalmazokat szemlélteti, a 2. ábra pedig az $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ halmazok közötti összefüggést.



$A \subset B \iff$ Ha $x \in A$, akkor $x \in B$

1. ábra

[1] Magyarországi tankönyvekben az $A \subset B$ felírásnak külön neve van: *valódi részhalmaz.* (*A szerk. megj.*)



2. ábra

4. Halmazműveletek. A halmazokon is végre lehet hajtani néhány műveletet: metszetképzést, unióképzést, különbségképzést. Megadjuk a műveleteknek a definícióját, és Venn-diagramokon is bemutatjuk ezeket.

Az *A* és *B halmaz metszetének* azok közös részét nevezzük, vagyis egy olyan *C* halmazt, melynek mindegyik eleme mind az *A*, mind a *B* halmazoknak is eleme.

A halmazok metszetét ∩-vel jelölik (a 3. ábra a halmazok metszetét szemlélteti).

Ha például az $A = \{2; 3; 4\}$, $B = \{0; 2; 4; 6\}$, akkor $A \cap B = \{2; 4\}$.

Az *A* és *B halmaz uniójának* (egyesítésének) azt a *C* halmazt nevezzük, amely olyan elemekből áll, melyek legalább az egyik halmaz elemei között megtalálhatók (*A vagy B*).

A halmazok egyesítését ∪ -val jelölik (a 4. ábra az *A* és *B* halmazok egyesítését szemlélteti).

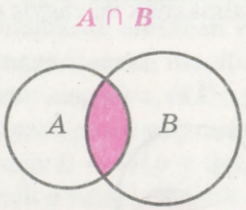
Például az előző példából vett *A* és *B* halmazra:

$$A \cup B = \{0; 2; 3; 4; 6\}.$$

Ha az irracionális számok halmazát *M*-mel jelöljük, akkor $M \cup \mathbf{Q} = \mathbf{R}$.

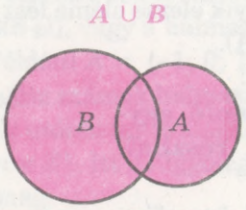
Az *A* és *B halmazok különbségének* azt a *C* halmazt nevezzük, amely olyan elemekből áll, melyek az *A*-nak elemei, de a *B*-nek nem.

A halmazok különbségét \ jellel jelölik (az 5. ábra az *A* és *B* halmazok különbségét szemlélteti).



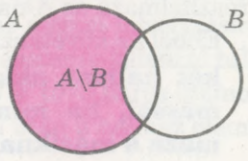
$C = A \cap B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ és $x \in B$

3. ábra



$C = A \cup B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ vagy $x \in B$

4. ábra



$C = A \setminus B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ és $x \notin B$

5. ábra

Ha például $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$ akkor $A \setminus B = \{1\}$, és $B \setminus A = \{4; 5\}$.

Ha *B* részhalmaza az *A* halmaznak, akkor az $A \setminus B$ különbséget a *B* halmaznak az *A halmazra való kiegészítésének* nevezzük (6. ábra).

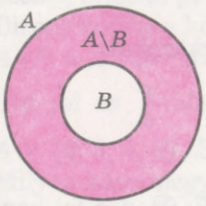
Ha például az irracionális számok halmazát M-mel jelöljük, akkor $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q} = M$: az irracionális számok halmaza kiegészíti a $\boldsymbol{Q}$ racionális számok halmazát $\boldsymbol{R}$-re a valós számok halmazára.

Ha mindegyik általunk vizsgált halmaz részhalmaza egy *U alaphalmaznak* vagy univerzális halmaznak (amit a rajzon téglalappal, a többi halmazt pedig téglalapon belüli körökkel ábrázoljuk), akkor az $U \setminus A$ különbséget az A halmaz komplementerének (kibővítésének) nevezzük (7. ábra).

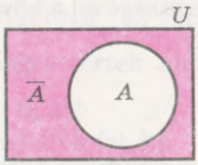
Az A *halmaz komplementer halmazának* nevezzük azt a halmazt, amely mindazokból az elemekből áll, melyek nem elemei az A-nak, de elemei az U alaphalmaznak.

Az A halmaz komplementerét $\overline{A}$-val jelöljük (A vonal vagy A komplementernek olvassuk).

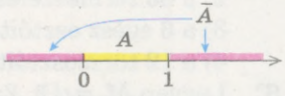
Ha például $U = \boldsymbol{R}$ és $A = [0; 1]$, akkor $\overline{A} = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. Ennek a példának az illusztrálására célszerű a valós számok halmazának tradicionális ábrázolását – a számegyenest – alkalmazni (8. ábra).



6. ábra



7. ábra



8. ábra

Ellenőrző kérdések

1. Mondj példákat halmazokra, és nevezd meg néhány elemét is!
2. Hogyan jelöljük az üres halmazt, a természetes számok, az egész számok, a racionális számok, a valós számok halmazát?
3. Fogalmazd meg a halmazok egyenlőségének definícióját! Példákon illusztráld két halmaz egyenlőségét!
4. Fogalmazd meg a részhalmaz definícióját! Hozzál fel példákat! Illusztráld ezt Venn-diagramokon!
5. Fogalmazd meg két halmaz metszetének, egyesítésének, különbségének definícióját! Hozz fel példákat! Illusztráld ezeket a fogalmakat Venn-diagramokon!
6. Magyarázd meg a halmaz komplementerének definícióját! Hozz fel példákat! Illusztráld ezt a fogalmat megfelelő ábrák segítségével!

Gyakorlatok

1°. Írd fel kapcsos zárójelek segítségével a következő halmazokat:
1) az algebra szó betűit; 2) az egyjegyű páros természetes számokat[1]; 3) az egyjegyű páratlan természetes számokat; 4) az egyjegyű törzsszámokat!

2°. Milyen jellemző tulajdonságaik alapján vannak felírva a következő halmazok:
1) {hétfő, kedd, szerda, csütörtök, péntek, szombat, vasárnap};
2) {január, február, március, április, május, június, július, augusztus, szeptember, október, november, december};
3) {Amerika, Antarktisz, Ausztrália, Ázsia, Afrika, Európa};
4) {dó, re, mi, fa, szol, la, szi};
5) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?

3°. Mondj példákat üres halmazokra!

4°. A azoknak a természetes számoknak a halmaza, melyek a 15 és 35 között vannak. Írd fel az A halmazt kapcsos zárójelek segítségével! A 18, 28, 36, 40 számok közül melyek tartoznak az A halmazhoz? A feleletet írd fel a $\in$ és a $\notin$ jelek segítségével!

5°. Írd fel kapcsos zárójelek segítségével a következő halmazokat:
1) a 12 természetes osztóit;
2) a 30 természetes osztóit;
3) a 6 egész osztóit;
4) a 12 törzsosztóit!

6°. Legyen $M = \{1; 2; 5\}$; $N = \{1; 4; 5; 7; 9\}$; $K = \{4; 7; 9\}$. Írd fel kapcsos zárójelek vagy az $\varnothing$ jel segítségével:
1) az M és N halmazok metszetét; 2) az M és K halmazok metszetét; 3) az N és K halmazok metszetét; 4) az M és N halmazok unióját; 5) az M és K halmazok unióját; 6) az N és K halmazok unióját; 7) az M és N különbségét; 8) az M és K különbségét; 9) az N és K különbségét; 10) a K halmaz N-re vonatkozó komplementerét!

7°. Magyarázd meg, miért teljesülnek a következő egyenlőségek:
1) $A \cup \varnothing = A$; 2) $A \cup A = A$; 3) $A \cap \varnothing = \varnothing$; 4) $A \cap A = A$!

8°. Írd fel azoknak a kétjegyű számoknak a halmazát, melyek felírhatók a 0, 1, 3 számjegyek segítségével!

9°. Legyen A 12 természetes osztóinak halmaza, B pedig 6 egész osztóinak halmaza. Határozd meg a következő halmazokat:
1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A \setminus B$; 4) $B \setminus A$!

10*. Legyenek az A és B valamilyen halmazok. Bizonyítsd be a következő azonosságokat, és ábrázold Venn-diagramokkal:
1) $A \cup B = B \cup A$ – *unióképzés felcserélhetőségi törvénye;*
2) $A \cap B = B \cap A$ – *a metszet felcserélhetőségi törvénye.*

[1] Az ukrán tankönyvekben a nullát nem sorolják a természetes számok halmazához. (*A szerk. megj.*)

11. Az egyik halmaznak 40 eleme van, a másiknak pedig 30. Hány eleme lehet a két halmaz: 1) metszetében; 2) egyesítésében?

12*. Legyenek A, B, C valamilyen halmazok. Bizonyítsd be a következő azonosságokat, és ábrázold ezeket Venn-diagramokkal:

1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – az *unióképzés csoportosítási törvénye*;

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – *a metszet csoportosítási törvénye*;

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

6) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

De Morgan azonosságok

13. Az osztály minden tanulója angol vagy francia nyelvet tanul. 25-en tanulnak angolul, 27-en franciául, 18-an pedig mindkét nyelven. Hányan vannak az osztályban?

14*. A város lakosainak egy része csak ukránul tud beszélni, egy része pedig csak oroszul, egy része mindkét nyelven beszél. Ukránul a lakosság 95%-a beszél, oroszul pedig 85%-a. Hány százalék beszéli mindkét nyelvet?

15*. Bizonyítsd be a következő azonosságokat, és ábrázold Venn-diagramokkal:
$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; 2) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$!

16*. Írd fel az $\frac{a}{b}$ alakú közönséges törtek halmazát, ha $a \in A$, $b \in B$ és $A = \{2; 3; 4; 6\}$, $B = \{1; 3; 4; 5; 6\}$!

17*. Milyen háromjegyű számok írhatók fel, ha:
$A = \{3; 1; 2\}$ – a százasok csoportját jelölő számjegyek halmaza;
$B = \{2; 8\}$ – a tízesek csoportját jelölő számjegyek halmaza;
$C = \{5; 7\}$ – az egyesek csoportját jelölő számjegyek halmaza?
Hány ilyen számot kapunk? Próbálj általános szabályt felállítani ezeknek a számoknak a meghatározására, ha az A halmazban m elem ($0 \notin A$), a B halmazban n elem, a C halmazban pedig k elem található!

1.2. Számhalmazok. A valós számok halmaza

2. táblázat

1. Számhalmazok

Valós számok halmaza R

Azok a számok, melyek megadhatók végtelen tizedes tört formájában

Racionális számok Q

Megadhatók tovább nem egyszerűsíthető tört, azaz $\frac{m}{n}$ alakban, ahol m egész szám, n természetes szám. Felírhatók végtelen periodikus tizedes tört alakjában $\left(\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}(3)\right)$

Irracionális számok

Nem adhatók meg tovább nem egyszerűsíthető tört, azaz $\frac{m}{n}$ alakban, ahol m egész szám, n természetes szám. Felírhatók végtelen nem periodikus tizedes tört alakjában $\left(\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots\right)$

Egész számok Z

Tartalmazza a természetes számokat, az ellentettjeiket, és a 0-t

Törtszámok

Két tetszőleges egész számnak hányadosát törtszámnak nevezzük $\left(\frac{2}{5}\right.$ közönséges tört, 1,23 tizedes tört: $\left.1{,}23 = \frac{123}{100}\right)$

Természetes számok[1] N (pozitív egészek)

A természetes szám az iskolai matematika egyik nem meghatározott alapfogalma.

A 0 szám

Egy olyan szám, amelyet bármely számhoz hozzáadva a szám értéke nem változik $(a + 0 = 0 + a = a)$

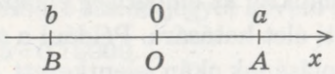
Negatív egész számok

A természetes számok ellentettjei

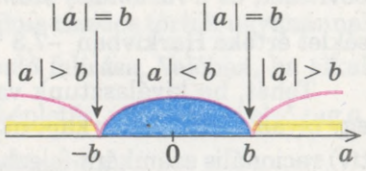
[1] Magyarországi tankönyvekben a 0 számot is a természetes számokhoz sorolják

A 2. táblázat folytatása

2. A valós szám abszolút értéke és tulajdonságai

Meghatározás	Az abszolút érték mértani értelmezése
A pozitív szám *abszolút értéke* maga a szám, a negatív szám abszolút értéke a szám ellentettje, a nulla abszolút értéke nullával egyenlő. $\lvert a\rvert = \begin{cases} a, & \text{ha } a > 0 \\ 0, & \text{ha } a = 0 \\ -a, & \text{ha } a < 0 \end{cases}$	 $\lvert a\rvert = OA$, $\lvert b\rvert = OB$ $\lvert a - b\rvert = AB$ **A szám abszolút értéke a számegyenesen neki megfelelő pont távolsága a 0 ponttól vagy a kezdőponttól.** *Két, a és b szám különbségének abszolút értékén a számegyenesen nekik megfelelő a és b pontok közötti távolságot értjük*

Tulajdonságai

1.	$\lvert a\rvert \geqslant 0$	*Bármilyen szám abszolút értéke nemnegatív szám*
2.	$\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	*Az ellentett számok abszolút értékei egyenlők egymással*
3.	$a \leqslant \lvert a\rvert$ vagyis $-\lvert a\rvert \leqslant a \leqslant \lvert a\rvert$	*A szám értéke nem nagyobb a szám abszolút értékénél*
4.	Ha $b > 0$ $\lvert a\rvert \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$	
5.	Ha $b > 0$ $\lvert a\rvert \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b$ vagy $a \geqslant b$	
6.	$\lvert a \cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	*A szorzat abszolút értéke egyenlő a tényezők abszolút értékének szorzatával*
7.	$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ $(b \neq 0)$	*A tört abszolút értéke egyenlő a számláló abszolút értékének és a nevező abszolút értékének hányadosával* (ha a tört nevezője nem egyenlő nullával)
8.	$\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$	$\lvert a\rvert^2 = a^2$ $\lvert a\rvert^{2k} = a^{2k}$
9.	$\lvert a + b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$ $\lvert a_1 + a_2 + \ldots + a_n\rvert \leqslant \lvert a_1\rvert + \lvert a_2\rvert + \ldots + \lvert a_n\rvert$	*Az összeg abszolút értéke nem nagyobb az összeadandók abszolút értékének összegénél*
10.	$\lVert a\rvert - \lvert b\rVert \leqslant \lvert a \pm b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	

Magyarázat és indoklás

1. Számhalmazok. Eddigi matematikai tanulmányaitok során már sokféle – természetes, egész, racionális, irracionális, valós – számmal találkoztatok. A számokról az emberiség elképzelése fokozatosan alakult ki leginkább a gyakorlati élet hatására. Például a *természetes számokra* az igény a tárgyak megszámolásának okán jelentkezett. De arra a kérdésre, hogy „Hány gyufaszál van az üres gyufásdobozban?" a természetes számok halmazán $\boldsymbol{N} = \{1; 2; 3, \ldots\}$ nem adhatunk választ, ezért vált szükségessé a 0 szám bevezetése. Ha a természetes számok halmazát kibővítjük a nulla számmal, akkor megkapjuk a *nemnegatív egész számok* halmazát, amelyet gyakran $\boldsymbol{Z}_0 = \{1; 2; 3, \ldots\}$-val jelölnek. De csak a nemnegatív számok halmaza nem elegendő a gyakorlati feladatok megoldására (olyan matematikai feladatokra, melyeket valós probléma megoldására találtak ki). Így például, hogy a levegő hőmérsékletét nulla alatt és nulla felett is jellemezni tudjuk, vagy a testek ellenkező irányú mozgását is tanulmányozhassuk, ahhoz a természetes számokkal ellentétes számokra is szükség van, vagyis a *negatív számokra*. Az n természetes számnak az ellentettje a $-n$, a $-n$ számnak az ellentettje pedig az n. A nulla saját magának az ellentettje.

A természetes számok, a nulla és a természetes számok ellentettjei együtt alkotják a $\boldsymbol{Z}$ *egész számok* halmazát.

A különböző mérések szükségessé tették az egész számok halmazának kibővítését, és a *racionális számok* bevezetését. Például a januári középhőmérséklet értéke Harkivban $-7{,}3$ °C, az iskolai tanóra 45 perc vagy $\frac{3}{4}$ óra.

Tehát, ha kiválasztunk valamilyen mértékegységet, akkor a mérés során egy olyan mérőszámot kapunk, amit különböző (egész és tört, pozitív és negatív) racionális számként fejezhetünk ki.

Az egész számok és a törtszámok együtt alkotják a $\boldsymbol{Q}$ *racionális számok* halmazát.

Bármely racionális szám felírható $\frac{m}{n}$ alakú törtként, ahol $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$ (vagyis az m számláló egész szám, az n nevező pedig természetes szám).

A racionális számok különböző törtek alakjában is felírhatók. Például:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}; \quad -\frac{2}{7} = \frac{-2}{7} = \frac{-8}{28} = \frac{-10}{35}; \quad 1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = \frac{120}{100}; \quad 5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{50}{10}.$$

A fenti példákból látható, hogy a racionális számokat felíró törtek között mindig lesz egy olyan tört is, amely tovább nem egyszerűsíthető (az egész számok tört alakjában a nevező mindig 1-gyel lesz egyenlő).

Megjegyezzük, hogy az $\frac{m}{n}$ tört alakban megadott racionális szám, ahol

$m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, felírható egy véges vagy végtelen periodikus tizedes törtként, ha a számlálót elosztjuk a tört nevezőjével. Például $\frac{3}{4} = 0{,}75$, $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$.

Állapodjunk meg abban, hogy a véges tizedes törtet végtelen tizedes törtként ábrázolhatjuk, ha az utolsó nullától különböző tizedesjegyét követő számjegyek helyett nullákat írunk. Például $\frac{3}{4} = 0{,}75 = 0{,}75000\ldots$.

Megállapodhatunk abban is, hogy az egész számokat is felírhatjuk végtelen tizedes törtként, ha a tizedesvesszőtől jobbra nullákat írunk: $13 = 13{,}000\ldots$. Tehát bármilyen racionális szám felírható végtelen tizedes tört alakjában.

Emlékeztetünk arra, hogy a végtelen periodikus törtben egy helytől kezdődően a tizedes tört számjegyei ismétlődnek. Az ismétlődő számjegyek csoportját a *tört periódusának* nevezzük. A törtek felírásakor a periódust zárójelbe kell tenni.

Például $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0{,}(3)$, $\frac{3}{22} = 0{,}136363636\ldots = 0{,}1(36)$.

Tehát *minden racionális szám felírható végtelen periodikus tizedes tört alakjában, és fordítva, minden végtelen periodikus tizedes tört racionális számnak felel meg.*

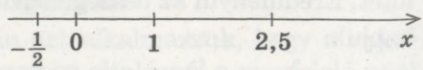
Megjegyezzük, hogy minden periodikus tizedes tört, melynek kilenc a periódusa, egyenlő egy olyan 0 periódusú végtelen tizedes törttel, amelyben – a periódust megelőző – tizedek helyi értékét növeltük egy egységgel az eredeti tört megfelelő helyi értékéhez képest.

Például a $0{,}2(9)$ és a $0{,}3(0)$ végtelen periodikus tizedes törtek ugyanannak a $\frac{3}{10}$ racionális számnak tizedes tört alakban való felírása. Valóban, ha alkalmazzuk a végtelen mértani sorozat összegének képletét, melyben az első tag a_1, a hányados q, akkor az összeg $S = \frac{a_1}{1-q}$ képletéből kapjuk:

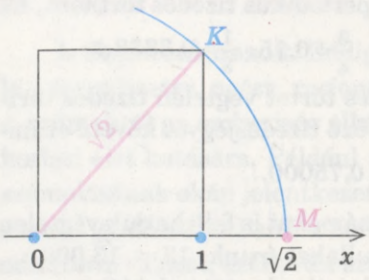
$$0{,}2(9) = 0{,}2999\ldots = 0{,}2 + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10\,000} + \ldots = 0{,}2 + \frac{\frac{9}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = 0{,}2 + \frac{1}{10} = 0{,}3 = 0{,}3(0).$$

A továbbiakban, a racionális számok végtelen periodikus tizedes törtként történő felírásakor, megegyezünk abban, hogy nem vizsgáljuk azokat a végtelen periodikus tizedes törteket, melyeknek a periódusa kilenc.

Minden racionális szám egy pontként ábrázolható a számegyenesen (vagyis olyan egyenesen, amelyen feltüntetjük az origót vagy kezdőpontot, pozitív irányt és az egységet). Például a 9. ábrán néhány racionális szám látható $\left(0; 1; -\frac{1}{2}; 2{,}5\right)$.



9. ábra



10. ábra

De a számegyenesen olyan pontok is megtalálhatók, melyek nem tartoznak a racionális számok halmazához. Például az algebrából ismert, hogy a $\sqrt{2}$ nem racionális szám. Ez egy úgynevezett irracionális szám. Ha szerkesztünk az x számegyenesen egy 1 egység oldalú négyzetet (10. ábra), akkor az átlójának hossza $\sqrt{2}$ -vel egyenlő. Ekkor az O középponttal egy $OM = \sqrt{2}$ sugarú ívet húzunk, és megkapjuk az M pontot, melynek a koordinátája $\sqrt{2}$. A $\sqrt{2}$ számon kívül találkoztatok már $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$ stb. irracionális számokkal is.

A racionális és irracionális számok együtt alkotják a *valós számok* $\boldsymbol{R}$ *halmazát*. A számegyenesen minden valós számnak egy pont felel meg, és fordítva, minden pontnak a számegyenesen egy valós szám felel meg (ilyenkor azt mondják, hogy a valós számok halmaza és a számegyenes pontjainak halmaza között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn).

Minden valós szám felírható végtelen tizedes tört alakjában: a racionális számok végtelen periodikus tizedes tört alakjában, az irracionális számok pedig végtelen nem periodikus tizedes tört alakjában.

Emlékeztetünk arra, hogy a valós számok összehasonlítását és a velük végzett műveleteket is (abban az esetben, ha legalább az egyik közülük nem racionális) a közelítő értékeikkel kell elvégezni. *Két valós szám összehasonlításához fokozatosan össze kell vetni egészre, tizedre, századra lefelé kerekített közelítő értékeiket mindaddig, amíg nem kapunk az egyik számra egy olyan közelítő értéket, amely nagyobb lesz a másik szám megfelelő közelítő értékénél.*

Azt a számot tekintjük a nagyobbnak, melynek a megfelelő közelítő értéke a nagyobb. Ha például $\alpha = \sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$, $\beta = 1\frac{3}{4} = 1{,}7500000\ldots$, ekkor $\alpha < \beta$ (mert $1{,}73 < 1{,}75$).

Az α és β számok szorzásának és osztásának elvégzéséhez egymás után felírjuk lefelé és felfelé (egészre, tizedre, századra, ezredre) kerekített közelítő értékeit, és az így kapott racionális számokkal végezzük el a megfelelő műveletet. Eredményül az összeg vagy a szorzat kívánt pontosságú közelítő értékét kapjuk.

α	β	$\alpha + \beta$	$\alpha\beta$
$1 < \alpha < 2$	$1 < \beta < 2$	$2 < \alpha + \beta < 4$	$1 < \alpha\beta < 4$
$1{,}7 < \alpha < 1{,}8$	$1{,}7 < \beta < 1{,}8$	$3{,}4 < \alpha + \beta < 3{,}6$	$2{,}89 < \alpha\beta < 3{,}24$
$1{,}73 < \alpha < 1{,}74$	$1{,}75 < \beta < 1{,}76$	$3{,}48 < \alpha + \beta < 3{,}50$	$3{,}0275 < \alpha\beta < 3{,}0624$
$1{,}732 < \alpha < 1{,}733$	$1{,}750 < \beta < 1{,}751$	$3{,}482 < \alpha + \beta < 3{,}484$	$3{,}031 < \alpha\beta < 3{,}034483$
...	...	...	...

Mint látjuk, $\alpha + \beta = 3{,}48...$, $\alpha\beta = 3{,}03...$.

A matematika analízisben bizonyítást nyert, hogyha az a-nak és b-nek egymás után veszik az egészekre, tizedekre, századokra stb. kerekített értékeit, akkor az $a + b$ összeg lekerekített és felkerekített értéke egy és ugyanazon számhoz közelítenek, amit az $a + b$ összegének fogadtak el. Hasonlóképpen határozzák meg az $\alpha\beta$ szorzatot is.

2. A valós szám abszolút értéke és tulajdonságai. Emlékezzünk vissza az abszolút érték meghatározására.

A pozitív szám *abszolút értékének* magát a számot nevezzük, a negatív szám abszolút értékének pedig a szám ellentettjét; a nulla abszolút értéke pedig nullával egyenlő.

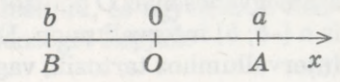
Ez a meghatározás rövidebben többféleképpen is felírható.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ ha } a > 0, \\ 0, \text{ ha } a = 0, \\ -a, \text{ ha } a < 0, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad |a| = \begin{cases} a, \text{ ha } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ ha } a < 0, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad |a| = \begin{cases} a, \text{ ha } a > 0, \\ -a, \text{ ha } a \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\text{vagy} \quad |a| = \begin{cases} a, \text{ ha } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ ha } a \leqslant 0. \end{cases}$$

Ezek közül bármelyik meghatározást alkalmazhatjuk. Ha meg akarjuk határozni az $|\,a\,|$ értékét, akkor a meghatározás alapján meg kell állapítani az a szám előjelét, és alkalmazni a megfelelő képletet. Például $|\,5\,| = 5$, $|\,-3\,| = -(-3) = 3$, $|\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}$.

A szám abszolút értéke egyenlő a kezdőpont és a számot ábrázoló pont számegyenesen vett távolságával.



11. ábra

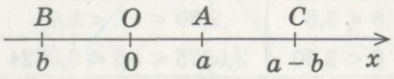
Valóban, ha $a > 0$ (11. ábra), akkor a távolság $OA = a = |\,a\,|$.

Ha $b < 0$, akkor a távolság $OB = -b = |\,b\,|$.

Két szám különbségének abszolút értéke egyenlő az a és b pontok számegyenesen vett távolságával.

Ennek az állításnak a bizonyítása során azt alkalmazzuk, hogy a számegyenes mentén b egységgel való párhuzamos eltolásnál a megfelelő pont abszcisszája b egységgel változik, a pont abszcisszájához hozzáadódik a

b szám, vagyis ha $b > 0$, akkor a pont jobbra tolódik, ha $b < 0$, akkor balra. A számegyenesen rendre A, B, C pontokkal jelöljük az a, b, $a - b$ számokat.



12. ábra

A 12. ábrán azt az esetet ábrázoltuk, amikor $a > 0$ és $b < 0$, jóllehet a következő magyarázat nem függ az a és b előjeleitől.

Ha az Ox tengely mentén párhuzamos eltolást végzünk b egységgel, akkor az O pont átmegy a B pontba, és az $a - b$ koordinátájú C pont olyan pontba megy át, melynek a koordinátája $a - b + b = a$, vagyis az A pontba. Ekkor $CO = AB$. De a CO távolság ez az $a - b$ pont és a kezdőpont közötti távolság, vagyis $CO = |a - b|$, tehát $AB = |a - b|$.○

Az abszolút érték meghatározása és geometriai értelmezése alapján megindokolhatjuk az abszolút érték azon tulajdonságait, melyek a 2. táblázatban találhatók.

Például figyelembe véve azt, hogy az $|a|$ ez az a pont és az O pont közötti távolság, és a távolság csak nemnegatív szám lehet, ebből következik

$$|a| \geqslant 0,$$

vagyis *bármilyen szám abszolút értéke nemnegatív szám.*

Figyelembe véve azt, hogy az a és a $-a$ számok az O ponttól egyenlő távolságra vannak, ezért

$$|-a| = |a|,$$

vagyis az *ellentett számok abszolút értékei egyenlők* egymással.

Ha $a \geqslant 0$, akkor $|a| = a$, és ha $a < 0$, akkor $a < |a|$. Tehát mindig igaz az

$$a \leqslant |a|,$$

egyenlőtlenség, vagyis az *a szám értéke nem nagyobb, mint az abszolút értéke.*

Ha az utolsó egyenlőtlenségben az a-t $-a$-val helyettesítjük, és figyelembe vesszük azt, hogy $|-a| = |a|$, akkor a $-a \leqslant |a|$ egyenlőtlenséget kapjuk. Innen $a \geqslant -|a|$, ez az $a \leqslant |a|$ egyenlőtlenséggel együtt arról tanúskodik, hogy bármilyen valós a számra igaz a következő kettős egyenlőtlenség

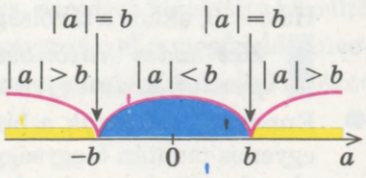
$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|. \qquad (1)$$

Ha $b > 0$, akkor az $|a| \leqslant b$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az a szám a számegyenesen az O ponttól b-nél nem nagyobb távolságra van (13. ábra), vagyis a $[-b; b]$ intervallumon. Ez az állítás fordítva is igaz. Ha az a szám ehhez az intervallumhoz tartozik, vagyis $-b \leqslant a \leqslant b$, akkor az $|a| \leqslant b$. Tehát,

$$\text{ha } b > 0, \text{ akkor } |a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b. \qquad (2)$$

Megjegyezzük, hogy a fenti állítás $b = 0$ esetén is igaz (akkor mindkét egyenlőtlenséget csak egyetlen, $a = 0$ érték elégíti ki).

Hasonlóan $b > 0$ esetén az $|a| \geqslant b$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a számegyenesen az a számnak az O ponttól való távolsága nagyobb vagy egyenlő, mint b (13. ábra), vagyis ebben



13. ábra

az esetben $a \leqslant -b$ vagy $a \geqslant b$. És fordítva, ha az a szám kielégíti ezek közül az egyenlőtlenségek közül az egyiket, akkor $|a| \geqslant b$. Tehát, ha $b > 0$, akkor az $|a| \geqslant b$ egyenlőtlenség egyenértékű az $a \leqslant -b$ vagy $a \geqslant b$ egyenlőtlenségek összességével, amely így írható fel:

$$\text{ha } b > 0 \quad |a| \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b \text{ vagy } a \geqslant b.$$

A szorzat és a hányados abszolút értékének tulajdonságait az egyforma- és a különböző előjelű számok ismert tulajdonságaiból kapjuk:

a szorzat abszolút értéke a tényezők abszolút értékeinek szorzatával egyenlő, vagyis

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

a hányados abszolút értéke egyenlő a számláló abszolút értékének és a nevező abszolút értékének hányadosával (ha a nevező nem egyenlő nullával), vagyis

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

A szorzat abszolút értékének képletét általánosíthatjuk több tényezőre is:

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n|. \tag{3}$$

Ha a (3) képletben $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, akkor a következő képletet kapjuk:

$$|a^n| = |a|^n.$$

A legutóbbi képlet jobbról balra történő felírását az $n = 2k$ esetére alkalmazva, és figyelembe véve, hogy $a^{2k} \geqslant 0$ bármilyen a értéke esetén azt kapjuk, hogy: $|a|^{2k} = |a^{2k}| = a^{2k}$. Tehát,

$$|a|^{2k} = a^{2k}.$$

Az

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \tag{4}$$

egyenlőtlenség igazolására az (1) egyenlőtlenséget felírjuk az a és a b számokra is:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|; \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Tagonként összeadva a következőt kapjuk:

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

Figyelembe véve a (2) egyenlőtlenséget, megkapjuk, hogy

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

vagyis az *összeg abszolút értéke nem nagyobb, mint a tagok abszolút értékének összege.*

Ha a (4) egyenlőtlenségben a b-t $-b$-vel helyettesítjük, és figyelembe vesszük, hogy $|-b| = |b|$, akkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$|a - b| \leqslant |a| + |b|. \tag{5}$$

Ha az a számot így írjuk fel: $a = b + (a - b)$, és a (4) egyenlőtlenséget alkalmazzuk, akkor $|a| \leqslant |b| + |a - b|$. Ahonnan

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|. \tag{6}$$

Ha a (6) egyenlőtlenségben a b-t $-b$-vel helyettesítjük, és figyelembe vesszük, hogy $|-b| = |b|$, akkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$|a| - |b| \leqslant |a + b|, \tag{7}$$

vagyis *két szám összegének abszolút értéke nem kisebb abszolút értékeik különbségénél.*

Felcserélve az a és b betűket a (6) és (7) egyenlőtlenségekben, és figyelembe véve azt, hogy $|a-b| = |b-a|$, a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$|b|-|a| \leqslant |a \pm b|. \tag{8}$$

A(4)–(8) egyenlőtlenségeket röviden így írhatjuk fel:

$$||a|-|b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|.$$

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Bizonyítsuk be, **hogy két racionális szám összege, különbsége, szorzata, természetes hatványa és hányadosa (ha az osztó nem egyenlő nullával) mindig racionális szám.**

Megoldás

▶ Legyen adva két racionális szám $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ és $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, ahol m_1 és m_2 egész szám, n_1 és n_2 pedig természetes szám. Mivel két közönséges tört összege, különbsége, szorzata, természetes hatványa és hányadosa mindig közönséges tört, ezért a kapott eredmény mindig racionális szám lesz. Például

$$r_1 + r_2 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2},$$

ahol $m_1 n_2 + n_1 m_2$ egész szám, $n_1 n_2$ természetes szám. ◁

Magyarázat

Bármely racionális szám felírható $\frac{m}{n}$ alakú tört alakjában, ahol m egész szám, n természetes szám. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk a feladatot, elegendő bebizonyítani, hogy két $\frac{m}{n}$ alakú tört összege, különbsége, szorzata és hányadosa szintén ilyen alakú tört lesz.

2. példa. Bizonyítsuk be, **hogy bármely n természetes számra $\sqrt{n}$ vagy természetes vagy irracionális szám lesz.**

Magyarázat

A kijelentés bizonyítására az indirekt bizonyítást alkalmazzuk: feltételezzük, hogy az adott pozitív szám egy racionális, nem egész szám (vagyis törtszám), és ellentmondásra kell jutnunk vagy a feltétellel vagy valamely ismert ténnyel szemben.

A $\sqrt{n}$ egy tovább nem egyszerűsíthető törtként történő felírásakor figyelembe kell vennünk, hogy az n természetes értékénél ez a szám mindig nemnegatív lesz.

Megoldás

▶ Feltételezzük, hogy a $\sqrt{n}$ értéke egy nem irracionális szám (akkor racionálisnak kell lennie) és nem természetes szám. Tehát ez a szám csak racionális, tovább nem egyszerűsíthető törtszám lehet $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, ahol a p és q természetes

számok ($q \neq 1$). Az m-edik gyök meghatározásából következik, hogy $n = \frac{p^2}{q^2}$, vagyis $n = \frac{p \cdot p}{q \cdot q}$. Figyelembe véve, hogy $q \neq 1$, kapjuk, hogy az n természetes számmal egyenlő $\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$ tört egyszerűsíthető. Tehát a tört számlálójában és a nevezőjében lévő természetes tényezőknek 1-től különböző természetes osztójuk kellene, hogy legyen. De a számlálóban csak p tényező van, a nevezőben pedig csak q. Tehát a p és q számoknak van 1-től különböző természetes osztójuk, vagyis a $\frac{p}{q}$ tört egyszerűsíthető, amely ellentmond a feltevésünknek. Ebből következik, hogy a feltevésünk helytelen volt, tehát bármilyen természetes n-re $\sqrt{n}$ vagy természetes vagy irracionális szám lesz. ◁

Például mivel $\sqrt{3}$ és $\sqrt{10}$ nem természetes szám $\left(1 < \sqrt{3} < 2,\ 3 < \sqrt{10} < 4\right)$, ebből következik, hogy $\sqrt{3}$ és $\sqrt{10}$ irracionális szám.

3*. példa Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ összeg irracionális szám.

Megoldás

▶ Feltételezzük, hogy a $\sqrt{3} + \sqrt{5} = r$ racionális szám. Ekkor $\sqrt{5} = r - \sqrt{3}$. Ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát négyzetre emelve, kapjuk $5 = r^2 - 2r\sqrt{3} + 3$. Innen $2r\sqrt{3} = r^2 - 2$. Tehát $\sqrt{3} = \frac{r^2 - 2}{2r}$. De ennek az egyenlőségnek a jobb oldala egy racionális szám (mert a feltevésünk szerint r racionális szám), a bal oldalon pedig egy irracionális szám áll. Ellentmondásra jutottunk, amiből az következik, hogy a feltevésünk helytelen volt, tehát a $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ összeg irracionális szám. ◁

Magyarázat

Az állítás bizonyítására az indirekt bizonyítást alkalmazzuk, amelyben feltételezzük, hogy az adott szám racionális, majd ellentmondásra jutunk valamilyen ismert ténnyel szemben, például azzal, hogy a $\sqrt{3}$ irracionális szám.

Elemezve az 1. példában kapott eredményt: *ha az r szám racionális, akkor az* $r^2 - 2$ *és a* $2r$ *valamint ezek hányadosa is szintén racionális szám lesz.*

Kikötjük, hogy a kapott tört nevezője $2r = 2(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \neq 0$.

4. példa. Oldjuk meg a $|2x + 5| = 7$ egyenletet[1]!

[1] Az abszolút értéket tartalmazó egyenleteket és egyenlőtlenségeket a 8. §-ban részletesebben vizsgáljuk majd

Megoldás

I. módszer

▶ $2x + 5 = 7$ vagy $2x + 5 = -7$,
$2x = 2$ vagy $2x = -12$,
$x = 1$ vagy $x = -6$.

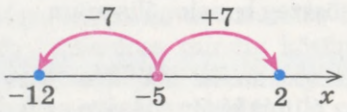
Felelet: 1; –6. ◁

Magyarázat

Az adott egyenlet általános alakja $|t| = 7$ (a mi esetünkben $t = 2x + 5$). Az ilyen egyenletet az abszolút érték mértani értelmezése alapján érdemes megoldani: $|2x + 5|$ ez a 0 pont és a $2x + 5$ pont közötti távolság. De 0 ponttól a 7 egység távolság jobbra is (ekkor a 7 számot kapjuk), és balra is (ekkor a –7 számot kapjuk) felmérhető. Tehát a $|2x + 5| = 7$ egyenlőség akkor és csakis akkor igaz, ha $2x + 5 = 7$ vagy $2x + 5 = -7$.

II. módszer

▶ $|2x - (-5)| = 7$,



14. ábra

$2x = 2$ vagy $2x = -12$,
$x = 1$ vagy $x = -6$.

Felelet: 1; –6. ◁

Az $|a - b|$ mértani értelmezés szerint az a és b pontok közötti távolságot jelöli a számegyenesen. Felírjuk az adott egyenletet $|2x - (-5)| = 7$ alakban, ami azt jelenti, hogy a $2x$ pont és a –5 pont közötti távolság 7 lesz. A –5 ponttól 7 egységre a 2 és a –12 számok találhatók (14. ábra). Tehát az adott egyenlőség akkor és csakis akkor igaz, ha $2x = 2$ vagy $2x = -12$, vagyis az adott egyenlet egyenértékű ezeknek az egyenleteknek az összességével.

5. példa Oldjuk meg az $|x^2 - 5x| \leqslant 6$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

▶ $-6 \leqslant x^2 - 5x \leqslant 6$,

$$\begin{cases} x^2 - 5x \leqslant 6, \\ x^2 - 5x \geqslant -6, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leqslant 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \end{cases}$$

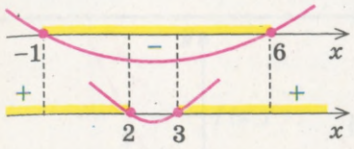
$$\begin{cases} (x+1)(x-6) \leqslant 0, \\ (x-2)(x-6) \geqslant 0. \end{cases}$$

Az egyenlőtlenségek megoldása után azt kapjuk, hogy (15. ábra):

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 6, \\ x \leqslant 2 \text{ vagy } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Magyarázat

Az adott egyenlőtlenség $|t| \leqslant 6$ alakú (a jelen esetben $t = x^2 - 5x$), amely az abszolút érték mértani értelmezésének alkalmazásával oldható meg. Mértani értelemben $|t|$ a számegyenesen a t pont távolsága a 0 ponttól. A 0 ponttól 6 egységre a 6 és a –6 számok találhatók.



15. ábra

Tehát $-1 \leqslant x \leqslant 2$ vagy $3 \leqslant x \leqslant 6$.
Felelet: $[-1; 2] \cup [3; 6]$. ◁

Ekkor a $|t| \leqslant 6$ egyenlőtlenséget azok és csakis azok a pontok elégítik ki, melyek a $[-6; 6]$ intervallumhoz tartoznak, vagyis $-6 \leqslant t \leqslant 6$. Megoldani ezt a kapott kettős egyenlőtlenséget egyenlőtlenség-rendszerként érdemes.

Ellenőrző kérdések

1. Magyarázd meg, milyen számok képezik az egész, racionális és valós számok halmazát! Mondj példákat! Ábrázold a megfelelő pontokat a számegyenesen!
2. Magyarázd meg, miben különbözik a racionális és az irracionális számok felírása végtelen tizedes tört alakjában!
3. Magyarázd meg, hogyan kell a valós számokat összehasonlítani!
4. Ismertesd a valós szám abszolút értékének a meghatározását: a) sorold fel az abszolút érték tulajdonságait; b*) magyarázd meg a valós szám abszolút értékének tulajdonságait!

Gyakorlatok

1. Magyarázd meg, hogy az adott számok miért nem lehetnek racionálisak:
1) $1+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}-5$; 3) $\sqrt{10}$;
4) $\sqrt{7}+3$; 5) $2-\sqrt{5}$!

2*. Bizonyítsd be, hogy a racionális és az irracionális számok összege (különbsége, szorzata és hányadosa) mindig irracionális szám (a szorzat és a hányados csak abban az esetben, ha az adott racionális szám nem egyenlő nullával)!

3*. Bizonyítsd be, hogy az adott valós számok irracionálisak:
1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$;
3) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$!

4. Alkalmazva az abszolút érték mértani értelmezését, ábrázold a számegyenesen az egyenlőtlenségek megoldásának a halmazát:
1°) $|x| \leqslant 2$; 2°) $|x| > 5$;
3) $|x-3| \leqslant 0{,}5$; 4) $|x+1| < 0{,}3$!

5. Oldd meg az egyenleteket:
1) $|3x+1| = 4$; 2) $|4x-2| = 6$;
3*) $||x-1|-2| = 1$; 4*) $||2x+3|-5| = 3$!

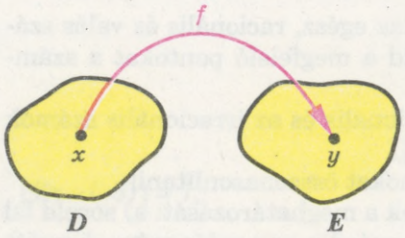
6. Oldd meg az egyenlőtlenségeket:
1) $|2x-7| \leqslant 1$; 2) $|3x+5| > 7$;
3*) $||2x-1|+3| \geqslant 5$; 4*) $||4x+7|-11| < 4$!

2. §. FÜGGVÉNYEK

2.1. A számfüggvények[1] fogalma. A számfüggvények alaptulajdonságai

3. táblázat

1. A számfüggvény fogalma



***D* értelmezési tartományú számfüggvénynek nevezzük az olyan egyértelmű hozzárendelést, amely a *D* halmazhoz (értelmezési tartományhoz) tartozó minden *x* számhoz egy *y* számértéket rendel hozzá.**

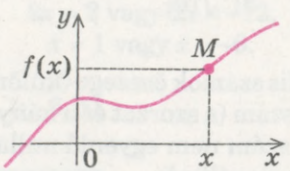
Ezt az összefüggést így írják fel:

$$y = f(x).$$

Jelölések és fogalmak

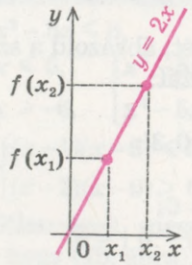
$D(f)$	— értelmezési tartomány
$E(f)$	— értékkészlet
x	— argumentum (független változó)
y	— függvény (függő változó)
f	— függvény
$f(x_0)$	— az f függvény értéke az x_0 pontban

2. A függvény grafikonja



***Az f függvény grafikonjának* nevezzük a koordinátasík valamennyi $(x; f(x))$ koordinátájú pontjának halmazát,** ahol x az első koordináta végigfutja a függvény egész értelmezési tartományát, a második koordináta pedig az f függvény x pontbeli értéke

3. Növekvő és fogyó függvények

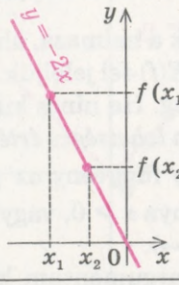
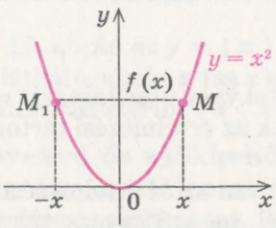
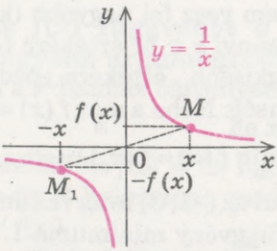


Az $f(x)$ függvény **növekvő a P halmazon, ha mindegyik $x \in P$ értékre igaz, ha $x_2 > x_1$, akkor $f(x_2) > f(x_1)$**

(az argumentum növekedésével a függvény értéke is növekedni fog)

[1] Számfüggvényen a matematikában a számhalmazok között létesített kapcsolatot értjük.

3. táblázat folytatása

	Az $f(x)$ függvény **csökkenő (fogyó) a P halmazon, ha mindegyik $x \in P$ értékre igaz, ha $x_2 > x_1$, akkor $f(x_2) < f(x_1)$** (az argumentum növekedésével a függvény értéke csökkeni fog)
4. Páros és páratlan függvények	
	Az $f(x)$ függvény páros, ha az értelmezési tartomány bármely x értékére igaz: $f(-x) = f(x)$. **A páros függvény szimmetrikus az Oy tengelyre**
	Az $f(x)$ függvény páratlan, ha az értelmezési tartomány bármely x értékére igaz: $f(-x) = -f(x)$. **A páratlan függvény szimmetrikus a koordinátarendszer kezdőpontjára, vagyis az O pontra nézve**

Magyarázat és indoklás

1. A függvény fogalma. A függvény fogalmával már az algebra tanulmányozása során megismerkedtetek. Emlékeztetünk arra, hogy az y és az x változók közötti összefüggést *függvénynek* nevezzük, ha minden egyes x értéknek egyetlen egy y érték felel meg.

Az algebra és az analízis elemei tantárgyban a számfüggvényre a következő meghatározást fogjuk alkalmazni.

***D értelmezési tartományú számfüggvénynek* nevezzük az olyan egyértelmű hozzárendelést, amely a D halmazhoz tartozó minden x számhoz egy y számértéket rendel hozzá.**

A függvényeket latin (néha görög) betűkkel jelölik. Megvizsgálunk egy tetszőleges f függvényt. Az x számnak egy olyan y szám felel meg (a 16. ábrán ezt nyíllal ábrázoltuk), amit az f függvény x pontbeli helyettesítési értékének neveznek, és $f(x)$-szel jelölnek.

Az *f függvény értelmezési tartománya* az x argumentum lehetséges értékeinek a halmaza, melyet $D(f)$-fel jelölünk.

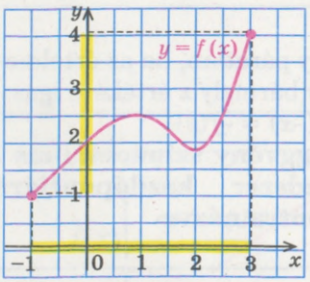
Az *f függvény értékkészlete* az $f(x)$ összes értékeinek a halmaza, ahol az x az értelmezési tartományhoz tartozik. Az értékkészletet $E(f)$-fel jelöljük.

Leggyakrabban a függvényeket képlettel adják meg. Ha nincs kikötés, akkor *az értelmezési tartománynak a változó minden olyan lehetséges értékét tekintik, amelyre ez a képlet értelmezve van.* Ha például egy függvény az $y = \sqrt{x} + 1$ képlettel van megadva, akkor az értelmezési tartománya $x \geqslant 0$, vagyis $D(y) = [0; +\infty)$, és az értékkészlete $y \geqslant 1$, vagyis $E(y) = [1; +\infty)$.

Néha a függvényt úgy is megadhatják, hogy az argumentum különböző értékeinek a halmazára különböző képleteket alkalmaznak. Például

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ ha } x \geqslant 0, \\ -x \text{ ha } x < 0. \end{cases}$$

A függvények nem csak képlettel, de táblázattal vagy utasítással is megadhatók. Például a 16. ábrán az $y = f(x)$ függvénynek az értelmezési tartománya $D(f) = [-1; 3]$ és értékkészlete $E(f) = [1; 4]$.



16. ábra

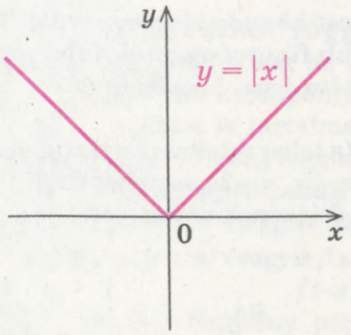
Az $f(x)$ függvénynek *maximuma* (*minimuma*) van az M értelmezési tartományának x_0 értékénél, ha a függvény ott felvett $f(x_0)$ értékénél sehol sem vesz fel nagyobb (kisebb) értéket. Vagyis valamennyi $x \in M$ értékére teljesül az $f(x) \leqslant f(x_0)$ (legkisebb értékére pedig az $f(x) \geqslant f(x_0)$) egyenlőtlenség. Néha a $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$ (vagy megfelelően a $\min\limits_{M} f(x) = f(x_0)$) felírással is találkozhatunk. Például az $[-1; 3]$ intervallumban a grafikusan megadott függvény minimuma 1, maximuma pedig 4 (16. ábra). Azaz $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 4$. és $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = 1$.

2. A függvény grafikonja. Emlékeztetünk arra,

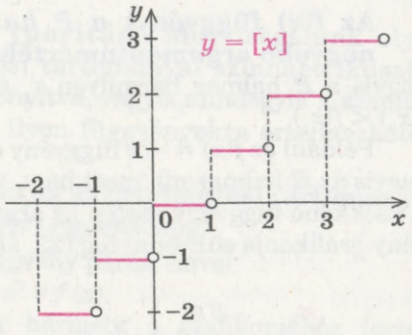
hogy az $y = f(x)$ *függvény grafikonjának* az $(x; f(x))$ koordinátájú pontok halmazát nevezzük, melynek x koordinátája az értelmezési tartomány minden pontját végigfutja, a második koordinátája pedig az x pontnak megfelelő f értéket veszi fel.

A 4. ponthoz tartozó 3. táblázatban az $y = x^2$ és az $y = \frac{1}{x}$ függvények grafikonja látható, a 17. ábrán pedig $y = |x|$ grafikonja.

Megvizsgáljuk az $y = [x]$ függvény grafikonját, ahol $[x]$ az x szám *egész része*, vagyis az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb az x-nél (18. ábra). Ennek a függvénynek az értelmezési tartománya $D(y) = \boldsymbol{R}$ a valós számok halmaza, az értékkészlete pedig $E(y) = \boldsymbol{Z}$ az egész számok halmaza.

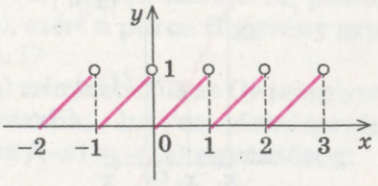


17. ábra



18. ábra

A 19. ábrán az $y = \{ x \}$ függvény grafikonja látható, ahol $\{ x \}$az x szám *törtrésze* (a meghatározás szerint $\{ x \} = x - [x]$).



19. ábra

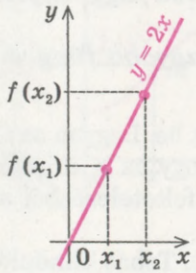
3. Növekvő és csökkenő függvények. A függvény egyik fontos tulajdonsága a növekedése és csökkenése.

Az $f(x)$ függvényt *a P halmazon növekvőnek* nevezzük, ha a nagyobb argumentumértéknek nagyobb függvényérték felel meg, vagyis a P halmaz bármilyen x_1 és x_2 értékére igaz,

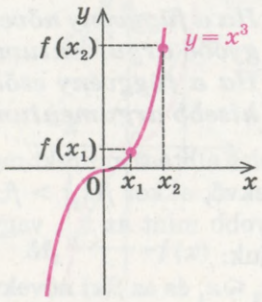
$$\text{ha } x_2 > x_1, \text{ akkor } f(x_2) > f(x_1).$$

Például az $f(x) = 2x$ függvény növekvő (a teljes értelmezési tartományán, vagyis az R halmazon), mert ha $x_2 > x_1$, akkor teljesül a $2x_2 > 2x_1$ is, vagyis $f(x_2) > f(x_1)$.

A növekvő függvény esetén az argumentum értékének növekedésekor a függvény értéke is növekedni fog (20. ábra).



20. ábra

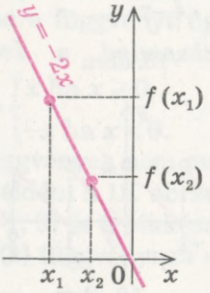


21. ábra

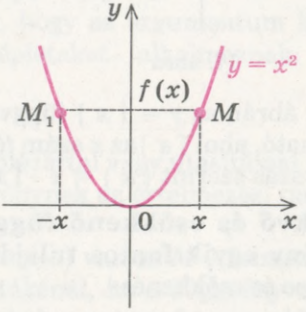
A 21. ábrán az $y = x^3$ növekvő függvény látható. Valóban $x_2 > x_1$ esetén igaz az $x_2^3 > x_1^3$ is, vagyis $f(x_2) > f(x_1)$.

Az $f(x)$ függvényt *a P halmazon csökkenőnek* nevezzük, ha a nagyobb argumentumértéknek kisebb függvényérték felel meg, vagyis a P halmaz bármilyen x_1 és x_2 értékére igaz, hogyha $x_2 > x_1$, akkor $f(x_2) < f(x_1)$.

Például az $f(x) = -2x$ függvény csökkenő (a teljes értelmezési tartományán, vagyis az R halmazon), mert ha $x_2 > x_1$, akkor $-2x_2 < -2x_1$ is, tehát $f(x_2) < f(x_1)$. A csökkenő függvény esetén az argumentum értékének növekedésekor a függvény grafikonja süllyedni fog (22. ábra).



22. ábra



23. ábra

Megvizsgálva az $y = x^2$ (23. ábra) függvény grafikonját azt látjuk, hogy a teljes értelmezési tartományon a függvény se nem növekszik, se nem csökken. Azonban kiválasztható az értelmezési tartományból olyan intervallum, melyen a függvény növekszik, és olyan is, amelyen csökken. Így a $[0; +\infty)$ intervallumon az $y = x^2$ függvény növekvő, a $(-\infty; 0]$ intervallumon pedig csökkenő vagy fogyó.

Megjegyezzük, hogy a növekvő és fogyó függvények esetén a meghatározásban szereplő tulajdonságokról szóló állítások fordított megfogalmazása is igaz.

Ha a függvény növekvő, akkor a nagyobb függvényértéknek nagyobb argumentumérték felel meg.
Ha a függvény csökkenő, akkor a nagyobb függvényértéknek kisebb argumentumérték felel meg.

Az első állítást indirekt módszerrel bizonyítjuk be. Legyen az $f(x)$ függvény növekvő, akkor $f(x_2) > f(x_1)$. Feltételezzük, hogy az x_2 argumentum nem nagyobb mint az x_1 , vagyis $x_2 \leqslant x_1$. Ebből a feltételezésből a következőt kapjuk:
ha $x_2 \leqslant x_1$ és az $f(x)$ növekvő, akkor $f(x_2) \leqslant f(x_1)$. Tehát kiinduló feltételezésünk hibás, ezért ha $f(x_2) > f(x_1)$, akkor $x_2 > x_1$, amit bizonyítanunk kellett. Hasonlóképpen bizonyítható a második állítás is. ○

Ha például $x^3 > 8$, vagyis $x^3 > 2^3$, akkor figyelembe véve, hogy az $f(x) = x^3$ függvény növekvő, ebből következik, hogy $x > 2$.

4. Páros és páratlan függvények (paritás). Megvizsgálunk olyan függvényeket, melyeknek az értelmezési tartományai szimmetrikusak a koordináta-rendszer kezdőpontjához viszonyítva, vagyis mindegyik x számmal együtt a $-x$ számot is tartalmazzák. Az ilyen függvényekre értelmezhető a párosság és a páratlanság fogalma.

Az f függvényt *párosnak* nevezzük, ha az értelmezési tartományon vett bármely x-re igaz az $f(-x) = f(x)$ egyenlőség.

Például az $y = x^2$ (vagyis $f(x) = x^2$) függvény páros, mivel

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

● Ha az $f(x)$ függvény páros, akkor bármely, a grafikonjához tartozó $(x; y) = (x; f(x))$ koordinátájú M pont mellett, a grafikonhoz tartozik a $(-x; y) = (-x; f(-x)) = (-x; f(x))$ koordinátájú M_1 pont is. Az M és M_1 pontok szimmetrikusak az Oy tengelyre (24. ábra), ezért **a páros függvény grafikonja szimmetrikus az Oy tengelyre.** ○

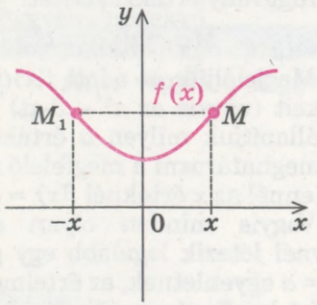
Például az $y = x^2$ páros függvény (23. ábra) szimmetrikus az Oy tengelyre.

Az f függvényt *páratlannak* nevezzük, ha az értelmezési tartományon vett bármely x-re igaz az $f(-x) = -f(x)$ egyenlőség.

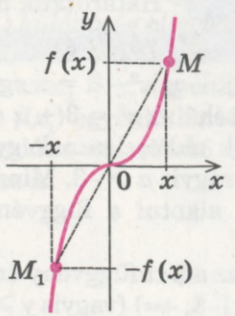
Például az $y = \frac{1}{x}$ (vagyis az $f(x) = \frac{1}{x}$) függvény páratlan, mivel

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

● Ha az $f(x)$ függvény páratlan, akkor bármely, a grafikonjához tartozó $(x; y) = (x; f(x))$ koordinátájú M pont mellett, a grafikonhoz tartozik a $(-x; y) = (-x; f(-x)) = (-x; -f(x))$ koordinátájú M_1 pont is. Az M és M_1 pontok szimmetrikusak a koordináta-rendszer kezdőpontjához képest (25. ábra), ezért **a páratlan függvény grafikonja szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára (origóra).** ○



24. ábra



25. ábra

Például az $y = \frac{1}{x}$ páratlan függvény grafikonja (lásd a 3. táblázat 4. pontját) szimmetrikus az origóra, vagyis az O pontra.

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát:

1) $y = x^2 + x$; 2) $y = \frac{x}{x^2 + x}$; 3) $y = \sqrt{x+5}$.

Megoldás

1) ▶ Az $x^2 + x$ kifejezés értékének meghatározására nincs semmilyen korlátozó feltétel, ezért $D(y) = \boldsymbol{R}$. ◁

2) ▶ Az $y = \frac{x}{x^2 + x}$ függvény értelmezési tartományára vonatkozó korlátozó feltétel: $x^2 + x \neq 0$, mivel a nevező nem lehet nulla. $x^2 + x = 0$ esetén $x(x + 1) = 0$; $x = 0$ vagy $x = -1$. Tehát az értelmezési tartomány korlátozásai $x \neq 0$ vagy $x \neq -1$, amit így is felírhatunk:

$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$. ◁

3) ▶ Az $y = \sqrt{x+5}$ függvény értelmezési tartományára vonatkozó korlátozó feltétel az $x + 5 \geqslant 0$ egyenlőtlenséggel adható meg, vagyis $x \geqslant -5$, mivel a négyzetgyök alatt nemnegatív számnak kell állnia. Tehát $D(y) = [-5; +\infty)$. ◁

Magyarázat

Mivel ezek a függvények képlettel vannak megadva, ezért az értelmezési tartományuk az x változónak az összes olyan lehetséges értéke, melynél a képleteknek van értelmük, vagyis $y = f(x)$ képlet jobb oldalán álló kifejezésnek.

Az algebrában idáig az *értelmezési tartomány meghatározására*, csak két olyan *korlátozó* feltétellel találkoztunk, melyeket figyelembe kellett venni:

1) *ha a kifejezés* $\frac{A}{B}$ *alakú törtként van megadva, akkor a nevező* $B \neq 0$;

2) *ha a kifejezés négyzetgyököt* $\sqrt{A}$ *tartalmaz, akkor a gyök alatti kifejezés* $A \geqslant 0$.

Az összes többi eddig vizsgált esetben az értelmezési tartomány a valós számok halmaza volt.[1]

2*. példa Határozzuk meg az $y = x^2 - 3$ függvény értékkészletét!

Megoldás

▶ Felállítjuk az $x^2 - 3 = a$ egyenletet. Ez egyenértékű az $x^2 = 3 + a$ egyenlettel, melynek akkor lesznek gyökei, ha $3 + a \geqslant 0$, vagyis $a \geqslant -3$. Minden ilyen szám fogja alkotni a függvény értékkészletét.

Tehát az adott függvény értékkészlete: $E(f) = [-3; +\infty)$ (vagyis $y \geqslant -3$). ◁

Magyarázat

Megjelöljük az adott $f(x)$ függvény értékeit (vagyis az $x^2 - 3$-at) a-val, és megállapítjuk milyen a értékeknél lehet meghatározni a megfelelő x értékeket (ennél az x értéknél $f(x) = a$).

Vagyis minden olyan a szám, melynél létezik legalább egy gyöke az $f(x) = a$ egyenletnek, az értelmezési tartományhoz fog tartozni. Az összes ilyen a érték halmaza alkotja a függvény értékkészletét.

[1] Az elkövetkezőkben a 10. osztályos matematikában megjelennek a korlátozó feltételt tartalmazó kifejezések: tg α, ctg α, arcsin a, arccos a, $\sqrt[n]{a}$, a^{α}, ahol α nem egész szám.

Célszerű megjegyezni a következő állítást:

az $y = f(x)$ függvény értékkészlete megegyezik az olyan a értékek halmazával, melynél az $f(x) = a$ egyenletnek van megoldása.

3*. példa. **Bizonyítsuk be, hogy $k \neq 0$ esetén az $y = kx + b$ lineáris függvény értékkészlete a valós számok halmaza.**

Megoldás

▶ Ha $kx + b = a$ (ahol $k \neq 0$), akkor ennek az egyenletnek van megoldása $x = \frac{a-b}{k}$ bármely $a \in \boldsymbol{R}$ ($k \neq 0$ a feltétel alapján) esetre. ◁

Tehát az adott függvény értéke bármely valós szám lehet, vagyis az értékkészlete $E(f) = \boldsymbol{R}$.

Magyarázat

Megjelöljük az adott $f(x)$ függvény értékét (azaz $kx + b$) a-val, és tisztázzuk, milyen a értékekre határozható meg a nekik megfelelő x érték, amelynél $f(x) = a$.

Az a összes lehetséges értéke alkotja az $f(x)$ függvény értékkészletét.

4*. példa. **Bizonyítsuk be, hogy az $y = kx + b$ lineáris függvény $k > 0$ esetén növekvő, $k < 0$ esetén pedig csökkenő.**

Megoldás

▶ Legyen $x_2 > x_1$ (ekkor $x_2 - x_1 > 0$). Megvizsgáljuk az $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$ különbséget. Mivel $x_2 - x_1 > 0$, ezért ha $k > 0$, akkor $f(x_2) - f(x_1) > 0$, tehát $f(x_2) > f(x_1)$, vagyis a függvény növekvő.

Ha $k < 0$, akkor $f(x_2) - f(x_1) < 0$, tehát $f(x_2) < f(x_1)$, vagyis a függvény csökkenő. ◁

Magyarázat

A függvény növekedésének vagy csökkenésének igazolásához érdemes felidézni, hogy *az $f(x_2) > f(x_1)$ vagy $f(x_2) < f(x_1)$ egyenlőtlenségek bizonyításához elegendő meghatározni az $f(x_2) - f(x_1)$ különbség előjelét.*

Az $f(x) = kx + b$ függvény akkor növekvő, ha az $x_2 > x_1$ egyenlőtlenségből az $f(x_2) > f(x_1)$ egyenlőtlenség következik. Hasonlóan igazolható a függvény csökkenése is.

5*. példa. Bizonyítsuk be, hogy:

1) a P halmazon növekvő két függvény összege ezen a halmazon mindig növekvő függvény;

2) a P halmazon csökkenő két függvény összege ezen a halmazon mindig csökkenő függvény.

Megoldás

1) ▶ Legyenek az $f(x)$ és $g(x)$ függvények növekvők a P halmazon. Ha $x_2 > x_1$, akkor $f(x_2) > f(x_1)$ és $g(x_2) > g(x_1)$. Ezeket az egyenlőtlenségeket tagonként összeadva azt kapjuk, hogy:

$$f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1).$$

Ez azt jelenti, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények összege növekvő függvény a P halmazon. ◁

2) ▶ Legyenek az $f(x)$ és $g(x)$ függvények csökkenők a P halmazon. Ha $x_2 > x_1$, akkor $f(x_2) < f(x_1)$ és $g(x_2) < g(x_1)$. Ezeket az egyenlőtlenségeket tagonként összeadva azt kapjuk, hogy:

$$f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1).$$

Ez azt jelenti, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények összege csökkenő függvény a P halmazon. ◁

Magyarázat

Az $f(x)$ és $g(x)$ függvények összege növekedésének bizonyításához elegendő bebizonyítani, hogy a P halmazon az $x_2 > x_1$ egyenlőtlenségből az alábbi egyenlőtlenség következik:

$$f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1).$$

Hasonlóképpen annak a bizonyítására, hogy két csökkenő függvény összege csökkenő függvény, elegendő bebizonyítani, hogy:

ha $x_2 > x_1$, akkor

$$f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1).$$

6*. példa. Bizonyítsuk be, **hogy a növekvő vagy csökkenő függvények az értelmezési tartomány egyetlen pontjában veszik fel mindegyik értéküket.**

Megoldás

▶ Legyen az $f(x)$ függvény növekvő és

$$f(x_1) = f(x_2). \qquad (1)$$

Feltételezzük, hogy

$$x_1 \neq x_2.$$

Ha $x_1 \neq x_2$, akkor $x_1 > x_2$ vagy $x_1 < x_2$. Figyelembe véve, hogy az $f(x)$ függvény növekvő, akkor $x_1 > x_2$ esetén igaz az $f(x_1) > f(x_2)$ egyenlőtlenség, ami ellentmond az (1) feltételnek. $x_1 < x_2$ esetén az $f(x_1) < f(x_2)$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami szintén ellentmond az (1) feltételnek.

Tehát kiinduló feltételezésünk hibás, és az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőség csak az $x_1 = x_2$ esetén teljesül.

Magyarázat

A bizonyítást indirekt módon végezzük el. Ehhez elegendő azt feltételezni, hogy az ellentétes állítás teljesül (a függvény egy és ugyanazt az értéket két pontban is felveszi), majd ellentmondásra jutnunk. Ami azt jelenti, hogy kiinduló feltételezésünk hibás, tehát az állítás igaz.

Vagyis a növekvő függvény mindegyik értékét az argumentum egy pontjában veszi fel.

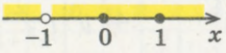
Hasonlóan bizonyítjuk a csökkenő függvényekre. ◁

7. példa. Vizsgáljuk meg, hogy az adott függvények közül melyek párosak, melyek páratlanok, és melyik se nem páros, se nem páratlan:

1) $y=\frac{1}{x+1}$; 2) $y=x^4$; 3) $y=x^3+x$.

Megoldás

1) ▶ Az $y=\frac{1}{x+1}$ függvény értelmezési tartománya: $x \neq -1$, vagyis nem szimmetrikus az O pontra (az $x = 1$ pont az értelmezési tartományhoz tartozik, az $x = -1$ pedig nem)



Az adott függvény tehát se nem páros, se nem páratlan. ◁

2) ▶ Az $y = x^4$ függvény értelmezési tartománya: $D(y) = \boldsymbol{R}$, vagyis szimmetrikus az origóra.

$$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x),$$

tehát a függvény páros. ◁

3) ▶ Az $y = x^3 + x$ függvény értelmezési tartománya: $D(y) = \boldsymbol{R}$, vagyis szimmetrikus az O pontra nézve. ◁

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = \\ = -(x^3 + x) = -f(x),$$

tehát a függvény páratlan.

Magyarázat

Az $y = f(x)$ függvény párosságára és páratlanságára vonatkozó vizsgálatához: először meggyőződünk arról, hogy a függvény szimmetrikus az origóra (minden x érték mellett a $-x$ értéket is tartalmazza az értelmezési tartomány), másodszor pedig az $f(-x)$ és az $f(x)$ értékeinek az összehasonlítását kell elvégezni.

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk számfüggvénynek? Mondj rá példákat!
2. Magyarázd meg példákon az értelmezési tartomány és az értékkészlet fogalmát! Milyen korlátozó feltételt kell figyelembe venni ahhoz, hogy meghatározzuk az $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$ függvény értelmezési tartományát? Határozd meg az adott függvény értelmezési tartományát!

3. Mit nevezünk az $y = f(x)$ függvény grafikonjának? Mondj rá példákat!
4. Milyen függvényt nevezünk növekvőnek? Mondj rá példákat!
5. Milyen függvényt nevezünk csökkenőnek? Mondj rá példákat!
6. Milyen függvényt nevezünk párosnak? Mondj rá példákat! Hogyan helyezkedik el a páros függvény grafikonja a koordinátasíkon? Mondj rá példákat!
7. Milyen függvényt nevezünk páratlannak? Mondj rá példákat! Hogyan helyezkedik el a páratlan függvény grafikonja a koordinátasíkon? Mondj rá példákat!

Gyakorlatok

1°. Határozd meg a függvény értékeit az adott pontokban:

1) az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvényét a 2; –1; 3; a ($a \neq 0$) pontokban;

2) a $g(x) = x^2 - 3$ függvényét a 0; 1; –2; b pontokban;

3) a $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$ függvényét a 0; 3; –1; m ($m > 0$) pontokban!

2. Határozd meg az értelmezési tartományát a következő képletekkel megadott függvényeknek:

1°) $y = 2x + 3$; 2°) $y = \sqrt{x+3}$; 3°) $y = \frac{1}{x+1}$; 4) $y = \frac{x}{x^2+1}$;

5) $y = \sqrt{x^2-1}$; 6) $y = \sqrt{x^2+1}$; 7) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$; 8) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x}$;

9*) $y = \sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}}$; 10*) $y = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1}$; 11*) $y = \frac{\sqrt{x}}{|x|-2}$; 12*) $y = \sqrt{x^2+x+1}$!

3. Határozd meg a következő képletekkel megadott függvények értékkészletét:

1) $f(x) = 5$; 2) $f(x) = x$; 3) $f(x) = x^2$; 4) $f(x) = \sqrt{x}$;

5*) $y = -3x + 1$; 6*) $y = x^2 - 5$; 7*) $y = |x| + 3$!

4°. Határozd meg a 26. ábrán látható grafikonokhoz tartozó függvényeknek az értelmezési tartományait, értékkészleteit, növekedési és fogyási intervallumait, és mindegyik függvény értékét az $x = 1$ pontban!

5. Igazold, hogy a következő függvények növekvők (az értelmezési tartományukon):

1) $y = 3x$; 2) $y = x + 5$; 3*) $y = x^3$; 4*) $y = x^5$; 5*) $y = \sqrt{x}$!

6*. Bizonyítsd be, hogy az adott intervallumon a függvény növekvő:

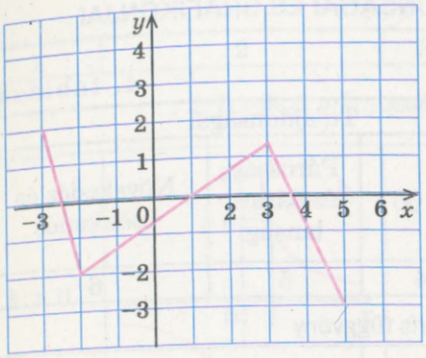
1) $y = -\frac{2}{x}$, ahol $x > 0$; 2) $y = -\frac{1}{x}$, ahol $x < 0$!

7. Igazold, hogy a következő függvények csökkenők (az értelmezési tartományukon):

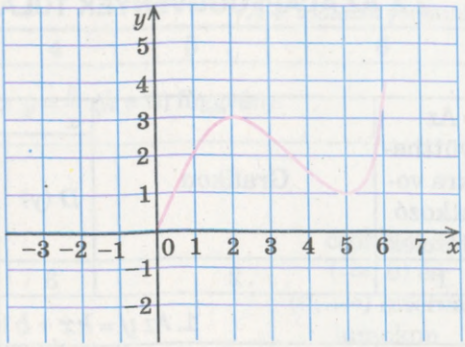
1) $y = -3x$; 2) $y = -x - 1$; 3*) $y = -x^3$; 4*) $y = -x^5$!

8*. Bizonyítsd be, hogy az adott intervallumon a függvény csökkenő:

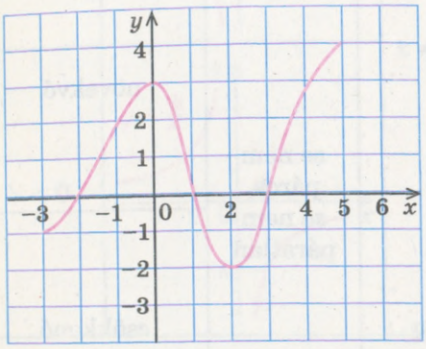
1) $y = \frac{3}{x}$, ahol $x < 0$; 2) $y = \frac{5}{x}$, ahol $x > 0$!



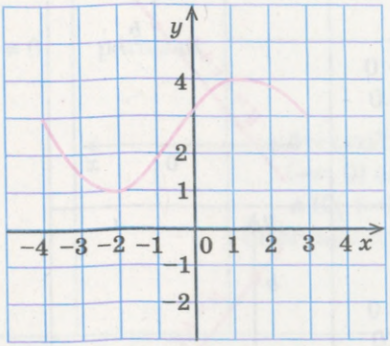
a



b



c



d

26. ábra

9*. Bizonyítsd be, hogy az $y = x^2$ függvény a $[0; +\infty)$ intervallumon növekvő, a $(-\infty; 0]$ intervallumon pedig csökkenő!

10*. Alkalmazva az 5. példában bizonyított állítást, állapítsd meg, melyik függvény növekvő és melyik fogyó:

1) $y = x^3 + x$; 2) $y = -x - x^5$; 3) $y = x + \sqrt{x}$; 4) $y = -x^3 - x^5$!

11*. Alkalmazva a 6. példában bizonyított állítást:

1) igazold, hogy az $x^3 + x = 10$ egyenletnek egyetlen, $x = 2$ gyöke van;

2) határozd meg a $\sqrt{x} + x = 6$ egyenlet gyökét, és bizonyítsd be, hogy az egyenletnek több gyöke nem létezik!

12. Igazold, hogy az adott függvények párosak:

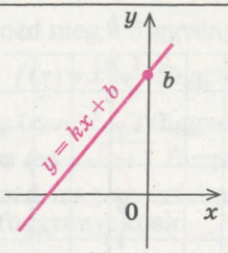
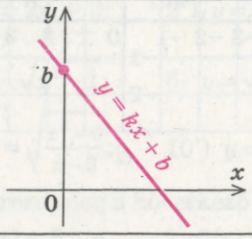
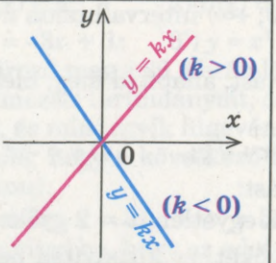
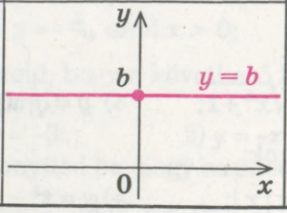
1) $y = x^6$; 2) $y = \frac{1}{x^2} + 1$; 3) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; 4) $y = \sqrt{|x| + x^4}$!

13. Igazold, hogy az adott függvények páratlanok:

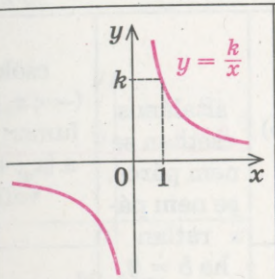
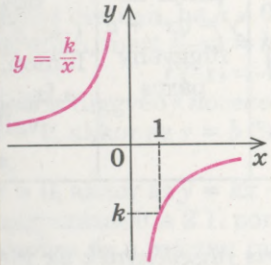
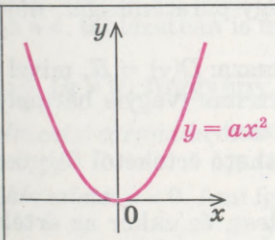
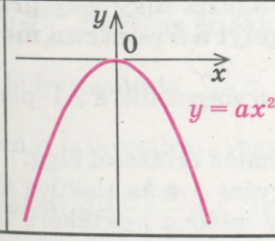
1) $y = x^5$; 2) $y = -\frac{1}{x^3}$; 3) $y = x\,|x|$; 4) $y = x^3 - x$!

2.2. AZ ALAPFÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI ÉS GRAFIKONJAI

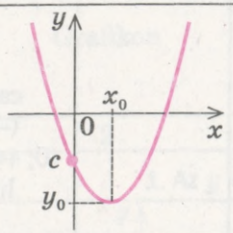
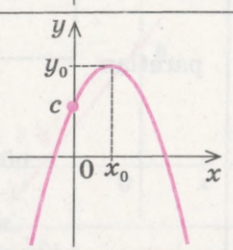
4. táblázat

Az együtthatókra vonatkozó feltételek	Grafikon	Tulajdonságai			
		$D(y)$	$E(y)$	Párosság és páratlanság	Növekedés és csökkenés
1	2	3	4	5	6
1. Az $y = kx + b$ lineáris függvény					
$k > 0$ $b \neq 0$		$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	se nem páros, se nem páratlan	növekvő
$k < 0$ $b \neq 0$					csökkenő
$b = 0$ $y = kx$				páratlan	ha $k > 0$, akkor növekszik ha $k < 0$, akkor csökken
$k = 0$ $y = b$			b	páros	állandó

A 4. táblázat folytatása

1	2	3	4	5	6
2. Fordított arányosság, az $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ függvény					
$k > 0$		$x \neq 0$	$y \neq 0$	páratlan	csökken a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$ intervallumokon
$k < 0$					növekszik a $(-\infty; 0)$ és a $(0; +\infty)$ intervallumokon
3. Az $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ függvény					
$a > 0$		$\boldsymbol{R}$	$[0; +\infty)$	páros	csökken a $(-\infty; 0]$ és növekszik $(0; \infty]$ intervallumokon
$a < 0$			$(-\infty; 0]$		növekszik a $(-\infty; 0]$ és csökken a $(0; +\infty]$ intervallumokon

A 4. táblázat folytatása

1	2	3	4	5	6
4. Az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény $\left(a \neq 0, x_0 = -\frac{b}{2a}\right)$					
$a > 0$		$\boldsymbol{R}$	$[y_0; +\infty)$	általános esetben se nem páros, se nem páratlan ha $b = 0$, akkor az $y = ax^2 + c$ függvény páros	csökkenő a $(-\infty; x_0]$ intervallumon, növekvő a $[x_0; +\infty)$ intervallumon
$a < 0$			$(-\infty; y_0]$		növekvő a $(-\infty; x_0]$ intervallumon, csökkenő a $[x_0; +\infty)$ intervallumon

Magyarázat és indoklás

1. Az $y = kx + b$ lineáris függvény. *Lineáris függvénynek* az $y = kx + b$ alakú függvényt nevezzük, melyben a k és b valamilyen számok.

Megvizsgáljuk ennek a függvénynek legfontosabb tulajdonságait: értelmezési tartományát, értékkészletét, párosságát vagy páratlanságát, növekedését és fogyását.

Értelmezési tartománya a valós számok halmaza: $D(y) = \boldsymbol{R}$, mivel a $kx + b$ kifejezésnek, minden valós szám esetén van értelme (vagyis bármely valós x érték esetén kiszámolható a $kx + b$ kifejezés értéke).

A lineáris függvény *értékkészlete* a k együttható értékétől függően különböző lehet.

Ha $k = 0$, akkor a függvény $y = b$ alakú lesz, és ekkor az értékkészlete egy b számból áll. Ebben az esetben **az $y = b$ lineáris függvény grafikonja párhuzamos az Ox tengellyel, és az Oy tengelyt a b pontban metszi** (27. ábra).

Ha $k \neq 0$, ekkor $E(y) = \boldsymbol{R}$ (ennek az esetnek a vizsgálatát a 2.1. pont 3. példájában már elvégeztük).

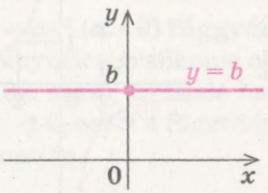
A lineáris függvény *paritása* a b és k együtthatók értékétől függ.

Ha $b = 0$ és $k \neq 0$, akkor az $y = kx + b$ függvény $y = kx$ alakúvá alakul át, amely páratlan, mert az értelmezési tartomány minden x értékére teljesül a következő egyenlőség:

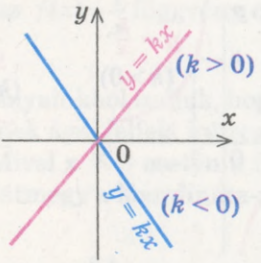
$$f(-x) = k(-x) = -kx = -f(x).$$

Tehát az $y = kx$ függvény (28. ábra) szimmetrikus az O pontra nézve.

Ha $k = 0$, akkor az $y = b$ függvényt kapjuk, amely páros lesz, mert az értelmezési tartomány minden x értékére teljesül az $f(-x) = b = f(x)$ egyenlőség. Vagyis az $y = b$ függvény szimmetrikus az Oy tengelyre (27. ábra).



27. ábra



28. ábra

Általános esetben, ha $k \neq 0$ és $b \neq 0$, az $y = kx + b$ függvény se nem páros, se nem páratlan, mert $f(-x) = k(-x) + b = -kx + b \neq f(x)$ és

$$f(-x) = -kx + b = -(kx - b) \neq -f(x).$$

A lineáris függvény *növekedése* és *fogyása* a k együttható értékétől függ.

Ha $k = 0$, akkor az $y = b$ függvényt kapjuk, amelyet konstans függvénynek nevezünk.

Ha $k > 0$, akkor az $y = kx + b$ függvény növekvő, ha $k < 0$, akkor csökkenő (ennek magyarázatát a 2.1. pont 4. példájának megoldásakor vizsgáltuk).

Az algebra és a mértan tanulmányozása során már bemutattuk, hogy **az $y = kx + b$ függvény grafikonja mindig egy egyenes.**

Mivel az $x = 0$ esetén a függvény $y = b$ értéket vesz fel, ebből az következik, hogy *ez az egyenes az Oy tengelyt mindig a b pontban metszi*. A lineáris függvény grafikonja a 4. táblázatban is megtalálható.

2. Az $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ függvény. Ez *fordított arányosságot* kifejező függvény.

Értelmezési tartománya: $x \neq 0$. Ami így is felírható:

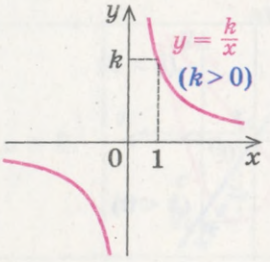
$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Értékkészlete: $y \neq 0$. Ami így is felírható:

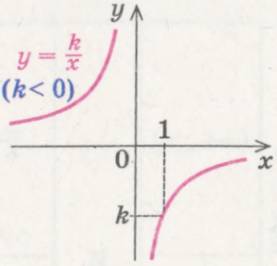
$$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Az $y = \frac{k}{x}$ függvény értékkészletének meghatározásához végezzük el a következő helyettesítést: $\frac{k}{x} = a$. Ebből az egyenlőségből azt kapjuk, hogy $x = \frac{k}{a}$ bármilyen $a \neq 0$ esetben. Vagyis bármely $a \neq 0$ esetén létezik egy olyan $x = \frac{k}{a}$ érték, melyre $y = \frac{k}{x} = \frac{k}{\frac{k}{a}} = a$. Tehát a 0 kivételével y felvesz minden valós számértéket.

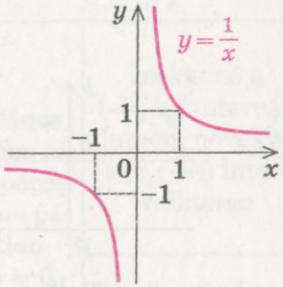
A *függvény páratlan*, mert értelmezési tartománya az O pontra szimmetrikus halmaz és $f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-f(x)$. Tehát grafikonja szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára (29. és 30. ábra).



29. ábra



30. ábra



31. ábra

A függvény *növekedése és fogyása* a k együttható előjelétől függ.

Ha $x_2 > x_1$ (vagyis $x_2 - x_1 > 0$), akkor az $f(x_2)$ és az $f(x_1)$ összehasonlításához megvizsgáljuk a különbségüket:

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{k}{x_2}-\frac{k}{x_1}=\frac{kx_1-kx_2}{x_1x_2}=\frac{-k(x_2-x_1)}{x_1x_2}. \qquad (1)$$

A $(0; +\infty)$ intervallumon az $x_1 > 0$ és az $x_2 > 0$, tehát az $x_1 x_2 > 0$. A $(-\infty; 0)$ intervallumon az $x_1 < 0$ és az $x_2 < 0$, tehát az $x_1 x_2 > 0$.

Figyelembe véve, hogy $x_2 - x_1 > 0$ a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$ intervallumokon, valamint $k > 0$ esetén az (1) egyenlőségből azt kapjuk, hogy $f(x_2) - f(x_1) < 0$, $k < 0$ esetén pedig $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Vizsgáljuk a $k > 0$ esetet. Ha $x_2 > x_1$ a $(-\infty; 0)$, illetve a $(0; +\infty)$ intervallumokon, akkor $f(x_2) < f(x_1)$, tehát a függvény mindegyik intervallumon csökkeni fog.

Vizsgáljuk a $k < 0$ esetet. Ha $x_2 > x_1$ a $(-\infty; 0)$ és a $(0; +\infty)$ intervallumokon, ekkor $f(x_2) > f(x_1)$, tehát a függvény mindegyik intervallumon növekedni fog. ○

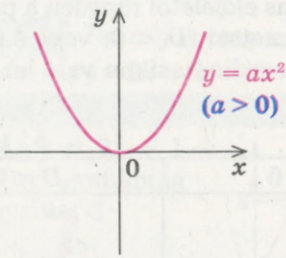
Algebra tanulmányainkból tudjuk, hogy az $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ függvény grafikonját *hiperbolának* nevezzük (amely két ágból áll). Ha $k > 0$, akkor a hiperbola ágai az I. és a III. koordináta-negyedben helyezkednek el, ha $k < 0$, akkor a hiperbola ágai a II. és a IV. koordináta-negyedben (29. és 30. ábra).

Megjegyzés. Az $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ függvény növekedésének vagy fogyásának elemezésénél figyelembe kell venni, hogy például az $y=\frac{1}{x}$ függvény (31. ábra) a $(-\infty; 0)$, illetve a $(0; +\infty)$ intervallumokon csökkenő, de az egész értelmezési tartományán $(x \neq 0)$ se nem csökkenő, se nem növekvő. Valóban, ha $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$, akkor $x_2 > x_1$, de $f(x_2) = f(1) = 1$ és $f(x_1) = f(-1) = -1$, vagyis az argumen-

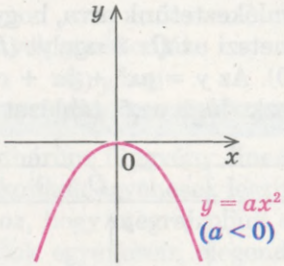
tum nagyobb értékének nem fog kisebb függvényérték megfelelni, és ebből következik, hogy az $f(x)=\frac{1}{x}$ függvény az egész értelmezési tartományán nem csökkenő.

Következésképpen nem mondhatjuk, hogy az $f(x)=\frac{1}{x}$ függvény csökkenő az $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. Az $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ függvény. Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy ennek a függvénynek a grafikonja olyan *parabola*, melynek ágai felfelé irányulnak, ha $a > 0$ (32. ábra), és lefelé ha $a < 0$ (33. ábra). Mivel $x = 0$ esetén a függvény értéke $y = 0$, ezért a függvény grafikonja mindig átmegy a koordináta-rendszer kezdőpontján.



32. ábra



33. ábra

A függvény értelmezési tartománya: $x \in \boldsymbol{R}$, mert az $y = ax^2$ értéke bármely x értéknél kiszámítható.

A függvény páros, mert $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$. Tehát a grafikonja szimmetrikus az Oy tengelyre.

A függvény többi tulajdonságát megfogalmazhatjuk az $y = ax^2$ függvény grafikonja alapján (31. ábra). E tulajdonságok visszavezethetők az $y = x^2$ függvény tulajdonságaira és a geometriai transzformációk alkalmazására, amelyeket a 2.3. pontban részletesen fogunk tárgyalni.

Értékkészlet. Ha $a > 0$, akkor a grafikon áthalad a koordináta-rendszer kezdőpontján, a többi pontja pedig az Ox tengely fölött helyezkedik el. Ha az x értéke a plusz végtelenhez tart, akkor az y érték is a plusz végtelenhez tart $(+\infty)$, vagyis $y \geqslant 0$, tehát $E(y) = [0; +\infty)$.

Hasonlóképpen, ha $a < 0$, akkor a grafikon áthalad a koordináta-rendszer kezdőpontján, a többi pontja pedig az Ox tengely alatt helyezkedik el. Ha az x értéke a plusz végtelenhez tart, akkor az y érték a mínusz végtelenhez tart $(-\infty)$, vagyis $y \leqslant 0$, tehát $E(y) = (-\infty; 0]$.

Monotonitás (növekedés és fogyás). Ha $a > 0$, akkor a $(-\infty; 0]$ intervallumon a függvény csökkenő, a $[0; +\infty)$ intervallumon pedig növekvő.

Ha $a < 0$, akkor a $(-\infty; 0]$ intervallumon a függvény növekvő, a $[0; +\infty)$ intervallumon pedig csökkenő.

A megfelelő grafikonjaik a 4. táblázatban szintén megtalálhatók.

4. Az $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ másodfokú függvény. A 9. osztályos algebra tanulmányainkból már ismerjük az $y = ax^2 + bx + c$ *másodfokú* függvényt, ahol a, b, c valós számok, emellett $a \neq 0$. A másodfokú függvény grafikonja olyan parabola, melynek ágai felfelé irányulnak, ha $a > 0$, és lefelé, ha $a < 0$.

A parabola csúcsának abszcisszája az $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Ennek az állításnak az igazolásához elegendő a másodfokú kifejezés teljes négyzetté alakítása:

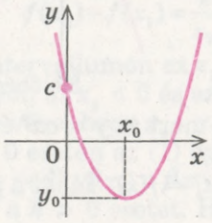
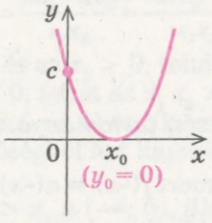
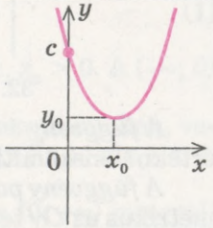
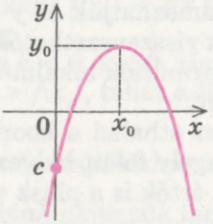
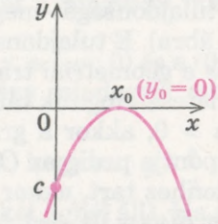
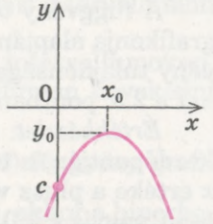
$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ azaz}$$

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + y_0, \text{ ahol } y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$$

(ahol $D = b^2 - 4ac$ az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom diszkriminánsa).

Emlékeztetünk arra, hogy a D diszkrimináns előjelétől függően a parabola vagy metszi az Ox tengelyt $(D > 0)$ vagy nem metszi $(D < 0)$ vagy érinti azt $(D = 0)$. Az $y = ax^2 + bx + c$ függvénygörbe koordinátasíkon való lehetséges elhelyezkedését az 5. táblázat tartalmazza.

5. táblázat

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Az $y = ax^2 + bx + c$ függvényt jellemezhetjük grafikonjának ismert tulajdonságai alapján.

Értelmezési tartománya: $D(y) = \boldsymbol{R}$, mert az $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ értéke az x bármely értékére meghatározható.

Értékkészlete: Ha $a > 0$, akkor a függvény értékeire igaz az $y \geqslant y_0$ egyenlőtlenség, vagyis $E(y) = [y_0; +\infty)$.

Ha $a < 0$, akkor a függvény értékeire igaz az $y \leqslant y_0$ egyenlőtlenség, vagyis $E(y) = (-\infty; y_0]$.

Paritás (párosság és páratlanság). Ha $b = 0$, akkor egy páros másodfokú függvényt kapunk $y = \varphi(x) = ax^2 + c$. Valóban, $\varphi(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = \varphi(x)$.

Általános esetben (ha $b \neq 0$), az $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ függvény se nem páros, se nem páratlan, mert $f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c \neq f(x)$ (és nem egyenlő $-f(x)$-szel sem).

Monotonitás (növekedés és csökkenés). Ha $a > 0$, akkor a $(-\infty; x_0]$ intervallumon a függvény csökkenő, az $[x_0; +\infty)$ intervallumon pedig növekvő.

Ha $a < 0$, akkor a $(-\infty; x_0]$ intervallumon a függvény növekvő, az $[x_0; +\infty)$ intervallumon pedig csökkenő.

Mivel $x = 0$ esetén $y = c$, ezért *a grafikon a c pontban metszi az Oy tengelyt.*

A $D > 0$ esetén a megfelelő grafikonok a 4. táblázatban láthatók.

Mintafeladatok megoldása

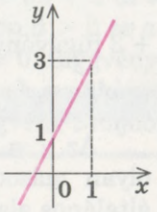
1. példa. Rajzoljuk meg a következő függvények grafikonját:

1) $y = 2x + 1$; 2) $y = -3x - 1$; 3) $y = 4$!

Megoldás

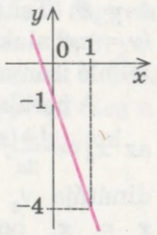
1) ▶ Az $y = 2x + 1$ függvény grafikonja egy egyenes. ◁

x	0	1
y	1	3



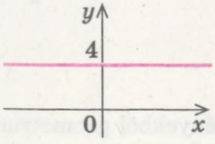
2) ▶ Az $y = -3x - 1$ függvény grafikonja egy egyenes. ◁

x	0	1
y	−1	−4



3) ▶ Az $y = 4$ függvény grafikonja egy olyan egyenes, amely párhuzamos az Ox tengellyel, és a 4 koordinátájú pontban metszi az Oy tengelyt. ◁

x	0	1
y	4	4



Magyarázat

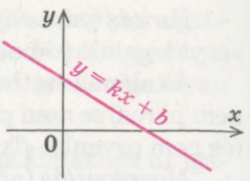
Mindhárom függvény lineáris, tehát grafikonjaik egyenesek lesznek.

Ahhoz, hogy megrajzoljuk az 1. és 2. feladatok egyeneseit, elegendő meghatározni két-két pontját. Vehetjük például az $x = 0$ és az $x = 1$ értékeket, és meghatározzuk a nekik megfelelő y értékeket. Ezeket a számításokat célszerű táblázatban elvégezni:

x	0	1
y		

A 3. feladatban a lineáris függvény egy különleges esetét vizsgáljuk meg $(y = b)$. Grafikonjának a megrajzolásához célszerű emlékezni arra, hogy az $y = 4$ egy olyan egyenes, amely párhuzamos az Ox tengellyel (az x bármely értékére az y értéke mindig 4).

2*. példa. Az $y = kx + b$ függvény grafikonja alapján állapítsuk meg a k és b előjelét!



Megoldás

▶ Ha $x = 0$, akkor a rajz alapján $y = b > 0$. Mivel a rajzon egy fogyó függvény látható, ezért $k < 0$. ◁

Felelet: $b > 0, k < 0$.

Magyarázat

Az $y = kx + b$ függvény grafikonja egy olyan egyenes, amely az Oy tengelyt a b pontban metszi. A rajzon ez a pont a nulla felett van, ezért $b > 0$.

Az $y = kx + b$ lineáris függvény $k > 0$ esetén növekvő, $k < 0$ esetén pedig csökkenő. A rajzon egy csökkenő függvény látható, tehát $k < 0$.

3. példa. Ábrázoljuk az $y = x^2 - 4x + 3$ függvény[1] grafikonját!

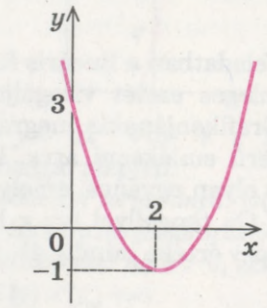
Megoldás

▶ Az adott függvény grafikonja egy olyan parabola (az $y = x^2$ alakú), melynek ágai felfelé néznek.

A csúcsának abszcisszája:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2.$$

Ekkor $y_0 = y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$ és a grafikonjának képe:



◁

Magyarázat

Az $y = x^2 - 4x + 3$ függvény egy olyan másodfokú függvény, amelynek általános alakja $y = ax^2 + bx + c$, ahol $a \neq 0$. Tehát a grafikonja egy olyan ($y = ax^2$ alakú) parabola, amelynek ágai felfelé irányulnak ($a = 1 > 0$).

A parabola csúcsának abszcisszáját az $x_0 = -\frac{b}{2a}$, képlettel számítjuk ki, ordinátája y_0 pedig az adott függvény $x = x_0$ pontbeli értéke, vagyis az $y_0 = y(x_0)$.

Ha pontosítani akarjuk a függvény grafikonját, akkor néhány más pontban is meghatározzuk a koordinátáit. Ha például $x = 0$, akkor $y = c = 3$.

[1] Az ilyen függvények $y = x^2$ alakú függvényekből geometriai transzformációkkal történő előállításával a 2.3. pontban foglalkozunk.

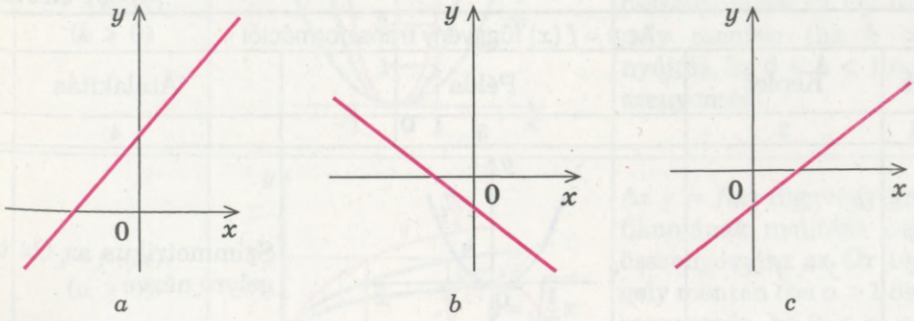
Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk lineáris függvénynek? Sorold fel a lineáris függvények tulajdonságait! Milyen a lineáris függvény grafikonja? Mondj példákat a lineáris függvényekre és a grafikonjaikra!
2. Milyen az $y = \frac{k}{x}$ függvény ($k \neq 0$) grafikonja? Hozzál fel példákat az $y = \frac{k}{x}$ függvényekre, $k > 0$ és $k < 0$ esetén! A függvénygörbe alapján sorold fel a függvény tulajdonságait $k > 0$ és $k < 0$ esetén! Bizonyítsd be, hogy az $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) függvény páratlan!
3. Vajon milyen görbe lehet az $y = ax^2$ ($a \neq 0$) függvény grafikonja? Hogyan helyezkedik el ez a grafikon $a > 0$ és $a < 0$ esetén? Mondj példákat az $y = ax^2$ függvény grafikonjára, ha $a > 0$ és $a < 0$! A grafikon alapján határozd meg a függvény tulajdonságait $a > 0$ és $a < 0$ esetén!
   Bizonyítsd be az $y = ax^2$ ($a \neq 0$) függvény párosságát!
4. Milyen az $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) függvény grafikonja? Hogyan helyezkedik el ez a grafikon $a > 0$ és $a < 0$ esetén? Hogyan határozható meg az $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) függvénygrafikon csúcsának abszcisszája? Hozz fel példákat a függvények grafikonjára, ha $a > 0$ és $a < 0$! A grafikon alapján határozd meg a függvény tulajdonságait $a > 0$ és $a < 0$ esetén!

Gyakorlatok

1°. Rajzold meg a következő függvények grafikonjait:
1) $y = 3x - 2$; 2) $y = -x + 4$; 3) $y = -2$; 4) $y = -5x$; 5) $y = 0$; 6) $y = 4x$!
Vannak-e köztük párosak és páratlanok? Válaszodat indokold meg!

2°. Minden esetben állapítsd meg a k és b előjeleit az $y = kx + b$ függvények grafikonjai (34. ábra) alapján!



34. ábra

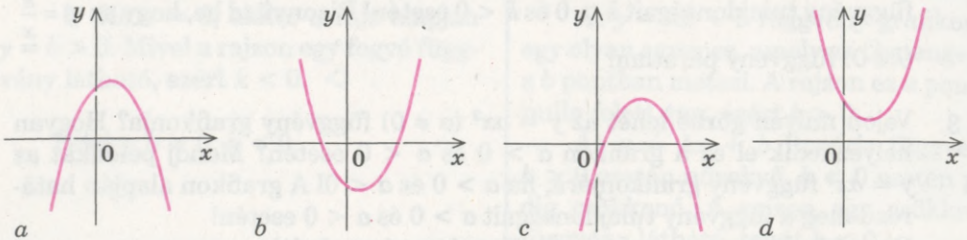
Rajzold meg a **(3–5.)** függvények grafikonjait!

3°. 1) $y=-\frac{2}{x}$; 2) $y=\frac{3}{x}$; 3) $y=-\frac{1}{x}$; 4) $y=\frac{5}{x}$.

4°. 1) $y=-2x^2$; 2) $y=3x^2$; 3) $y=-3x^2$; 4) $y=5x^2$.

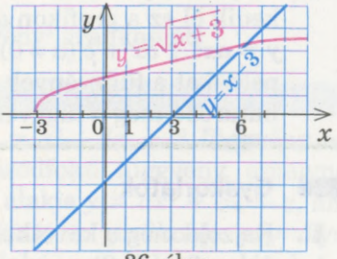
5. 1) $y=x^2-6x+7$; 2) $y=-x^2+4x+2$;
3) $y=2x^2-2x+1$; 4) $y=-3x^2+6x$.

6*. Az $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ képlettel megadott függvények grafikonjai (35. ábra) alapján határozd meg az a, b és c előjelét!



35. ábra

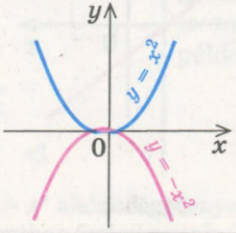
7*. A rajzon (36. ábra) az $y=\sqrt{x+3}$ és az $y=x-3$ grafikonja látható. Határozd meg azt az intervallumot, amelyen teljesül a $\sqrt{x+3}\leqslant x-3$ egyenlőtlenség!



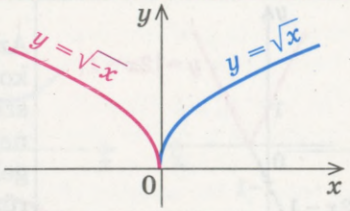
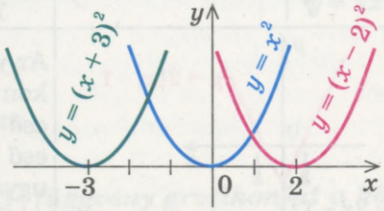
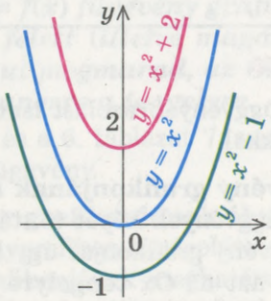
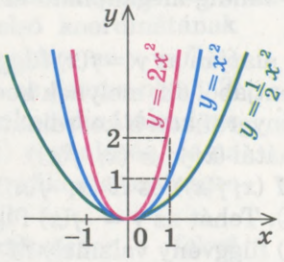
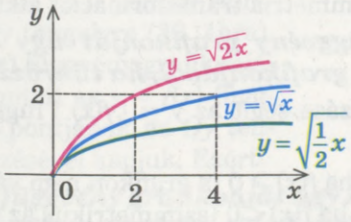
36. ábra

2.3. Függvényábrázolás ismert alapfüggvények képéből geometriai transzformációkkal

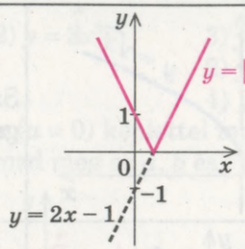
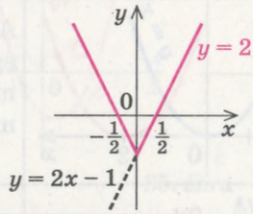
6. táblázat

Az $y=f(x)$ függvény transzformációi			
№	Képlet	Példa	Átalakítás
1	2	3	4
1	$y=-f(x)$		Szimmetrikus az Ox tengelyre nézve

A 6. táblázat folytatása

1	2	3	4
2	$y = f(-x)$		Szimmetrikus az Oy tengelyre nézve
3	$y = f(x - a)$		Az $y = f(x)$ függvény a egységgel való párhuzamos eltolása az Ox tengely mentén
4	$y = f(x) + c$		Az $y = f(x)$ függvény c egységgel való párhuzamos eltolása az Oy tengely mentén
5	$y = kf(x)$ $(k > 0)$		Az $y = f(x)$ függvény grafikonjának nyújtása vagy összenyomása az Oy tengely mentén (ha $k > 1$ nyújtás, ha $0 < k < 1$ összenyomás)
6	$y = f(\alpha x)$ $(\alpha > 0)$		Az $y = f(x)$ függvény grafikonjának nyújtása vagy összenyomása az Ox tengely mentén (ha $\alpha > 1$ összenyomás, ha $0 < \alpha < 1$ nyújtás)

A 6. táblázat folytatása

1	2	3	4
7	$y = \lvert f(x) \rvert$		Az $y = f(x)$ függvénygrafikon Ox tengely feletti része (és a tengelyen lévő is) nem változik, az Ox tengely alatti rész pedig tükröződik az Ox tengelyre
8	$y = f(\lvert x \rvert)$		Az $y = f(x)$ függvénygrafikon Oy tengelytől jobbra eső része (és a tengelyre eső is) nem változik, és ugyanez a rész tükröződik az Oy tengelyre

Mintafeladatok megoldása

Bemutatjuk példákon a függvényábrázolást ismert alapfüggvények képéből geometriai transzformációkkal.

1. példa. Az $y = -f(x)$ függvény grafikonjának ábrázolása. Összehasonlítjuk az $y = x^2$ és $y = -x^2$ függvények képét (6. táblázat 1. ábra). Szemmel látható, hogy az $y = -x^2$ függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg az $y = x^2$ függvényéből, ha tükrözzük azt az Ox tengelyre. Bebizonyítjuk, hogy az $y = -f(x)$ függvény grafikonja mindig megkapható az $y = f(x)$ függvényéből az Ox tengelyre való tükrözéssel.

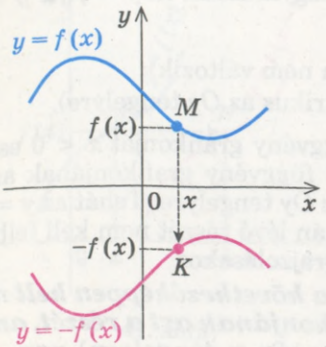
● Valóban, a meghatározás alapján az $y = f(x)$ függvény grafikonja a koordinátasík összes olyan M pontjából áll, melynek koordinátái $(x; y) = (x; f(x))$. Akkor az $y = -f(x)$ függvénygrafikon a koordinátasík összes olyan K pontjából áll, melynek koordinátái $(x; y) = (x; -f(x))$.

A koordinátasíkon lévő M $(x; f(x))$ és K $(x; -f(x))$ pontok szimmetrikusak az Ox tengelyre (37. ábra). Tehát az $y = -f(x)$ függvény minden K pontját megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény valamely M pontjára az Ox tengelyre való tükrözést vagy szimmetria transzformációt alkalmazunk.

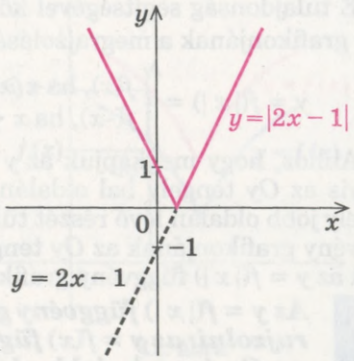
Az $y = -f(x)$ függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg az $y = f(x)$ függvény grafikonjából, ha tükrözzük Ox tengelyre. ○

E tulajdonság alkalmazása segít az $y = \lvert f(x) \rvert$ függvény grafikonjának a megrajzolásában.

$$y = \lvert f(x) \rvert = \begin{cases} f(x), \text{ ha } f(x) \geqslant 0 \text{ (a grafikon nem változik);} \\ -f(x), \text{ ha } f(x) < 0 \text{ (szimmetrikus az } Ox \text{ tengelyre).} \end{cases}$$



37. ábra



38. ábra

Tehát,

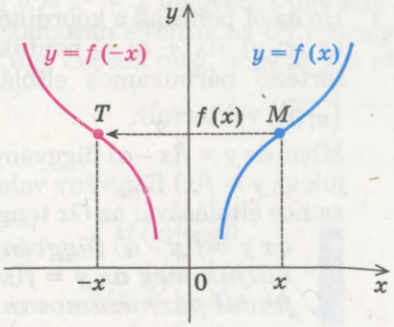
az $y = |f(x)|$ függvény grafikonját a következőképpen kaphatjuk meg: az $y = f(x)$ függvény grafikonjának az a része, amely az Ox tengely felett (illetve magán a tengelyen) helyezkedik el, változatlanul megmarad, az Ox tengely alatti részét pedig tükrözzük ugyanerre a tengelyre.

Például a 38. ábrán és a 6. táblázat 7. sorában e szabály alkalmazásával készült az $y = |2x - 1|$ függvény.

2. Az $y = f(-x)$ függvény grafikonjának ábrázolása.

Az $y = f(-x)$ függvénygrafikon ábrázolása során figyelembe kell venni azt, hogy a függvény grafikonjának meghatározásában a grafikon pontjának első koordinátáját (abszcisszáját) az értelmezési tartományból szabadon választhatjuk. Ha első koordinátának a $(-x)$-et választjuk, akkor az $y = f(-x)$ függvény grafikonja az összes olyan T pontból áll, melynek koordinátáira igaz a $(-x; y) = (-x; f(x))$ egyenlőség, és az $y = f(x)$ függvény grafikonja az összes $M(x; f(x))$ pontból áll.

A koordináta-rendszerben fekvő $M(x; f(x))$ és $T(-x; f(x))$ pontok szimmetrikusak az Oy tengelyre (39. ábra). Vagyis az $y = f(-x)$ függvény grafikonjának minden T pontját az $y = f(x)$ függvény bármely M pontjának az Oy tengelyre való tükrözésével kapjuk. Ezért



39. ábra

az $y = f(-x)$ függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg az $y = f(x)$ függvény grafikonjából, ha tükrözzük az Oy tengelyre.

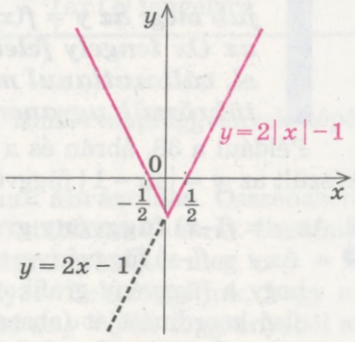
E tulajdonság segítségével könnyen megmagyarázzuk az $y = f(|x|)$ függvény grafikonjának a megrajzolását.

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), \text{ ha } x \geqslant 0 \text{ (a grafikon nem változik);} \\ f(-x), \text{ ha } x < 0 \text{ (szimmetrikus az } Oy \text{ tengelyre).} \end{cases}$$

Ahhoz, hogy megkapjuk az $y = f(|x|)$ függvény grafikonját $x < 0$ esetén (vagyis az Oy tengely bal oldalán) az $y = f(x)$ függvény grafikonjának az Oy tengely jobb oldalán lévő részét tükrözni kell az Oy tengelyre. Tehát az $y = f(x)$ függvény grafikonjának az Oy tengely bal oldalán lévő részét nem kell felhasználni az $y = f(|x|)$ függvény grafikonjának megrajzolásakor.

Az $y = f(|x|)$ függvény grafikonját a következőképpen kell megrajzolni: az $y = f(x)$ függvény grafikonjának azt a részét, amely az Oy tengely jobb oldalán (és magán a tengelyen) van, változatlanul hagyjuk, majd ugyanezt a részét tükrözzük az Oy tengelyre.

Például a 40. ábra és a 6. táblázat 8. sorában lévő $y = 2|x| - 1$ függvény grafikonja e szabály alkalmazásával készült.



40. ábra

3. Az $y = f(x - a)$ függvény grafikonjának ábrázolása.

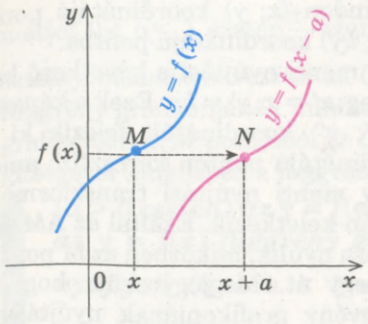
Az $y = f(x - a)$ függvény grafikonjának megrajzolása során az N pont abszcisszájának (első koordinátájának) az $x + a$-t választjuk. Ekkor az $y = f(x - a)$ függvény grafikonja a koordinátasík összes olyan N pontjából áll, melynek koordinátái $(x + a; y) = (x + a; f(x + a - a)) = (x + a; f(x))$, az $y = f(x)$ függvény grafikonja pedig minden $M(x; f(x))$ pontból tevődik össze.

Ha az M pontnak a koordinátái $(x; y)$, az N pontnak pedig $(x + a; y)$, akkor az $(x; y) \to (x + a; y)$ pontok transzformációja az M pontnak a egységgel történő párhuzamos eltolását jelenti az Ox tengely mentén (vagyis $(\overline{a; 0})$ vektorral).

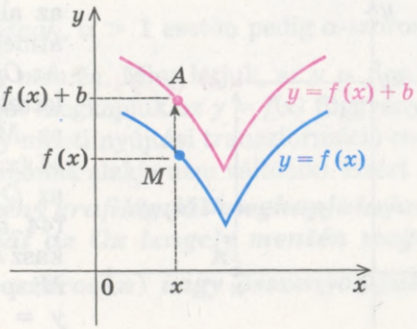
Mivel az $y = f(x - a)$ függvény grafikonjának minden N pontját megkaphatjuk az $y = f(x)$ függvény valamely M pontjának a egységgel történő párhuzamos eltolásával az Ox tengely mentén (41. ábra), ezért

az $y = f(x - a)$ függvény grafikonját párhuzamos eltolással kaphatjuk meg az $y = f(x)$ függvény grafikonjából, azaz, ha a grafikont párhuzamosan eltoljuk Ox tengely mentén a egységgel. ○

Például a 6. táblázat 3. sorában az $y = (x - 2)^2$ függvénygrafikont úgy kaptuk meg, hogy az $y = x^2$ függvény képét párhuzamosan eltoltuk az Ox tengely mentén $+2$ egységgel; az $y = (x + 3)^2$ függvénygrafikont úgy kaptuk meg, hogy az $y = x^2$ függvény képét párhuzamosan eltoltuk az Ox tengely mentén -3 egységgel.



41. ábra



42. ábra

4. Az $y = f(x) + b$ függvény grafikonjának ábrázolása.

Az $y = f(x) + b$ függvény grafikonja a koordinátasík összes olyan A pontjából áll, melyeknek koordinátái $(x; y) = (x; f(x) + b)$, az $y = f(x)$ függvény grafikonja pedig az összes $M\,(x; f(x))$ pontból.

De ha az M pontnak a koordinátái $(x; y)$, az A pontnak a koordinátái pedig $(x; y + b)$, akkor az $(x; y) \to (x; y + b)$ pontok transzformációja az M pontnak b egységgel történő párhuzamos eltolását jelenti az Oy tengely mentén (vagyis $\left(\overrightarrow{0; b}\right)$ vektorral).

Mivel az $y = f(x) + b$ függvény grafikonjának minden A pontját megkaphatjuk az $y = f(x)$ függvénygrafikon valamely M pontjának b egységgel történő párhuzamos eltolásával az Oy tengely mentén (42. ábra), ezért

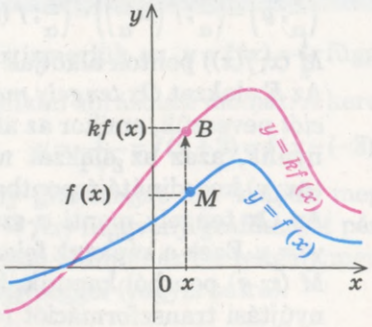
az $y = f(x) + b$ függvény grafikonját párhuzamos eltolással kaphatjuk meg az $y = f(x)$ függvény grafikonjából, azaz ha a grafikont párhuzamosan eltoljuk Oy tengely mentén b egységgel. ○

Például a 6. táblázat negyedik sorában az $y = x^2 + 2$ függvényt úgy kaptuk meg, hogy az $y = x^2$ függvény képét párhuzamosan eltoltuk az Oy tengely mentén $+2$ egységgel; az $y = x^2 - 1$ függvényt úgy kaptuk meg, hogy az $y = x^2$ függvény képét párhuzamosan eltoltuk az Oy tengely mentén -1 egységgel.

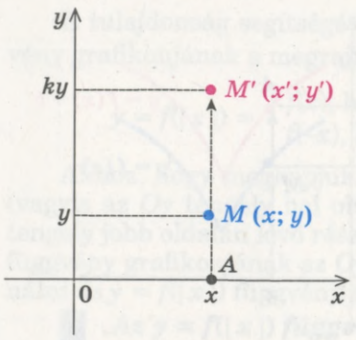
5. Az $y = kf(x)$ függvény grafikonjának ábrázolása.

Az $y = kf(x)$ $(k > 0)$ függvény grafikonját a $B\,(x; kf(x))$ koordinátájú pontok, az $y = f(x)$ függvény grafikonját pedig az $M\,(x; f(x))$ korordinátájú pontok alkotják (43. ábra).

Az F alakzat *Oy tengely menti k-szoros nyújtásának az olyan transzformációt* nevezzük, amikor az alakzat képe az Oy tengely irányában k-szeresére nyúlik, azaz



43. ábra



44. ábra

az alakzat minden $(x; y)$ koordinátájú pontja átmegy egy $(x; ky)$ koordinátájú pontba.

Az Oy tengely menti nyújtást a következő képlettel adjuk meg: $x' = x; y' = ky$. Ezek a képletek az M'pont $(x'; y')$ koordinátáit fejezik ki az M $(x; y)$ koordinátájú ponton keresztül, amely az Oy tengely menti nyújtási transzformáció (44. ábra) során keletkezik. Ezáltal az AM szakasz k-szorosára nyúlik, miközben az M pont az M' pontba megy át. Megjegyezzük, hogy az $y = f(x)$ függvény grafikonjának nyújtásáról csak a $k > 1$ esetén beszélünk. $0 < k < 1$ esetén a transzformációt az *Oy tengely menti* $\frac{1}{k}$*-szoros összenyomásnak* nevezik.

Mint látjuk, az $y = kf(x)$ függvény grafikonjának minden B pontját megkapjuk az M pontból az Oy tengely menti nyújtási transzformáció segítségével. Ennek során a grafikon általános alakja nem változik: nyúlik vagy összenyomódik az Oy tengely mentén. Ha például az $y = f(x)$ függvény grafikonja parabola volt, akkor a nyújtás vagy összenyomás után is parabola marad a grafikon alakja. Tehát,

az $y = kf(x)$ ($k > 1$ esetén) függvény grafikonját megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény grafikonját az Oy tengely mentén megnyújtjuk ($k > 1$ esetén k-szorosan) vagy összenyomjuk ($0 < k < 1$ esetén $\frac{1}{k}$-szorosan).○

6. Az $y = f(\alpha x)$ függvény grafikonjának ábrázolása.

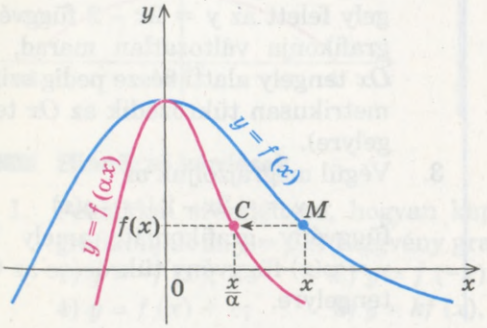
● Az $y = f(\alpha x)$ $(\alpha > 0)$ függvénygrafikon elkészítéséhez egy olyan C pontját választjuk, melynek abszcisszája $\frac{x}{\alpha}$. Ekkor az $y = f(\alpha x)$ függvény grafikonja az összes olyan C pontból fog állni, melynek koordinátái $\left(\frac{x}{\alpha}; y\right) = \left(\frac{x}{\alpha}; f\left(\alpha \frac{x}{\alpha}\right)\right) = \left(\frac{x}{\alpha}; f(x)\right)$, az $y = f(x)$ függvény grafikonját pedig az M $(x; f(x))$ pontok alkotják (45. ábra).

Az F alakzat *Ox tengely menti α-szoros nyújtásának az olyan transzformációt* nevezzük, amikor az alakzat képe az Ox tengely irányában k-szeresére nyúlik, azaz az alakzat minden $(x; y)$ koordinátájú pontja átmegy egy $(\alpha x; y)$ koordinátájú pontba.

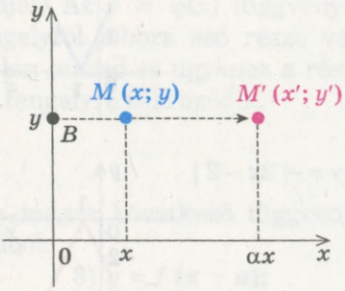
Az Ox tengely menti α-szoros nyújtási transzformáció képlete: $x' = \alpha x$; $y' = y$. Ezek a képletek fejezik ki az M' pont $(x'; y')$ koordinátáit, amelyet az M $(x; y)$ pontból kapunk, ha végrehajtjuk az Ox tengely mentén α-szoros nyújtási transzformációt (46. ábra). Ennek során a BM szakasz α-szoros nyújtása következik be, és az M pont M' pontba megy át. Ezt a transzfor-

mációt $0 < \alpha < 1$ esetén $\frac{1}{\alpha}$-szoros *nyújtásnak*, $\alpha > 1$ esetén pedig α-szoros *összenyomásnak* nevezzük *az Ox tengely mentén*. Mint látjuk, az $y = f(\alpha x)$ függvény grafikonjának minden B pontját megkapjuk az $y = f(x)$ függvény grafikonjának M pontjából az Ox tengely menti nyújtási transzformáció segítségével (miközben a függvény grafikonjának alakja nem változik). Ezért

($\alpha > 0$ esetén) az $y = f(\alpha x)$ függvény grafikonját megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény grafikonját az Ox tengely mentén megnyújtjuk ($0 < \alpha < 1$ esetén $\frac{1}{\alpha}$-szorosan) vagy összenyomjuk ($\alpha > 1$ esetén α-szorosan).



45. ábra

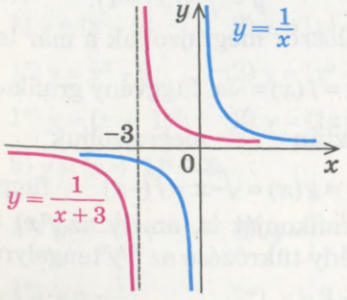


46. ábra

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Ábrázoljuk az $y = \frac{1}{x+3}$ függvény grafikonját!

Megoldás



Magyarázat

Már ismerjük az $y = f(x) = \frac{1}{x}$ függvénygrafikon ábrázolási módját. A keresett

$$y = \frac{1}{x+3} = f(x+3) = f(x-(-3))$$

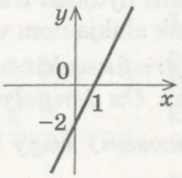
függvény grafikonját úgy kapjuk meg, ha az $y = f(x)$ függvény grafikonját párhuzamosan eltoljuk az Ox tengely mentén -3 egységgel (vagyis balra).

2. példa. Ábrázoljuk az $y = -|2x - 2|$ függvény grafikonját!

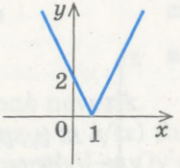
Megoldás

▶ Egymás után megrajzoljuk a következő grafikonokat:

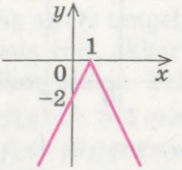
1. $y = 2x - 2$



2. $y = |2x - 2|$



3. $y = -|2x - 2|$



◁

Magyarázat

Felvázoljuk a függvényábrázolás egyes lépéseit.

1. Először megrajzoljuk a már ismert $y = f(x) = 2x - 2$ függvény grafikonját, amely egy egyenes.

2. Majd megrajzoljuk az
$$y = \varphi(x) = |2x - 2| = |f(x)|$$
függvény grafikonját (az Ox tengely felett az $y = 2x - 2$ függvény grafikonja változatlan marad, az Ox tengely alatti része pedig szimmetrikusan tükröződik az Ox tengelyre).

3. Végül megrajzoljuk az
$$y = -|2x - 2| = -\varphi(x)$$
függvény grafikonját, amely az $y = \varphi(x)$ függvény tükrözése az Ox tengelyre.

3*. példa. Ábrázoljuk az $y = \sqrt{4 - |x|}$ függvény grafikonját!

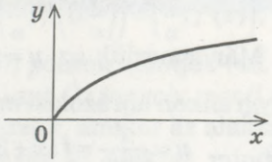
Megoldás

▶ Átírjuk az adott függvény képletét:

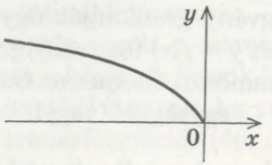
$$y = \sqrt{4 - |x|} = \sqrt{-(|x| - 4)}.$$

Egymás után megrajzoljuk a következő grafikonokat:

. $y = \sqrt{x}$



. $y = \sqrt{-x}$



Magyarázat

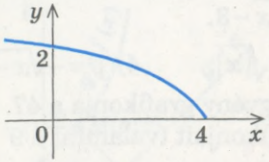
Felvázoljuk a függvényábrázolás egyes lépéseit. Ahhoz, hogy alkalmazható legyen a 6. táblázatban lévő függvénytranszformáció, a függvény gyök alatti kifejezését így írjuk fel:

$$y = \sqrt{-(|x| - 4)}.$$

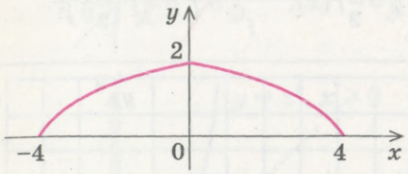
1. Először megrajzoljuk a már ismert $y = f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonját.

2. Aztán megrajzoljuk az $y = g(x) = \sqrt{-x} = f(-x)$ függvény grafikonját is, amely az $f(x)$ függvény tükrözése az Oy tengelyre.

3. $y=\sqrt{-(x-4)}$



4. $y=\sqrt{-(|x|-4)}$



3. Majd megrajzoljuk az $y=\varphi(x)=$ $=\sqrt{-(x-4)}=g(x-4)$ függvény grafikonját is (a $g(x)$ függvény Ox tengely mentén 4 egységre történő párhuzamos eltolásával).

4. Végül megrajzoljuk az $y=$ $=\sqrt{-(|x|-4)}=\varphi(|x|)=\sqrt{4-|x|}$ képlettel megadott függvény grafikonját. Az $y=\varphi(x)$ függvény Oy tengelytől jobbra eső része változatlan marad és ugyanez a rész az Oy tengelyre tükröződik.

Ellenőrző kérdések

1. Példákkal szemléltesd, hogyan kaphatjuk meg a következő függvények grafikonjait az $y=f(x)$ függvény grafikonjából:
   1) $y=-f(x)$; 2) $y=f(-x)$; 3) $y=f(x-a)$;
   4) $y=f(x)+c$; 5) $y=kf(x)$, ahol $k>0$; 6) $y=f(\alpha x)$, ahol $\alpha>0$;
   7) $y=|f(x)|$; 8) $y=f(|x|)$!
2. Magyarázd meg azokat a geometriai transzformációkat, melyek segítségével az $y=f(x)$ függvény grafikonjából megkaphatjuk a fentebb felsorolt függvényeket!

Gyakorlatok

Ábrázold a következő függvények, illetve hozzárendelések grafikonjait (1–7):

1. 1) $y=|x-5|$; 2) $y=|x|-5$; 3) $y=||x|-5|$; 4*) $|y|=x-5$.

2. 1°) $y=x^2-9$; 2) $y=|x^2-9|$; 3) $y=|x^2|-9$; 4*) $|y|=x^2-9$.

3. 1°) $y=(x+1)^2$; 2) $y=(|x|+1)^2$;
3) $y=(x+1)^2-3$; 4) $y=|(x+1)^2-3|$.

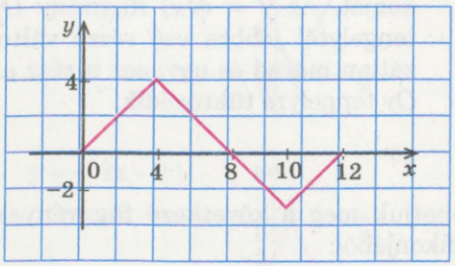
4. 1°) $y=\frac{1}{x+2}$; 2) $y=\left|\frac{1}{x+2}\right|$; 3) $y=\frac{1}{|x|+2}$; 4*) $|y|=\frac{1}{x+2}$.

5. 1°) $y=-\frac{2}{x}$; 2°) $y=3-\frac{2}{x}$; 3) $y=-\frac{2}{x-1}$; 4) $y=-\frac{2}{|x|}$.

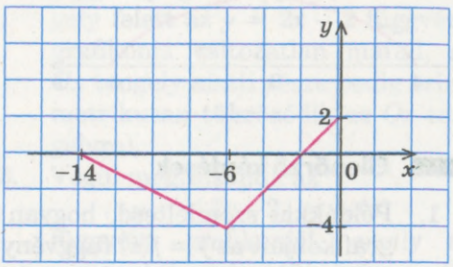
6. 1°) $y=\sqrt{x-3}$; 2°) $y=\sqrt{x}-3$; 3) $y=\sqrt{|x|-3}$; 4) $y=|\sqrt{x}-3|$;
5*) $y=|\sqrt{|x|}-3|$; 6*) $|y|=\sqrt{x-3}$; 7*) $|y|=\sqrt{x}-3$.

7. 1°) $y=-\sqrt{x}$; 2°) $y=-\sqrt{x}+4$; 3) $y=-\sqrt{|x|}$; 4) $y=-\sqrt{x-1}$.

8. A [0; 12] intervallumon megadott $y = f(x)$ függvény grafikonja a 47. ábrán látható. Ábrázold a következő függvények grafikonjait (valamint a 9* és 10* hozzárendeléseket):
1) $y=-f(x)$; 2) $y=f(-x)$; 3) $y=|f(x)|$; 4) $y=f(|x|)$;
5*) $y=2f(x)$; 6*) $y=f(2x)$; 7*) $y=\frac{1}{2}f(x)$; 8*) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$;
9*) $|y|=f(x)$; 10*) $|y|=f(|x|)$.



47. ábra



48. ábra

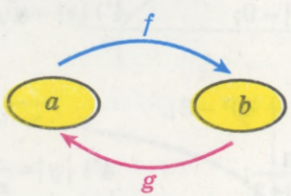
9. Végezd el a 8. gyakorlatot a [−14; 0] intervallumon megadott $y = f(x)$ függvényre is, amelynek grafikonját a 48. ábra szemlélteti!

2.4. Inverz függvény

7. táblázat

1. Az inverz függvény fogalma

Ha az $y = f(x)$ függvény mindegyik értékét az értelmezési tartomány egyetlen pontjában veszi fel (kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés), akkor megadható egy olyan $y = g(x)$ függvény, amit az $y = f(x)$ *függvény inverzének* nevezünk:



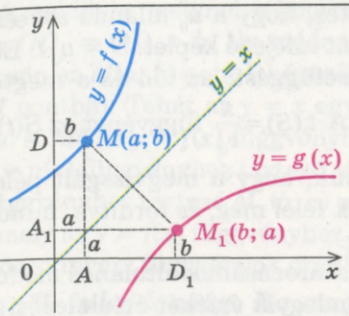
bármelyik $a \in D(f)$,
ha $f(a) = b$, akkor $g(b) = a$

$E(f) = D(g)$; $D(f) = E(g)$

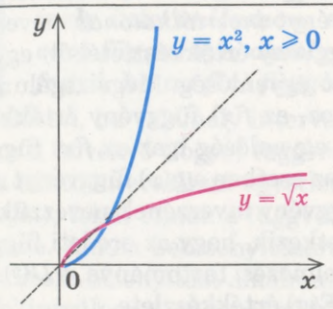
Az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények egymás inverzei

A 7. táblázat folytatása

2. Az inverz függvények tulajdonságai



1) Az eredeti és az inverz függvények grafikonjai szimmetrikusak az $y = x$ egyenesre



2) Ha az $f(x)$ függvény növekvő (csökkenő) valamely intervallumon, akkor létezik inverze ezen az intervallumon, mely növekszik, ha az $f(x)$ növekvő, és csökkenő, ha az $f(x)$ csökkenő

3. Az $y = f(x)$ függvény inverze képletének gyakorlati meghatározása

Algoritmus	Példa
1. **Állapítsuk meg, hogy az $y = f(x)$ függvény invertálható-e az egész értelmezési tartományán:** ehhez elegendő azt megállapítani, hogy az $y = f(x)$ egyenletnek egyetlen gyöke van. **Ha nem, akkor kiválasztunk az értelmezési tartományból egy olyan intervallumot, ahol létezik inverz függvény** (például, ez lehet egy olyan intervallum, amelyen az $y = f(x)$ függvény növekszik vagy csökken). 2. **Az $y = f(x)$ egyenlőségből kifejezzük az x értékét az y-on keresztül.** 3. **A kapott képletben a tradicionális jelölést alkalmazzuk: az argumentumot jelöljük x-szel, a függvényt pedig y-nal.**	Határozd meg az $y = 2x + 4$ függvény inverzét! ▶ Az $y = 2x + 4$ egyenlőségből kifejezzük az x-et y-on keresztül: $x = \frac{1}{2}y - 2.$ Ez a képlet adja meg az inverz függvényt, de ebben az argumentum y-nal, a függvény pedig x-szel van jelölve. A változókat felcserélve megkaptuk az $y = \frac{1}{2}x - 2$ függvényt, amely az $y = 2x + 4$ függvény inverze. ◁

Magyarázat és indoklás

1. Az inverz függvény fogalma. Ismeretes, hogy a v_0 állandó sebességgel egyenletesen mozgó test, út és idő kapcsolatát kifejező képlet: $S = v_0 t$. Ebből a képletből megkaphatunk egy fordított összefüggést: az idő és a megtett út közötti kapcsolatot kifejező képletet: $t = \frac{S}{v_0}$. A $t(S) = \frac{S}{v_0}$ függvényt az $S(t) = v_0 t$ *függvény inverzének* nevezzük. Megjegyezzük, hogy a megvizsgált példában mindegyik t ($t \geqslant 0$) értéknek egyetlen S érték felel meg, és fordítva, mindegyik S ($S \geqslant 0$) értéknek egyetlen t érték felel meg.

Megvizsgáljuk az inverz függvény meghatározásának általános modelljét.

Legyen az $f(x)$ függvény olyan, hogy mindegyik értékét értelmezési tartománya egy pontban veszi fel (az ilyen függvényt *invertálhatónak* nevezzük). Ekkor mindegyik $y_0 = b$ számnak (az $f(x)$ függvény értékkészletéből) egyetlen $x_0 = a$ érték felel meg, melyre igaz az $f(a) = b$ egyenlőség. Megvizsgálunk egy újabb $g(x)$ függvényt, mely minden b számhoz, az $f(x)$ függvény értékkészletéből egy a számot rendel, vagyis a $g(b) = a$ egyenlőség igaz az $f(x)$ függvény értékkészletéhez tartozó minden b-re. Ebben az esetben a $g(x)$ függvényt az $f(x)$ függvény inverzének, az $f(x)$-t pedig a $g(x)$ függvény inverzének nevezzük.

Az inverz függvény definíciójából az következik, hogy az eredeti függvény $E(f)$ értékkészlete az inverz függvény $D(g)$ értelmezési tartománya, a $D(f)$ értelmezési tartománya pedig az inverz függvény $E(g)$ értékkészlete.

Tehát,

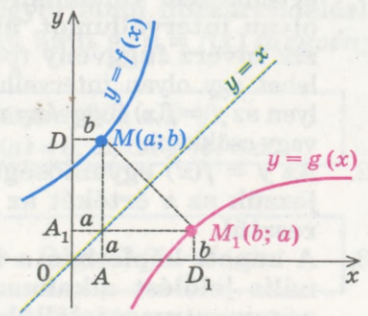
$$E(f) = D(g), D(f) = E(g).$$

2. Az inverz függvény tulajdonságai

1. *tulajdonság. Az eredeti függvény és az inverz függvény grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyenesre.*

Az előzőekben bemutatott függvényábrázolási módokat alkalmazva az $y = f(x)$ függvény inverzének elkészítésére a következőket kapjuk: ha $f(a) = b$, akkor a függvénygrafikon definíciója alapján az $(a; b)$ koordinátájú M pont az $y = f(x)$ függvényhez tartozik. Hasonlóképpen, ha $g(b) = a$, akkor a $(b; a)$ koordinátájú M_1 pont az $y = g(x)$ függvényhez tartozik. Az $M(a; b)$ és $M_1(b; a)$ pontok a koordinátasíkon szimmetrikusak az $y = x$ egyenesre (49. ábra).

Valóban, az $y = x$ egyenes a koordinátarendszer szimmetriatengelye. Tehát az $y = x$ egyeneshez viszonyított szimmetriánál az Ox tengely leképeződik az Oy tengelyre, az Oy tengely pedig az Ox tengely-



49. ábra

re. Ekkor (például $a > 0$ és $b > 0$ esetén) a koordinátatengelyeken lévő $OA = a$ és $OD = b$ oldalú $OAMD$ téglalap egy olyan $OA_1M_1D_1$ téglalapra képeződik le, melynek a koordinátatengelyeken lévő oldalai $OA_1 = OA = a$ és $OD_1 = OD = b$. Ily módon az $y = x$ egyenesre vonatkozó szimmetria során az $M(a; b)$ pont leképeződik egy $M_1(b; a)$ pontra (az M_1 pont pedig az M pontba). Tehát az $y = x$ egyenesre vonatkozó szimmetria-transzformáció során az $y = f(x)$ függvényhez tartozó $M(a; b)$ pontnak megfelel egy az $y = g(x)$ függvényhez tartozó $M_1(b; a)$ pont; ugyanakkor bármely az $y = g(x)$ függvényhez tartozó $M_1(b; a)$ pontnak létezik egy megfelelő $M(a; b)$ pontja, amely az $y = f(x)$ függvényhez tartozik. A fentiekből adódik, hogy a kölcsönösen inverz függvények grafikonjai szimmetrikusak az $y = x$ egyenesre. ○

2. tulajdonság. Ha az $f(x)$ függvény növekvő (csökkenő) valamely intervallumon, akkor ezen az intervallumon létezik inverz függvénye, amely növekvő, ha az $f(x)$ függvény növekvő és fogyó, ha az $f(x)$ függvény fogyó.

Valóban, ha valamely intervallumon az $f(x)$ függvény növekvő (fogyó), akkor a növekvő (fogyó) függvények tulajdonsága alapján mindegyik értékét az adott intervallum egyetlen pontjában veszi fel (lásd a 2.1. pont 6. példáját), tehát ennek a függvénynek az adott intervallumon létezik $g(x)$ inverze. Annak bebizonyítására, hogy a $g(x)$ növekvő, ha az $f(x)$ növekvő az indirekt bizonyítást alkalmazzuk.

Tekintsük az a_1 és a_2 számokat az $f(x)$ függvény értelmezési tartományához tartozóknak és

$$a_2 > a_1. \tag{1}$$

Legyen $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$. Ha az $f(x)$ függvény növekvő, akkor $f(a_2) > f(a_1)$, vagyis $b_2 > b_1$. Az inverz függvény definíciója alapján a $g(x)$ függvény értelmezési tartományához tartoznak a b_1 és b_2 számok és

$$g(b_1) = a_1, \quad g(b_2) = a_2. \tag{2}$$

Ha feltételezzük, hogy a $g(x)$ függvény nem növekvő, akkor a $b_2 > b_1$ egyenlőtlenségből nem következhet a $g(b_2) > g(b_1)$ egyenlőtlenség (különben a $g(x)$ függvény növekvő lenne), tehát csak a $g(b_2) \leqslant g(b_1)$ egyenlőtlenség teljesülhet. De ekkor a (2) képletekből azt kapnánk, hogy $a_2 \leqslant a_1$, ami ellentmond az (1) feltételnek. Tehát feltételezésünk hibás, és a $g(x)$ függvény akkor növekvő, ha az $f(x)$ is növekvő.

Hasonlóképpen bizonyítható, hogyha az $f(x)$ függvény fogyó, akkor a $g(x)$ inverz függvénye is fogyó.

3. Az $y = f(x)$ függvény inverze képletének gyakorlati meghatározása. A definíciójából következik, hogy az inverz függvény meghatározásához azt kell tudni, hogy hogyan lehet kifejezni az x-et az y értékén keresztül. Ezt megkaphatjuk, ha megoldjuk az $y = f(x)$ egyenletet az x változóra nézve. Ha az

adott függvény invertálható, akkor bármely az $f(x)$ függvény értékkészletéből vett y értékre az egyenletnek egyetlen megoldása van, és az így kapott $x = g(y)$ képlet adja meg az inverz függvényt. De ebben a képletben az argumentum y-nal van jelölve, a függvény értéke pedig x-szel. Ha megszokottra cseréljük a jelöléseket, akkor megkapjuk az $y = f(x)$ függvény inverzének képletét.

Ezt a megoldási módot a 7. táblázat algoritmusával együtt a következő példákban mutatjuk be.

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x-1}$ függvény inverzét!

Megoldás	*Magyarázat*
▶ Az értelmezési tartomány: $x \neq 1$. Ekkor az $y = \frac{1}{x-1}$ egyenlőségből a következőt kapjuk: $xy - y = 1$, $xy = y + 1$; $x = \frac{y+1}{y}$. Ha az argumentumot x-szel, a függvényt pedig y-nal jelöljük, akkor az eredeti függvény inverze: $y = \frac{x+1}{x}$. ◁	Az adott függvény az egész értelmezési tartományán ($x \neq 1$) invertálható, mivel az $y = \frac{1}{x-1}$ egyenletből egyértelműen kifejezhető az x az y-on keresztül ($y \neq 0$ az adott függvény értékkészletén). A kapott $x = \frac{y+1}{y}$ képlet adja meg az inverz függvényt, de ebben az argumentum y-nal van jelölve, a függvény pedig x-szel. Ha megszokottra cseréljük a jelöléseket, akkor megkapjuk a kívánt végeredményt.

2. példa. Határozzuk meg az $y = x^2$ függvény inverzét!

Megoldás	*Magyarázat*
▶ Az $y = x^2$ ($y \geqslant 0$ esetén) egyenletből kifejezve az x-et azt kapjuk, hogy $x = \pm\sqrt{y}$. $y > 0$ esetén egy y értéknek két x érték felel meg. Ezért az $y = x^2$ függvény nem invertálható az egész értelmezési tartományon $x \in (-\infty; +\infty)$, következésképpen nem határozható meg az inverz függvénye. ◁	Az adott függvény értékkészlete: $y \geqslant 0$. Ha azonban $y > 0$ az $y = x^2$ egyenletből nem fejezhető ki egyértelműen az x az y-on keresztül. Például $y = 4$ esetén $x = \pm 2$. Mivel az $y = 4$ értékhez nem tudunk egyetlen számot hozzárendelni, ezért nem tudjuk megrajzolni az inverz függvény grafikonját.

3. példa. Határozzuk meg az $y = x^2$ függvény inverzét, ha $x \geqslant 0$!

Megoldás

▶ Az $y = x^2$ ($y \geqslant 0$ esetén) egyenletből kifejezve az x-et azt kapjuk, hogy $x = \pm\sqrt{y}$, emellett $x \geqslant 0$ esetén az $x = \sqrt{y}$ egyenlőséget kapjuk.

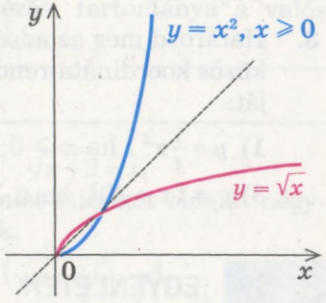
Ha az argumentumot x-szel, a függvényt pedig y-nal jelöljük, akkor az eredeti $y = x^2$ függvény inverzére az $y = \sqrt{x}$ képletet kapjuk, amely csak $x \geqslant 0$ estén igaz. ◁

Magyarázat

Az adott függvény értékkészlete: $y \geqslant 0$. $x \geqslant 0$ esetén az adott $y = x^2$ függvény növekvő, tehát az $x \geqslant 0$ intervallumon létezik inverze. Ezért az $x^2 = y$ egyenlet ezen az intervallumon egyértelműen megoldható: ha $x \geqslant 0$, akkor $x = \sqrt{y}$.

Ez a képlet adja meg az inverz függvényt, ahol az argumentum y-nal, a függvény pedig x-szel van jelölve. A jelölések felcserélésével a keresett végeredményt kapjuk.

Megjegyzés. A 2. és 3. példákban különböző függvényeket vizsgálunk (mivel értelmezési tartományuk különböző), jóllehet mindkét esetben ugyanazzal a képlettel vannak megadva. Ismeretes, hogy az $y = x^2$ függvény grafikonja parabola (2. példa), de az $y = x^2$ függvénygrafikonnak $x \geqslant 0$ (3. példa) esetén csak a parabola jobb oldali ága felel meg (50. ábra).



50. ábra

Ellenőrző kérdések

1. Milyen feltételek mellett ábrázolható az $y = f(x)$ függvény inverze?
2. Magyarázd meg az inverz függvény ábrázolását az $y = f(x)$ függvény példáján, ha ez táblázattal van megadva:

x	0	2	4	6
$f(x)$	1	3	5	7

Add meg táblázattal az $y = g(x)$ inverz függvényt!

x				
$g(x)$				

3. Hogyan helyezkednek el a függvény és inverzének grafikonjai, ha közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk őket? A grafikonok megfelelő tulajdonságait példákkal illusztráld!
4. Magyarázd meg a függvény és az inverze grafikonjának kölcsönös elhelyezkedését!
5. Létezik-e az $y = x^2$ függvény inverze, ha $x \leqslant 0$? Magyarázd meg ezt, az inverz függvény megfelelő tulajdonságaival alátámasztva! Ha létezik inverze, akkor írd fel az $y = g(x)$ képlet alakjában!

Gyakorlatok

1. Az $y = g(x)$ képlettel megadott függvényeknek írd fel az inverzeit! Határozd meg a $g(x)$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét:

   1°) $y = 3x - 6$; 2°) $y = -3x - 6$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 5) $y = \sqrt{x}$!

2. Ábrázold közös koordináta-rendszerben az adott függvény és inverzének grafikonját:

   1°) $y = 2x$; 2°) $y = x - 2$; 3) $y = -\frac{1}{x}$; 4*) $y = \frac{1}{x-1}$; 5*) $y = \sqrt{x+1}$!

3. Határozd meg az adott intervallumon a függvény inverzét, majd ábrázold közös koordináta-rendszerben az eredeti függvény és inverzének grafikonját:

   1) $y = \frac{1}{4}x^2$, ha $x \geqslant 0$; 2) $y = \frac{1}{4}x^2$, ha $x \leqslant 0$;

   3) $y = (x - 2)^2$, ha $x \geqslant 2$; 4) $y = x^2 - 2$, ha $x \leqslant 0$!

3. §. EGYENLETEK

3.1. Egyenlet-következmények és az egyenletek azonos átalakítása

8. táblázat

1. Az egyenlet fogalma és gyökei	
Meghatározás	**Példa**
A változót tartalmazó egyenlőséget egyenletnek nevezzük. Általános alakban az egyismeretlenes egyenletet így írjuk fel: $f(x) = g(x)$. E rövid felírás alatt azt értik a matematikában, hogy meg kell határozni az argumentum azon értékét, melynél az adott két függvény értéke egyenlő.	$2x = -1$ — lineáris egyenlet; $x^2 - 3x + 2 = 0$ — másodfokú egyenlet; $\sqrt{x+2} = x$ — irracionális egyenlet (a gyök alatti kifejezés változót tartalmaz)

A 8. táblázat folytatása

Az *egyenlet gyökének* (megoldásának) a változónak azt az értékét nevezzük, amely ezt az egyenletet igaz egyenlőséggé alakítja. **Megoldani az egyenletet annyit jelent, hogy meghatározzuk mindegyik gyökét, vagy bebizonyítjuk, hogy nincs gyöke.**	$x = 2$ gyöke az $\sqrt{x+2} = x$ egyenletnek, mert az $x = 2$ esetén igaz egyenlőséget kapunk: $\sqrt{4} = 2$, vagyis $2 = 2$.
2. Az egyenlet értelmezési tartománya (megengedett értékeinek halmaza)	
Az *egyenlet értelmezési tartományának* az egyenlet bal és jobb oldalán álló $f(x)$ és $g(x)$ függvények értelmezési tartományának a közös részét nevezzük.	A $\sqrt{x+2} = x$ értelmezési tartománya: $x + 2 \geqslant 0$, vagyis $x \geqslant -2$, mivel az $f(x) = \sqrt{x+2}$ függvény értelmezési tartománya $x + 2 \geqslant 0$, és a $g(x) = x$ függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza.
3. Egyenlet-következmények	
Ha az első egyenlet mindegyik gyöke a második egyenlet gyöke is, akkor a második egyenletet az első egyenlet *következményének* nevezzük. Ha **az átalakítások során az eredeti igaz egyenlőségből igaz egyenlőségeket kapunk, akkor az így kapott egyenleteket egyenlet-következményeknek nevezzük.** *Az egyenlet-következmények alkalmazásakor gyökvesztés nem történik, de hamis gyökök jelenhetnek meg.* Ezért **az egyenlet-következmények alkalmazásakor a megoldás része a kapott gyökök ellenőrzése, amely az eredeti egyenletbe való behelyettesítést jelent** (lásd a táblázat 5. pontját).	$\sqrt{x+2} = x.$ ▶ Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük: $(\sqrt{x+2})^2 = x^2,$ $x + 2 = x^2,$ $x^2 - x - 2 = 0,$ $x_1 = 2, x_2 = -1.$ *Ellenőrzés*: $x = 2$ gyöke az egyenletnek (lásd feljebb); $x = -1$ hamis gyök ($x = -1$ esetén $1 = -1$ hamis egyenlőséget kapunk). ◁ *Felelet:* 2.

A 8. táblázat folytatása

4. Egyenértékű egyenletek

Meghatározás	A legegyszerűbb tételek
Két egyenletet valamely halmazon *egyenértékűnek (ekvivalensnek)* nevezünk, ha ezen a halmazon ugyanazokkal a gyökökkel fognak rendelkezni. Ez azt jelenti, hogy *az első egyenlet minden gyöke a második egyenletnek is gyöke, és fordítva, a második egyenlet minden gyöke az elsőnek is gyöke* (erre a táblázat 5. pontjában találunk példát).	**1. Ha az egyenlet egyik oldaláról egy tagot ellenkező előjellel átviszünk az egyenlet másik oldalára, akkor az eredetivel egyenértékű egyenletet kapunk (bármilyen halmazon).** **2. Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal (vagy egy és ugyanazon, az értelmezési tartományán nullával nem egyenlő függvénnyel), akkor a kapott egyenlet egyenértékű (ekvivalens) az előzővel.**

5. Az egyenletmegoldás lépései

Egyenletmegoldás

egyenlet-következmények alkalmazásával

① ↓ ② Olyan átalakítás, amely során igaz egyenlőséget kapunk

A gyökök ellenőrzése, az eredeti egyenletbe való behelyettesítéssel

egyenértékű egyenletek alkalmazásával

Az eredeti egyenlet értelmezési tartományának figyelembevétele

① ↑↓ ② Az egyenes és fordított átalakítások során az igaz egyenlőség megőrzése az értelmezési tartományon

a függvények tulajdonságainak alkalmazása[1]

① – az eredeti egyenlet;
② – az eredeti egyenlet átalakításával kapott egyenlet;
↓, ↑ – az átalakítás irányát mutató jel

[1] A függvény tulajdonságainak alkalmazását az egyenletmegoldás során a 3.2. pontban tárgyaljuk.

Magyarázat és indoklás

1. Az egyenlet és gyökeinek fogalma. A matematikában leggyakrabban az egyenletekre úgy tekintenek, mint a feladatok megoldásának analitikus felírására, melyben meg kell határozni az argumentumnak azt az értékét, melynél a két függvényérték egyenlő. Ezért általános alakban az egyváltozós egyenletet így írjuk fel:

$$f(x) = g(x).$$

Leggyakrabban az egyenletet – változót tartalmazó egyenlőségként határozzuk meg.

Emlékeztetünk arra, *hogy az egyenlet gyöke (vagy megoldása) a változó azon értéke, amelyet az egyenletbe behelyettesítve igaz egyenlőséget kapunk. Megoldani az egyenletet azt jelenti, hogy meghatározni mindegyik gyökét vagy bebizonyítani, hogy nincs gyöke.*

Például a $2x = -1$ egyenletnek egyetlen gyöke van az $x = -\frac{1}{2}$, és az $|x| = -1$ egyenletnek nincsenek gyökei, mert az $|x|$ kifejezés nem vehet fel negatív értéket.

2. Az egyenlet megengedett értékeinek halmaza (értelmezési tartománya). Ha adott az $f(x) = g(x)$ egyenlet, akkor az $f(x)$ és $g(x)$ függvények közös értelmezési tartományát *az egyenlet értelmezési tartományának* nevezzük. Például az $x^2 = x$ egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Ezt röviden így írhatjuk fel: $x \in \boldsymbol{R}$, mivel az $f(x) = x^2$ és $g(x) = x$ függvények értelmezési tartománya $x \in \boldsymbol{R}$.

Nyilvánvaló, hogy az adott egyenlet mindegyik gyöke hozzátartozik az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények értelmezési tartományaihoz (különben nem kapunk igaz számegyenlőséget). Tehát *az egyenlet mindegyik gyöke feltétlenül hozzátartozik az egyenlet értelmezési tartományához.* Ezért egyes esetekben az értelmezési tartomány vagy alaphalmaz fontos szerepet játszik az egyenletek megoldásában.

Például az $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = x$ egyenletben a $g(x) = x$ függvény értelmezve van az x bármely értéke esetén, ugyanakkor az $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x}$ függvény csak akkor, ha a négyzetgyök alatt nemnegatív szám áll. Vagyis az egyenlet értelmezési tartománya egy $\begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ 1-x \geqslant 0 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszerrel adható meg, melyből az $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x \leqslant 1 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszert kapjuk, melynek nincs megoldása. Tehát az egyenlet értelmezési tartománya egyetlenegy számot sem tartalmaz, ezért az egyenletnek nincs megoldása.

Megjegyezzük, hogy az egyenlet értelmezési tartományának meghatározása hasznos lehet a megoldás során, de nem tartozik az egyenletmegoldás kötelező lépései közzé.

3. Az egyenletek megoldásának módszerei. Az egyenlet megoldásához alkalmazzuk a *pontos* és a *közelítő* módszert. Pontos módszerrel az 5–6. osztályban egyszerű egyenleteket a műveletek közti összefüggések alkalmazásával, illetve a számegyenlőségek tulajdonságainak felhasználásával oldottunk meg; a 7–9. osztályban pedig az egyenletek egyenértékű átalakításával határoztuk meg az egyenlet gyökét. Közelítő megoldásként a grafikus módszert alkalmaztuk.

Az egyenletek megoldásának grafikus módszere nem ad pontos gyököket, segítségével csak durva megközelítéssel tudjuk meghatározni az egyenlet gyökét. Néha a grafikus módszer a gyökök számának megállapításánál, vagy a gyököket tartalmazó intervallumok határainak kijelölésénél játszik szerepet. Grafikus módszerrel könnyen bizonyítható, hogy az egyenletnek nincs gyöke. Ezen okokból kifolyólag az algebra és az analízis elemei tanulása során az egyenlet megoldásán azt értjük, hogy pontos módszerrel meghatározzuk az egyenlet gyökét. Az egyenletek közelítő megoldásának módszerét csak akkor alkalmazzuk, ha ez a feladat feltételeiben szerepel (például grafikusan kell megoldani az egyenletet).

A különböző típusú egyenletek megoldásánál többnyire két módszer közül választhatunk. Az egyik módszer szerint egyenletünket egyre egyszerűbb alakra hozzuk, amelyek gyökei ugyanazok – vagyis mindegyik átalakításnál ekvivalens egyenleteket kapunk. Végeredményben egy olyan egyszerű, az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk, amelynek gyökei már könnyen meghatározhatók. Ezek és csakis ezek a gyökök lesznek megoldásai az eredeti egyenletnek.

Az egyenletmegoldás másik módszere abban nyilvánul meg, hogy az eredeti egyenletet olyan egyszerűbb egyenlettel helyettesítjük, melynek gyökei között szerepel az eredeti egyenlet összes gyöke is, vagyis az egyenletet egyenlet-következménnyel helyettesítjük. Majd az így kapott egyenletet egy nálánál is egyszerűbb egyenlet-következményre cseréljük egészen addig, amíg nem kapunk egy olyan legegyszerűbb egyenletet, amelynek gyökei már könnyen meghatározhatók. Ekkor az eredeti egyenlet összes gyöke az utolsó egyenlet gyökei között szerepel. Következésképpen ahhoz, hogy meghatározzuk az eredeti egyenlet gyökeit, elegendő behelyettesíteni az utolsó egyenlet gyökeit az eredeti egyenletünkbe. Ezzel a behelyettesítéssel elkülönítjük az eredeti egyenlet gyökeit (kizárjuk az úgynevezett *hamis gyököket*, vagyis az utolsó egyenlet azon gyökeit, amelyek nem megoldásai az eredeti egyenletnek).

A következő paragrafusban bemutatjuk, hogy hogyan alkalmazzuk a függvények tulajdonságait egyes egyenletek megoldásánál.

Egyenlet-következmények

Vizsgáljuk meg részletesebben, hogyan lehet megoldani az egyenleteket egyenlet-következmények alkalmazásával. Az egyenlet megoldásánál a legfontosabb, hogy ne veszítsünk gyököket. Ezért elsősorban arra kell törekedni, hogy az eredeti egyenlet minden gyöke a következő egyenletnek is gyöke maradjon. Az egyenlet-következmény definíciójának a fenti gondolat az alapja:

ha az eredeti egyenlet gyöke a következőnek is gyöke, akkor a második egyenletet az első egyenlet következményének nevezzük.

Ez a meghatározás megmagyarázza a következő állítást: **ahhoz, hogy egyenlet-következményt kapjunk, az eredeti egyenletet számegyenlőségnek kell tekintenünk, miközben vigyázunk arra, hogy minden utána következő egyenlet igaz számegyenlőség maradjon.**

Valóban, ha ehhez tartjuk magunkat, akkor az első egyenlet mindegyik gyöke egy igaz számegyenlőséggé alakítja át az egyenletet. De ekkor a második egyenlet szintén egy igaz számegyenlőség, vagyis a változó vizsgált értéke gyöke a második egyenletnek is, ami azt jelenti, hogy a második egyenlet az első következménye.

Alkalmazzuk a fenti módszert $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ egyenlet megoldásánál (egyelőre nem alkalmazzuk a tört nullával való egyenlőségének a feltételét).

Ha igaz, hogy a tört nullával egyenlő, akkor a számlálója feltétlen egyenlő nullával. Tehát, az adott egyenletből a következő egyenlet-következményt kapjuk: $x^2-1=0$. De ekkor igaz az $(x-1)(x+1)=0$ egyenlőség is. Az utolsó egyenletnek két gyöke van: $x=1$ és $x=-1$. Behelyettesítve az eredeti egyenletbe észrevesszük, hogy csak az $x=1$ gyök elégíti ki az eredeti egyenletet. Hogyan lehetséges ez?

Ez azért következett be, mert az egyenlet-következmények alkalmazásánál csak azt tudjuk garantálni, hogy az adott egyenlet gyökeit nem veszítjük el (az első egyenlet mindegyik gyöke, gyöke a második egyenletnek is). De a második egyenlet az első egyenlet gyökén kívül más gyökkel is rendelkezik, amely nem gyöke az elsőnek. Az így kapott gyököt az eredeti egyenlet *hamis* gyökének nevezzük. A hamis gyök kiszűrése érdekében a kapott gyököket behelyettesítjük az eredeti egyenletbe. (A hamis gyökök megjelenésének okait részletesen a 9. táblázatban tekintjük át.) Ahhoz, hogy az egyenletek megoldásánál helyesen alkalmazzuk az egyenlet-következményeket, fontos emlékezni még a következő szabályra: **mivel az egyenlet-következmények alkalmazása során hamis gyökök jelenhetnek meg, ezért a gyökök behelyettesítése az eredeti egyenletbe – az egyenletmegoldás szerves része.**

A fenti szabályok alkalmazását a 8. táblázat foglalja magába. A táblázat 3. pontjában a következő egyenlet megoldása van:

$$\sqrt{x+2}=x. \tag{1}$$

Ahhoz, hogy egyenlet-következmények segítségével oldjuk meg az egyenletet, elegendő úgy tekinteni rá mint egy igaz számegyenlőségre, azzal a megjegyzéssel, hogy abban az esetben, ha két szám egyenlő, akkor négyzetük is egyenlő:

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2. \tag{2}$$

Tehát garantáljuk, hogy amennyiben az (1) egyenlőség igaz, akkor a (2) is igaz lesz, ami azt jelenti, hogy a (2) egyenlet következménye az (1)-nek. Ha legalább egyszer alkalmaztuk az egyenlet-következményeket (és nem ekvivalens átalakítást végeztünk), akkor hamis gyököket is kaphatunk. Ekkor a megoldáshoz az ellenőrzés is feltétlen hozzátartozik, amely során a kapott gyököket be kell helyettesíteni az eredeti egyenletbe.

Megjegyzés: Az adott egyenlettől az áttérést az egyenlet-következményhez egy külön jellel jelöljük $\Rightarrow$, de ennek alkalmazása a feladat megoldásánál nem kötelező. E jel jelenléte arról tanúskodik, hogy egyenlet-következményt alkalmaztunk, ezért az eredmények ellenőrzése kötelező.

Egyenértékű egyenletek

Az egyenértékűség (ekvivalencia) fogalmával a 7. osztályos algebra tananyagában már találkoztunk, ott egyenértékű egyenleteknek az olyan egyenleteket nevezték, melyek ugyanazon gyökökkel rendelkeztek. Azokat az egyenleteket is egyenértékűnek nevezünk, melyeknek nincsenek gyökei. Erre az esetre is úgy tekinthetünk, hogy az egyenleteknek ekkor is ugyanolyan gyökei vannak, mivel az ilyen egyenletek feleletei megegyeznek: „az egyenletnek nincsenek gyökei" (pontosabban a gyökeinek halmaza megegyezik: mindkettő üres halmaz, melyet a $\varnothing$ szimbólummal jelölnek).

Az algebra és analízis elemei tananyagban általánosabban vizsgáljuk az egyenletek egyenértékűségét, mert itt az egy adott halmazon egyenértékű egyenleteket fogjuk vizsgálni.

Két egyenletet egy tetszőleges halmazon egyenértékűnek nevezünk, ha ezen a halmazon ugyanazokkal a gyökökkel rendelkeznek, vagyis ha az első egyenlet mindegyik gyöke a második egyenletnek is gyöke, és fordítva, ha a második egyenlet mindegyik gyöke az elsőnek is gyöke.

A valós számok halmazán értelmezett egyenleteknél (például a lineáris egyenletek esetén) egyértelmű választ tudunk adni arra a kérdésre, hogy egyenértékűek-e az adott egyenletek. Például az $x + 3 = 0$ és a $2x + 6 = 0$ egyenletek ekvivalensek, mivel mindkettőnek az $x = -3$ a gyöke, és más gyökük nincs. Tehát mindkét egyenletnek a megoldásai ugyanazok.

Ha az egyenletek egyenértékűségét egy olyan halmazon vizsgáljuk, amely különbözik a valós számok halmazától, akkor arra a kérdésre, hogy egyenértékűek-e az adott egyenletek, a válasz mindenekelőtt attól függ, milyen halmazon vizsgáljuk ezeket az egyenleteket. Például a következő egyenletek vizsgálatánál:

$$\frac{x^2-1}{x+1}=0 \qquad (3)$$

$$x^2-1=0 \qquad (4)$$

kiderül, hogy a (3) egyenletnek egy $x = 1$, a (4) egyenletnek pedig két $x = 1$ és $x = -1$ gyöke van. Tehát a valós számok halmazán ezek az egyenletek nem

ekvivalensek, mivel a (4) egyenlet gyöke $x = -1$, és ez a szám nem gyöke a (3) egyenletnek. De a pozitív számok halmazán e két egyenlet ekvivalens egymással, mert ezen a halmazon a (3) egyenletnek egy pozitív gyöke van az $x = 1$, és a (4) egyenletnek is csak egy pozitív gyöke van az $x = 1$. Tehát a pozitív számok halmazán mindkét egyenletnek ugyanazok a megoldásai.

Megjegyezzük, hogy azt a halmazt, melyen az egyenletek egyenértékűségét vizsgáljuk, általában nem adják meg (mint az utolsó példában). Leggyakrabban ennek a halmaznak az adott egyenlet megengedett értékeinek a halmazát tekintjük. A következőkben állapodunk meg:

az egyenletek (és az egyenlőtlenségek valamint az egyenletrendszerek és az egyenlőtlenség-rendszerek) ekvivalens átalakítását az egyenlet (egyenlőtlenség vagy rendszerek) megengedett értékeinek halmazán (értelmezési tartományukon) fogjuk elvégezni.

Ha az adott egyenlet megengedett értékeinek halmaza nem azonos a valós számok halmazával, akkor sem kell felírnunk (ahogy nem írjuk fel a lineáris vagy a másodfokú egyenlet megengedett értékeinek a halmazát sem). Egyébként sem az a fontos, hogy felírjuk a megoldandó egyenlet megengedett értékeinek halmazát, hanem az, hogy valóban figyelembe vegyük, és csak egyenértékű (ekvivalens) átalakításokat végezzünk az egyenleten.

Például az $\sqrt{x+2} = x$ egyenlet megengedett értékeinek halmaza: $x + 2 \geqslant 0$. Amikor áttérünk az $x + 2 = x^2$ egyenletre, akkor mindegyik gyök ezt az egyenletet igaz egyenlőséggé alakítja. Akkor az egyenletünk jobb oldalán álló x^2 kifejezés mindig nemnegatív értéket vesz fel ($x^2 \geqslant 0$), tehát az egyenlet bal oldalán álló kifejezésnek is nemnegatívnak kell lennie: $x + 2 \geqslant 0$. Ez azt jelenti, hogy az adott egyenlet megengedett értékeinek halmaza ($x + 2 \geqslant 0$) már automatikusan figyelembe vevődik a második egyenlet mindegyik gyökénél, ezért amikor megkapjuk $\sqrt{x+2} = x$ egyenletből az $x + 2 = x^2$ egyenletet, a megengedett értékeinek halmazát nem feltétlenül kell felírni.

Az ekvivalens átalakítások alkalmazásakor megpróbálunk általános módszereket kiválasztani ahhoz hasonlóan, mint ahogy az egyenlet-következmények alkalmazásánál tettük.

Az *egyenletek ekvivalens (vagy azonos) átalakításának* alkalmazásakor az első szabály, hogy vegyük figyelembe **az adott egyenlet megengedett értékeinek halmazát.**

Az ekvivalens egyenletek meghatározásából kiindulva garantálni kell, hogy az első egyenlet mindegyik gyöke legyen gyöke a második egyenletnek is, és fordítva, a második egyenlet mindegyik gyöke legyen gyöke az elsőnek is. Ennek a feltételnek az első feléhez már felállítottuk az általános szabályt: elegendő garantálni az egyenlőség igaz voltának megőrzését akkor, amikor az első egyenlettől áttérünk a másodikra.

Ahhoz, hogy végrehajtsuk ennek a feltételnek a második felét, elegendő a második egyenletet igaz egyenlőségnek tekinteni (vagyis a változónak olyan

értéket kell adni, amely a második egyenlet gyöke) és garantálni, hogy az első egyenlethez való áttéréskor az igaz egyenlőség fennmaradjon (ez a gyök egyúttal az első egyenletnek is gyöke). Valóban, az ekvivalens egyenletek meghatározásából következik, hogy *az ekvivalens egyenletek mindegyike a másik egyenlet következménye*. Valóban, **az ekvivalens átalakítás minden lépése során garantálnunk kell, hogy nem csak az egyenes átalakításkor, de a fordított átalakítás során is igaz egyenlőséget kapjunk.** Ez az ekvivalens átalakítások alkalmazásának második szabálya. E szabályok rövid összefoglalója a 8. táblázat 5. pontjában található.

Például az $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ egyenletet ekvivalens átalakításokkal történő megoldásakor elegendő figyelembe venni az egyenlet megengedett értékeinek halmazát: $x+1\neq 0$ és a tört nullával való egyenlőségének a feltételét (a tört akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha a számlálója egyenlő nullával, a nevezője pedig nem egyenlő nullával). A megengedett értékek halmazán minden átalakítás végrehajtható mind egyenes, mind fordított irányban, csak arra kell figyelni, hogy az átalakítások során mindig igaz egyenlőséget kapjunk.

A megoldást ebben az esetben így írhatjuk fel: $\frac{x^2-1}{x+1}=0$. Megengedett értékek halmaza (értelmezési tartománya): $x+1\neq 0$. Ekkor $x^2-1=0$. Tehát $x=1$ (kielégíti az értelmezési tartomány feltételét) vagy $x=-1$ (nem elégíti ki az értelmezési tartomány feltételét). *Felelet*: 1.

Az egyenletek ekvivalens átalakításai során alkalmazhatók a 7. osztályban megismert tételek.

1. tétel. ***Ha az egyenlet egyik oldaláról az összeadandót átvisszük ellenkező előjellel a másik oldalra, akkor az eredetivel egyenértékű egyenletet kapunk (bármilyen halmazon).***

2. tétel. ***Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal (vagy ugyanazzal a függvénnyel, amely értelmezve van és nem egyenlő nullával az adott egyenlet megengedett értékeinek halmazán), akkor az eredeti egyenlettel egyenértékű egyenletet kapunk (az értelmezési tartományán belül).***

Az adott tételek magyarázata teljesen hasonló az adott egyenletek egyenértékű átalakításával.

Megjegyzés. Az adott egyenlet egyenértékű átalakítására a következő jelet használják: $\Leftrightarrow$, használata azonban nem kötelező a megoldásnál. (De néha mi is fogjuk alkalmazni az ekvivalens átalakítás kihangsúlyozására.)

1. példa. Oldjuk meg az $\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x-1}$ egyenletet!

Megoldás

▶ Értelmezési tartománya: $x-2\neq 0$ és $x-1\neq 0$.

Ezen a halmazon az egyenlet ekvivalens a következő egyenletekkel:

$$\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x-1}=0, \quad (1)$$

$$\frac{5(x-1)-3(x-2)}{(x-2)(x-1)}=0, \quad (2)$$

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}=0, \quad (3)$$

$$2x+1=0, \quad (4)$$

vagyis $x=-\frac{1}{2}$.

Az értelmezési tartomány figyelembevételével $x=-\frac{1}{2}$ esetén:

$$x-2=-\frac{1}{2}-2=-2\frac{1}{2}\neq 0,$$

$$x-1=-\frac{1}{2}-1=-1\frac{1}{2}\neq 0.$$

Tehát $x=-\frac{1}{2}$ az egyenlet megoldása.

Felelet: $-\frac{1}{2}$.

Magyarázat

Az adott egyenlet megoldása során ekvivalens átalakításokat alkalmazunk. Ehhez figyelembe vesszük az egyenlet megengedett értékeinek halmazát, azaz kikötéseket kell tennünk.

Megjegyezzük, hogy *az egyenleteknél az értelmezési tartományra vonatkozó kikötéseket nem kell meghatározni, elég csak rögzíteni őket, majd a megoldás végén figyelembe kell venni a kikötéseket, vagyis hogy a kapott gyökök kielégítik-e az egyenletet az adott kikötések esetén.*

Ha az adott egyenlet egyik tagját ellenkező előjellel átvisszük a másik oldalra, akkor az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenletet (1) kapunk.

Közös nevezőre hozáskor, a zárójelek felbontásakor és az egynemű tagok összevonásakor szintén igaz egyenlőséget kapunk, és igazolhatjuk, hogy fordított sorrendű átalakításnál is teljesül az egyenlőség, vagyis a kapott (1)–(3) egyenletek ekvivalensek az eredeti egyenlettel (az értelmezési tartományán belül).

A tört akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha a számlálója egyenlő nullával, a nevezője pedig nem egyenlő nullával. De a második feltételt az értelmezési tartomány meghatározásánál már figyelembe vettük, tehát a kapott (4) egyenlet egyenértékű az eredeti egyenlettel az értelmezési tartományán belül. Mivel minden átalakítás csak az értelmezési tartományon belül ekvivalens, ezért ellenőrizni kell, hogy a kapott szám kielégíti-e az értelmezési tartományra vonatkozó korlátozást.

4. Gyökvesztés és hamis gyökök megjelenésének okai egyenletmegoldásnál. A 9. táblázat tartalmazza azokat az eseteket, amikor előfordulhat gyökvesztés vagy hamis gyökök megjelenése. Ott megtalálható, hogyan kapható helyes (vagy a teljes) megoldás mindegyik esetben.

Az okok	Azok az átalakítások, melyek során ez előfordulhat	Példa a helytelen (vagy nem teljes) megoldásra
		1. Hamis gyökök megjelenése
Egyenlet-következmények megjelenése:	**1. Az egynemű tagok összevonása**	$x^2+\sqrt{x-2}=6x+\sqrt{x-2}$. Átvisszük a $\sqrt{x-2}$ tagot az egyenlet jobb oldaláról a bal oldalra ellenkező előjellel és összevonjuk az egynevű tagokat. Azt kapjuk, hogy $x^2-6x=0$, $x_1=0,\ x_2=6$
a) olyan egyenletté alakul át az eredeti egyenlet, melynek értelmezési tartománya bővebb, mint az eredeti egyenleté	**2. Az egyenlet mindkét oldalának közös nevezőre hozása** (a nevező elhagyásakor)	$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2+5x+6}$. Megszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát az $(x+2)(x+3)$ közös nevezővel. Azt kapjuk, hogy $4(x+3)+7(x+2)=4$, $11x=-22,\ x=-2$
	3. Az irracionális egyenlet mindkét oldalának négyzetre emelése	$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}$. Négyzetre emeljük az egyenlet mindkét oldalát. $2x+1=x$, $x=-1$
b) olyan átalakítást végzünk, mely során névleges nullával való szorzás történik	**Az egyenlet mindkét oldalának szorzása változót tartalmazó kifejezéssel**	$x^2+x+1=0$. Az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk $x-1$-gyel. $(x-1)(x^2+x+1)=0$. Azt kapjuk, hogy $x^3-1=0$, $x=1$

9. táblázat

Hol hibáztunk?	Hogyan kaphatjuk meg a helyes (vagy teljes értékű) megoldást?	A helyes (vagy telies értékű) megoldás
az egyenlet megoldása során		
$x_1 = 0$ nem gyöke az adott egyenletnek	**A gyökök ellenőrzése az adott egyenletbe való behelyettesítés által**	$x^2 + \sqrt{x-2} = 6x + \sqrt{x-2}$. ▶ $x^2 - 6x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$. Az ellenőrzés azt mutatja, hogy $x_1 = 0$ – hamis gyök, $x_2 = 6$ – gyök. *Felelet*: 6. ◁
$x = -2$ nem gyöke az adott egyenletnek		$\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{x^2+5x+6}$. ▶ $4(x+3) + 7(x+2) = 4$; $11x = -22$, $x = -2$. Az ellenőrzés azt mutatja, hogy az $x = -2$ – hamis gyök. *Felelet*: nincs gyöke. ◁
$x = -1$ nem gyöke az adott egyenletnek		$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x}$. ▶ $2x + 1 = x$, $x = -1$. Az ellenőrzés azt mutatja, hogy az $x = -1$ hamis gyök. *Felelet*: nincs gyöke. ◁
$x = 1$ nem gyöke az adott egyenletnek		Az egyenlet megoldásához felesleges volt megszorozni az egyenletet $x - 1$-gyel. $x^2 + x + 1 = 0$. ▶ $D = -3 < 0$. *Felelet*: nincs gyöke. ◁ Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk $x - 1$-gyel, akkor az ellenőrzés azt mutatja, hogy az $x = 1$ hamis gyöke az egyenletnek, vagyis az egyenletnek nincsenek gyökei. ◁

Az okok	Azok az átalakítások, melyek során ez előfordulhat	Példa a helytelen (vagy nem teljes értékű) megoldásra
		1. Hamis gyökök megjelenése
c) nem növekvő vagy nem fogyó függvények alkalmazása az egyenlet mindkét oldalán	**Az egyenlet mindkét oldalának páros hatványra emelése vagy trigonometrikus függvények alkalmazása az egyenlet mindkét oldalán** (lásd a 365. oldalon)	$x - 1 = 2x + 1$. Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük: $(x - 1)^2 = (2x + 1)^2$. Azt kapjuk, hogy $3x^2 + 6x = 0$, $x_1 = 0, x_2 = -2$
		2. Gyökvesztés
Nyilvánvaló vagy látens *szűkítése a megengedett értékek halmazának*, egyebek mellett olyan átalakítás végrehajtása, mely során névleges nullával osztunk	**1. Az egyenlet mindkét oldalát, változót tartalmazó kifejezéssel osztjuk**	$x^2 = x$. Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk x-szel, és megkapjuk, hogy $x = 1$
	2. Az egyenlet mindkét oldalához ugyanazt a kifejezést hozzáadjuk, kivonjuk vagy mindkét oldalát megszorozzuk, elosztjuk egy olyan kifejezéssel, amelynek értelmezési tartománya szűkebb, mint az eredeti egyenleté	$x^2 = 1$. Ha az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk a $\sqrt{x}$-et, akkor a következő egyenletet kapjuk: $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x}$, melynek csak egy gyöke van, ez az $x = 1$

A 9. táblázat folytatása

Hol hibáztunk?	Hogyan kaphatjuk meg a helyes (vagy teljes értékű) megoldást?	A helyes (vagy teljes értékű) megoldás
az egyenlet megoldása során		
Az $x_1 = 0$ nem gyöke az eredeti egyenletnek	**A gyökök ellenőrzése az adott egyenletbe való behelyettesítés által**	Az adott egyenletben nem alkalmazunk négyzetre emelést. $x - 1 = 2x + 1.$ ▶ $x - 2x = 1 + 1, x = -2.$ *Felelet*: -2 ◁ Ha négyzetre emelést alkalmazunk, akkor az ellenőrzés azt fogja mutatni, hogy az $x_2 = -2$ gyöke az egyenletnek, az $x_1 = 0$ pedig hamis gyök.
az egyenlet megoldása során		
Elvesztettük az $x = 0$ gyököt, mivel az egyenlet x-szel történő osztása során a következő egyenletet kaptuk $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x},$ melynek értelmezési tartománya $x \neq 0$, vagyis az eredeti egyenlet értelmezési tartományát szűkítettük	**Azokat az értékeket külön kell vizsgálni, melyek esetén szűkül az értelmezési tartomány**	$x^2 = x.$ ▶ 1. Ha $x = 0$, akkor a $0^2 = 0$ igaz egyenlőséget kapjuk, vagyis az $x = 0$ gyöke az egyenletnek. 2. Ha $x \neq 0$, akkor $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}, x = 1.$ *Felelet:* 0; 1. ◁ (Természetesen *könnyebb így megoldani*: $x^2 - x = 0$, $x(x - 1) = 0; x = 0, x = 1.$)
Elvesztettük az $x = -1$ gyököt, mert az eredeti egyenlet értelmezési tartománya x bármilyen szám lehet, de a $\sqrt{x}$ csak az $x \geqslant 0$ esetén létezik		Az adott egyenlet esetén szükségtelen mindkét oldalához hozzáadni a $\sqrt{x}$-et. ▶ $x^2 = 1, x = \pm 1.$ *Felelet*: $x = \pm 1.$ ◁ (Ha mindkét oldalhoz hozzá kellene adni a $\sqrt{x}$-et, akkor az $x < 0$ esetet külön kellene vizsgálni, és akkor az adott egyenlet még egy gyökkel bővülne, ez az $x = -1$.)

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk az egyenlet gyökének? Mondj példákat!
2. Fogalmazd meg, hogy mit értünk az egyenlet értelmezési tartományán! Mondj példákat!
3. Mit értünk egyenlet-következményen? Mondj példákat! Magyarázd meg, milyen esetben garantálható, hogy az egyenlet átalakításakor egyenlet-következményt kapunk!
4. Mit nevezünk egyenértékű egyenleteknek? Mondj példákat! Magyarázd meg, milyen esetben garantálható, hogy az egyenlet átalakításakor egyenértékű egyenletet kapunk!
5. Fogalmazd meg az egyenletek ekvivalenciájának alaptételeit! Hozz fel példákat az alkalmazásukra!
6. Magyarázd meg, hogy mikor jelennek meg hamis gyökök az egyenletek átalakításai során! Miként lehet a fellépő hamis gyököket kiszűrni? Mondj példákat!
7. Magyarázd meg, hogy az eredeti egyenlet milyen átalakításainál veszítünk gyököket! Mondj példákat! Magyarázd meg példákon, mivel szükséges kiegészíteni az adott átalakítást, hogy az adott egyenletnek ne vesszenek el a gyökei!

Gyakorlatok

1°. Határozd meg az egyenletek megengedett értékeinek halmazát:

1) $\frac{x-5}{x+2}-\frac{2x-3}{x}=0$;

2) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x}{x^2+1}=0$;

3) $\sqrt{x}=\frac{3x-6}{x-1}$;

4) $\sqrt{x^2+5}-\frac{x-5}{x+4}=0$!

2. Állapítsd meg: a) a második egyenlet következménye-e az elsőnek;
b) ekvivalensek-e ezek az egyenletek (válaszotokat indokoljátok):

1) $2x^2 - 8x - 9 = 0$ és $x^2 - 4x - 4{,}5 = 0$; 2) $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=0$ és $x^2 - 4 = 0$!

3°. Igazold az egyenletek ekvivalenciáját:

1) $5x - 8 = 7 - 3x$ és $5x + 3x = 7 + 8$;

2) $(2x - 1)(x^2 + 5) = x(x^2 + 5)$ és $2x - 1 = x$!

4°. Igazold, hogy az adott egyenletek nem ekvivalensek:

1) $x^2+\frac{1}{x+3}=9+\frac{1}{x+3}$ és $x^2=9$; 2) $(2x-1)(x^2-5)=x(x^2-5)$ és $2x-1=x$!

5°. Magyarázd meg, hogy milyen átalakítást hajtottak végre, mikor az első egyenletből megkapták a másodikat, és eközben megsértették-e az egyenértékűséget:

1) $3x + 1{,}1 = 6{,}8 - 2x$ és $3x + 2x = 6{,}8 - 1{,}1$;

2) $\frac{x^2-81}{x+9}+3x^2-1=0$ és $x - 9 + 3x^2 - 1 = 0$;

3) $\frac{5}{3x-1}+x=3$ és $5+x(3x-1)=3(3x-1)$;

4) $\sqrt{x^2-1}=x-2$ és $x^2-1=x^2-4x+4$!

6. Ekvivalensek-e az adott egyenletek az első egyenlet megengedett értékeinek halmazán:

1) $5-x=x+7$ és $5-x+\frac{1}{x-3}=x+7+\frac{1}{x-3}$;

2) $\frac{12-2x}{x-2}=\frac{x-5}{x-2}$ és $12-2x=x-5$;

3) $6-x=10$ és $6-x+\sqrt{x}-\sqrt{x}=10$;

4) $(x^2+2x-3)(x^2+6)=5(x^2+6)$ és $x^2+2x-3=5$;

5) $x^2-1=6x-1$ és $\frac{x^2-1}{x}=\frac{6x-1}{x}$?

7. Oldd meg az egyenleteket, és állapítsd meg, hogy milyen átalakítás vezetne nem ekvivalens egyenletekhez:

1) $\frac{8}{x}-\frac{5-x}{2}=\frac{8+3x}{x}-x$;

2) $\frac{x}{4}+\frac{(x-2)^2+8}{x}=\frac{(4-x)(2-x)}{x}$;

3) $\frac{7}{x+3}-\frac{1}{3-x}=\frac{6}{x^2-9}-\frac{x-4}{3+x}$;

4) $\frac{1}{x-2}+\frac{x-6}{3x^2-12}=\frac{1}{2-x}-1$!

8. Oldd meg az egyenleteket az egyenlet-következmények módszerével, és állapítsd meg, hogy milyen átalakítás vezetne nem ekvivalens egyenletekhez:

1) $3x+\sqrt{x-2}=5x-1+\sqrt{x-2}$;

2) $\sqrt{2x+5}=x+1$;

3) $\sqrt{3-2x}=1-x$;

4) $\sqrt{5+x^2}=x-4$!

9. Milyen feltételek mellett lesznek ekvivalensek az egyenletek:

1) $\frac{f(x)}{2x-3}=g(x)$ és $f(x)=g(x)(2x-3)$;

2) $f(x)+\sqrt{x}=g(x)+\sqrt{x}$ és $f(x)=g(x)$?

10. Lehetséges-e gyökvesztés vagy hamis gyök megjelenése, ha:

1) az $(x^2+7)f(x)=4x^2+28$ egyenletet az $f(x)=4$ egyenlettel helyettesítjük;

2) az $(x-1)f(x)=(x-1)g(x)$ egyenletet az $f(x)=g(x)$ egyenlettel helyettesítjük;

3) az $\frac{f(x)}{x+3}=\frac{g(x)}{x+3}$ egyenletet az $f(x)=g(x)$ egyenlettel helyettesítjük;

4) az $\frac{f(x)}{3x^2+5}=0$ egyenletet az $f(x)=0$ egyenlettel helyettesítjük?

11. Oldd meg az egyenleteket, és igazold, hogy ekvivalens egyenletlánccal van-e dolgunk:

1) $13-(x-1)^2+(2x-1)(x+1)=(x+2)^2$;

2) $(x-1)^3-(x-3)^3=3x+26$;

3) $(x+1)^3-(x-1)^3=6(x^2+x+1)$;

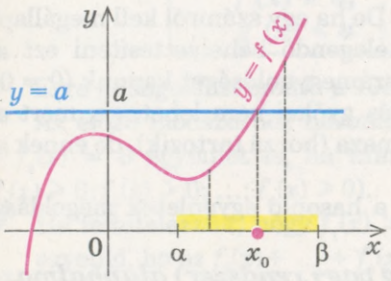
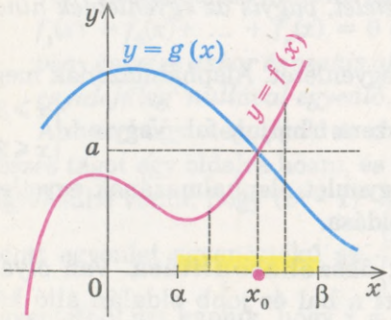
4) $(3x-1)^2+(6x-3)(2x+1)=(x-1)^2+5(2x+1)^2$!

3.2. A függvények tulajdonságainak alkalmazása az egyenletek megoldásánál

10. táblázat

Eljárási mód	Példa
1. A megengedett értékek halmaza véges	
Ha az egyenlet (egyenlőtlenség-rendszer) megengedett értékeinek halmaza véges számú elemekből áll, akkor a megoldáskor elegendő ellenőrizni mindegyik értéket	$\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}$. ▶ Megengedett értékek halmaza: $\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ 2-2x^2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geqslant 1, \\ x^2\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$ *Ellenőrzés.* $x=1$ — gyöke az egyenletnek $(\sqrt{0}+1=1+\sqrt{0}, 1=1)$, $x=-1$ — nem gyöke az egyenletnek $(\sqrt{0}-1\neq 1+\sqrt{0})$. *Felelet:* 1. ◁
2. Az egyenlet bal és jobb oldalának összehasonlítása	
$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a \end{cases}$ $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$ **Ha meg kell oldani az $f(x)=g(x)$ alakú egyenletet, melynél $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, akkor a bal és a jobb oldali részek akkor, és csakis akkor lesznek egyenlők, ha $f(x)$ és $g(x)$ egyidejűleg a-val egyenlők.**	$1-x^2=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}$. ▶ $f(x)=1-x^2\leqslant 1$, $g(x)=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}\geqslant 1$ (mert $\sqrt{\lvert x\rvert}\geqslant 0$). Tehát az adott egyenlet egyenértékű a következő egyenletrendszerrel: $\begin{cases} 1-x^2=1, \\ \sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$. *Felelet:* 0. ◁
$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0. \end{cases}$ $f_1(x)\geqslant 0$, $f_2(x)\geqslant 0$, ……, $f_n(x)\geqslant 0$ *Néhány nemnegatív függvény összege akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha mindegyik függvény egyidejűleg egyenlő nullával.*	$\sqrt{x-2}+\lvert x^2-2x\rvert+(x^2-4)^2=0$. ▶ $f_1(x)=\sqrt{x-2}\geqslant 0$, $f_2(x)=\lvert x^2-2x\rvert\geqslant 0$, $f_3(x)=(x^2-4)^2\geqslant 0$. Tehát az adott egyenlet a következő egyenletrendszerrel egyenértékű: $\begin{cases} \sqrt{x-2}=0, \\ \lvert x^2-2x\rvert=0, \\ (x^2-4)^2=0. \end{cases}$ Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x=2$, amely az egész rendszert kielégíti. *Felelet:* 2. ◁

A 10. táblázat folytatása

3. A függvények növekedésének és csökkenésének alkalmazása	
Az egyenletek megoldásának vázlata	
1. *Próbálgatással meghatározzuk az egyenlet egy vagy néhány gyökét.* 2. *Bebizonyítjuk, hogy más gyöke nem létezik* (felhasználjuk az egyenlet gyökeiről szóló tételt vagy az egyenlet bal- és jobb oldalának összehasonlítását).	
	Az egyenlet gyökeiről szóló tételek **1. Ha az $f(x) = a$ egyenletben az $f(x)$ függvény növekvő (csökkenő) valamilyen intervallumon, akkor ennek az egyenletnek ezen az intervallumon legfeljebb egy gyöke van.** Példa A $\sqrt{x}+2x^3=3$ egyenletnek egy gyöke van, az $x = 1$ $(\sqrt{1}+2\cdot 1^3=3$, vagyis $3 = 3)$, mert az $f(x)=\sqrt{x}+2x^3$ növekvő az egész értelmezési tartományán (alaphalmazán) $x \geqslant 0$
	**2. Ha az $f(x) = g(x)$ egyenletben az $f(x)$ függvény növekvő valamely intervallumon, és a $g(x)$ függvény csökkenő ugyanezen az intervallumon (vagy fordítva), akkor ennek az egyenletnek legfeljebb egy gyöke van ezen az intervallumon.** Példa A $\sqrt{x}+x^3=3-x$ egyenletnek egy gyöke van az $x=1$ $(\sqrt{1}+1^3=3-1$, vagyis $2 = 2)$, mert az $f(x)=\sqrt{x}+x^3$ függvény növekvő az egész értelmezési tartományán $x \geqslant 0$, és a $g(x) = 3-x$ csökkenő (a valós számok halmazán, az $\boldsymbol{R}$-n, tehát az $x \geqslant 0$ esetén is)

Magyarázat és indoklás

1. Véges számú megengedett értékek halmaza. Emlékeztetünk arra, hogy adott $f(x) = g(x)$ egyenlet esetén az $f(x)$ és $g(x)$ függvények értelmezési tartományának közös részét az adott egyenlet *megengedett értékei halmazának* (vagy alaphalmazának) nevezzük. Nyilvánvaló, hogy az egyenlet mindegyik gyöke hozzátartozik mind az $f(x)$ függvény, mind a $g(x)$ függvény alaphalmazához. Tehát *az egyenlet mindegyik gyöke feltétlen hozzátartozik az adott egyenlet*

alaphalmazához. Az előző gondolat alapján egyes esetekben az alaphalmaz elemzésével határozzuk meg az egyenlet megoldásait.

Példaként tekintsük a következő egyenletet: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-2x}=3x-6$. Az egyenlet alaphalmazát felírhatjuk az $\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ 4-2x\geqslant 0 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszerrel. A megoldás során azt kapjuk, hogy $\begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$ vagyis $x = 2$. Tehát az egyenlet alaphalmaza egyetlen értékből áll, és ez az $x = 2$. De ha egy számról kell megállapítani, hogy gyöke-e az egyenletnek, akkor elegendő behelyettesíteni ezt az értéket az egyenletbe. Eredményül egy igaz számegyenlőséget kapunk ($0 = 0$). Tehát az $x = 2$ az adott egyenlet gyöke. Más gyökei nem lehetnek, mert az egyenlet összes gyöke az alaphalmaz részhalmaza (hozzá tartozik), de ennek az $x = 2$ értéken kívül más értéke nincs.

Az áttekintett példa támpontul szolgál a hasonló egyenletek megoldásánál:

ha az egyenlet (az egyenlőtlenség vagy rendszer) alaphalmaza véges számú számhalmaz, akkor a megoldásához elegendő ellenőrizni ezeket az értékeket.

Megjegyzés. *Abban az esetben, ha az alaphalmaz üres halmaz* (egyetlen eleme sincsen), *akkor rögtön megadható a felelet, vagyis az egyenletnek nincs megoldása.*

Tekintsük például a $\sqrt{x-3}=\sqrt{2-x}+5x$ egyenletet. Alaphalmazának megadásához a $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 2-x\geqslant 0 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszert írhatjuk fel. Vagyis $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$ melynek nincs megoldása. Tehát az adott egyenlet alaphalmazának egyetlen eleme sincs, ezért az egyenletnek nincs megoldása.

2. Az egyenlet bal és jobb oldalának összehasonlítása. Van olyan egyenlet, amelynek megoldását elősegítheti a bal és jobb oldalán álló két függvény értékkészletének az összehasonlítása.

Tekintsük az $f(x) = g(x)$ egyenletet. Az egyenlet megoldásakor sikerül megállapítani, hogy az x bármely értékénél $f(x) \geqslant a$ és $g(x) \leqslant a$.

- Megvizsgálunk két esetet: 1) $f(x) > a$; 2) $f(x) = a$.

  Ha $f(x) > a$, akkor $f(x) = g(x)$ egyenlőség nem teljesülhet, mert $g(x) \leqslant a$, vagyis ha $f(x) > a$, akkor az adott egyenletnek nincs gyöke. Már csak az $f(x) = a$ eset maradt, de mivel az $f(x) = g(x)$ egyenlőségnek igaznak kell lennie, ezért $g(x) = a$ egyenlőség is teljesülni fog. Tehát igazoltuk, hogy az $f(x) = g(x)$ egyenlőség teljesülése (az $f(x) \geqslant a$, és a $g(x) \leqslant a$ feltételek mellett) garantálja az $f(x) = a$ és a $g(x) = a$ egyenlőségek teljesülését is (és fordítva, ha egyidejűleg teljesülnek az $f(x) = a$ és a $g(x) = a$ egyenlőségek,

akkor az $f(x) = g(x)$ egyenlőség is teljesülni fog). A 3.1. pont bizonyítása szerint ez azt jelenti, hogy az $f(x) = g(x)$ egyenlőség ekvivalens az $\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}$ egyenletrendszerrel. Röviden ez így írható fel:

$f(x) = g(x)$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}$
$f(x) \geqslant a,$ $g(x) \leqslant a$		

○

Erre a megoldási módra a 10. táblázat 2. pontjában találunk példát.

Az előző módszerhez hasonlóképpen oldható meg az $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = 0$ egyenlet is, ha mindegyik összeadandó nemnegatív szám lesz ($f_1(x) \geqslant 0; f_2(x) \geqslant 0; \ldots; f_n(x) \geqslant 0$).

● Ha feltételezzük, hogy $f_1(x) > 0$, akkor az összeg csak úgy lehet nullával egyenlő, ha az $f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ összeg negatív. De ez nem lehetséges, mert a feltétel szerint minden függvény nemnegatív. Tehát $f_1(x) > 0$ esetén az egyenletnek nincsenek gyökei. Ez az eljárás bármely összeadandó esetén megismételhető. Egyetlen eset lehetséges, mégpedig ha mindegyik függvény-összeadandó nullával egyenlő (csak ebben az esetben fog teljesülni az $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = 0$ egyenlőség). Tehát *néhány nemnegatív függvény összege akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha mindegyik függvény egyidejűleg nullával egyenlő.* ○

Ahhoz, hogy megoldjuk az $x^4 + |x - 1| = 2x^2 - 1$ egyenletet, elegendő az összes tagot egy oldalra hozni, és felírni az $(x^2 - 1)^2 + |x - 1| = 0$ alakban, és figyelembe venni, hogy $(x^2 - 1)^2$ és $|x - 1|$ nemnegatív függvények. Tehát az adott egyenlet egyenértékű az $\begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 0, \\ |x - 1| = 0 \end{cases}$ egyenletrendszerrel. A második egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 1$, mely kielégíti a rendszert, vagyis az adott egyenletnek egyetlen gyöke van, az $x = 1$.

3. A függvény növekedésének és fogyásának alkalmazása az egyenletek megoldásánál a következő tulajdonságon alapszik: *a növekvő vagy fogyó függvény mindegyik értékét az értelmezési tartományának egyetlen pontjában veszi fel.*

Célszerű emlékezni az egyenletek gyökeiről szóló speciális tételre.

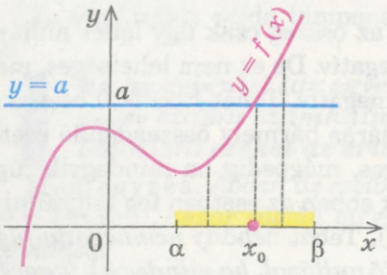
1. tétel. Ha az $f(x) = a$ egyenletben az $f(x)$ függvény növekvő (csökkenő) valamely intervallumon, akkor ennek az egyenletnek legfeljebb egy gyöke lehet ezen az intervallumon.

A tétel állítását grafikusan az 51. ábra segítségével igazoljuk. Az $y = a$ egyenes az $[\alpha; \beta]$ intervallumon növekvő $y = f(x)$ függvényt egy pontban metszi. Ez azt jelenti, hogy az $f(x) = a$ egyenletnek egynél nem több gyöke lesz az $[\alpha; \beta]$ intervallumon. Ezt az állítást analitikusan bizonyítjuk be.

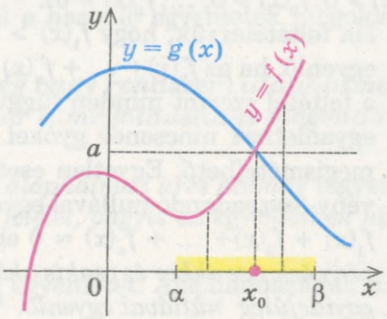
● Ha az $[\alpha; \beta]$ intervallumon az egyenletnek az x_0 gyöke, akkor az $f(x_0) = a$. Más gyöke nem létezhet, mert a növekvő $f(x)$ függvény esetén, ha $x > x_0$, akkor $f(x) > f(x_0) = a$. Tehát, ha $x \neq x_0$, akkor $f(x) \neq a$. Hasonlóképpen a csökkenő $f(x)$ függvény esetén, ha $x \neq x_0$, akkor $f(x) \neq a$. ○

2. tétel. Ha az $f(x) = g(x)$ egyenletben az $f(x)$ függvény növekvő valamely intervallumon, és a $g(x)$ függvény csökkenő ugyanezen az intervallumon (vagy fordítva), akkor ennek az egyenletnek legfeljebb egy gyöke van ezen az intervallumon.

A tétel állítását grafikusan az 52. ábra segítségével igazoljuk.



51. ábra



52. ábra

● Ha az $[\alpha; \beta]$ intervallumon az egyenletnek az x_0 gyöke, akkor az $f(x_0) = g(x_0) = a$. Más gyöke nem létezhet, mert például növekvő $f(x)$ függvény esetén, illetve fogyó $g(x)$ függvény esetén, ha $x > x_0$, akkor $f(x) > a$ és $g(x) < a$, tehát $f(x) \neq g(x)$. Hasonlóképpen $x < x_0$ esetén $f(x) \neq g(x)$. ○

A fenti tételek mindegyike azt állítja, hogy *a vizsgált intervallumon az adott egyenletnek legfeljebb egy gyöke van, vagyis ennek az egyenletnek vagy egyáltalán nincs gyöke, vagy csak egyetlen gyöke van.* Ha az ilyen egyenletnek próbálgatással sikerül megtalálnunk egy gyökét, akkor az adott intervallumon az egyenletnek más gyöke nem létezik.

Ahhoz, hogy megoldjuk az $x^3 + x = 10$ egyenletet, elegendő észrevenni, hogy az $f(x) = x^3 + x$ függvény növekvő az egész számegyenesen (mint növekvő függvények összege), és hogy az $x = 2$ gyöke[1] ennek az egyenletnek ($2^3 + 2 = 10$; $10 = 10$). Tehát az $f(x) = 10$ egyenletnek egy gyöke van, ez az $x = 2$.

[1] Az $x = 2$ gyököt próbálgatással kapjuk. A próbálgatást az egész számokkal szokás kezdeni: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, melyeket az eredeti egyenletbe kell behelyettesíteni.

Megjegyezzük, hogy mindegyik tétel csak a megfelelő függvény növekedési (fogyási) intervallumán garantálja az egyetlen gyököt (ha egyáltalán létezik gyök). Ha a függvénynek néhány növekedési és fogyási intervalluma létezik, akkor mindegyiket külön-külön kell vizsgálni.

Példa. Oldjuk meg a 2. tétel segítségével az $x^3 + x = \frac{2}{x}$ egyenletet!

▶ Először a függvények megengedett értékeinek halmazát vizsgáljuk: $x \neq 0$ és figyelembe vesszük, hogy az $y = \frac{2}{x}$ függvény az egész értelmezési tartományán se nem csökkenő, se nem növekvő (2.2. pont alapján), ugyanakkor a $(-\infty; 0)$ és a $(0; +\infty)$ intervallumok mindegyikén csökkenő ez a függvény. Ezért mindkét intervallumot külön kell vizsgálni.

1) $x > 0$ esetén az adott egyenletnek $x = 1$ a gyöke $\left(1^3 + 1 = \frac{2}{1}, 2 = 2\right)$. Az $f(x) = x^3 + x$ függvény $x > 0$ esetén növekvő (mint fentebb láttuk, ez a függvény az $\boldsymbol{R}$ halmazon növekvő), a $g(x) = \frac{2}{x}$ függvény pedig $x > 0$ esetén csökkenő. Tehát az $f(x) = g(x)$ egyenletnek $x > 0$ esetén egyetlen gyöke van: $x = 1$.

2) $x < 0$ esetén az adott egyenletnek $x = -1$ a gyöke $\left((-1)^3 + (-1) = \frac{2}{-1}, -2 = -2\right)$. Az $f(x) = x^3 + x$ függvény $x < 0$ esetén növekvő, a $g(x) = \frac{2}{x}$ függvény pedig csökkenő ezen az intervallumon. Ezért az $f(x) = g(x)$ egyenletnek $x < 0$ esetén egyetlen gyöke van, ez az $x = -1$.
A feleletbe az egyenlet valamennyi gyökét fel kell írni (hiába csak egyetlen gyök létezett az adott intervallumban, de összesen két megoldást kaptunk). Tehát az adott egyenletnek két gyöke lesz: 1 és –1. ◁

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Oldjuk meg az $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2 - (x-1)^2$ egyenletet!

Megoldás	*Magyarázat*
▶ Megengedett értékek halmaza: $x \neq 0$. Az $x^4 > 0$. Tehát az $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4} \geqslant 2$ (mint két kölcsönösen reciprok pozitív szám összege), és a $g(x) = 2 - (x-1)^2 \leqslant 2$.	Ha a zárójelet felbontjuk, és az egyenlet mindkét oldalát közös nevezőre hozzuk, akkor az egyenlet gyökeinek meghatározására egy nyolcadfokú egyenletet kellene megoldanunk, melynek mindegyik gyökét nem tudjuk meghatározni.

Ebből következik, hogy az adott egyenlet ekvivalens a következő egyenletrendszerrel: $\begin{cases} x^4 + \frac{1}{x^4} = 2, \\ 2-(x-1)^2 = 2. \end{cases}$ A második egyenletből megkapjuk, hogy $x = 1$, és ez a szám kielégíti az első egyenletet is, vagyis az egyenletrendszernek (az adott egyenletnek is) egyetlen gyöke van: $x = 1$.

Felelet: 1. ◁

Próbálkozzunk a jobb és bal oldalon álló függvények értékkészletének összehasonlításával. Mivel a megengedett értékek halmaza ($x \neq 0$) $x^4 > 0$, ezért az egyenlet bal oldalán *két kölcsönösen reciprok pozitív szám összege áll, amely mindig nagyobb* 2-nél *vagy egyenlő vele.* A jobb oldalon a 2-ből kivonódik egy nemnegatív szám, az $(x-1)^2$. Tehát az x mindegyik értékénél a kifejezés értéke kisebb 2-nél vagy egyenlő vele. A bal és a jobb oldal egyenlősége akkor és csakis akkor lehetséges, ha mindkét oldal egyenlő 2-vel.

2. példa. Oldjuk meg a $\begin{cases} \sqrt{x} + x^3 = \sqrt{y} + y^3, \\ x^2 + 3y^2 = 36 \end{cases}$ egyenletrendszert!

Megoldás

▶ A megengedett értékek halmaza: $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$ Megvizsgáljuk az $f(t) = \sqrt{t} + t^3$ függvényt. Az értelmezési tartományán ($t \geqslant 0$) a függvény növekvő (mint két növekvő függvény összege). Ekkor az egyenletrendszer első egyenlete, amely $f(x) = f(y)$ alakú, ekvivalens az $x = y$ egyenlettel. Tehát a megengedett értékek halmazán ez a rendszer egyenértékű a következő egyenletrendszerrel: $\begin{cases} x = y, \\ x^2 + 3y^2 = 36. \end{cases}$ Behelyettesítve az $x = y$ egyenlőséget a második egyenletbe, a következő egyenletet kapjuk: $4y^2 = 36$, $y^2 = 9$, $y = \pm 3$. Figyelembe véve, hogy $y \geqslant 0$, megkapjuk $y = 3$. Ekkor $x = y = 3$.

Felelet: (3; 3). ◁

Magyarázat

Néha a függvények tulajdonságait is tudjuk alkalmazni az egyenletrendszerek megoldása során. Ha észrevesszük, hogy az első egyenlet bal és jobb oldalán ugyanaz a növekvő függvény áll (mint két növekvő függvény összege), ekkor *az $f(x) = f(y)$ egyenlőség a növekvő függvény esetén akkor és csakis akkor lehetséges, ha $x = y$, mert a növekvő függvények ugyanazon értéke csak az egyazon argumentum esetén lehetséges.* (Megjegyezzük, hogy ugyanez igaz a csökkenő függvények esetére is.)

Megjegyzés. A 2. példa magyarázatában szereplő állítást alkalmazhatjuk a hasonló feladatok megoldása során. Ez röviden így fogalmazható meg: *ha az $f(x)$ növekvő (vagy csökkenő) egy adott halmazon, akkor ezen a halmazon $f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$.*

Ellenőrző kérdések

1. Magyarázd meg példákon, hogy hogyan alkalmazhatjuk a függvény tulajdonságait az egyenletek megoldásánál!
2*. Igazold a 10. táblázatban szereplő egyenletmegoldás eljárási módját, amely a függvények tulajdonságainak alkalmazásával történik!

Gyakorlatok

Oldd meg az **(1–4)** egyenleteket a megfelelő függvény tulajdonságainak alkalmazásával!

1°. 1) $\sqrt{x-2}+x^2=\sqrt{8-4x}+x+2$;

2) $2x+\sqrt{x^2-9}=x^2+\sqrt{18-2x^2}-3$;

3) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+3x}+\sqrt{4x^2+y^2-2y-3}=\sqrt{x^4-1}-2y+3$.

2°. 1) $\sqrt{4+x^2}=2-x^4$; 2) $1+|x^5+3x|=\sqrt{1-x^2}$;

3*) $x^6+\frac{1}{x^6}=1-2x-x^2$; 4*) $\sqrt{2x}+\frac{1}{\sqrt{2x}}=2-|2x-1|$.

3. 1) $|x^2-7x+12|+|x^2-9|+|6-2x|=0$;

2) $|x+2|+|y-5|+|2x^2-8|=0$;

3) $\sqrt{1-y}+\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-3x}=0$;

4) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x}=0$;

5) $x^2+y^2+5=4x+2y$;

6) $3x^2+y^2+2z^2=4y-6x-12z-25$.

4. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}=2$; 2) $x+\sqrt{x}+x^9=3$;

3) $2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}=5-x$; 4) $\sqrt{x-2}+x=\frac{40}{x-1}$;

5) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+2}=\frac{10}{x}$; 6) $2x+\sqrt{x}=\sqrt{10-x}$.

5*. Oldd meg az egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} x+x^5=y+y^5, \\ x^2+3y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{-x}-x=\sqrt{-y}-y, \\ x^3+y^3=-16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3-y^3=y^5-x^5, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{-3x}-\sqrt{-3y}=x-y, \\ 3x^2-y^2=8! \end{cases}$

4. §. EGYENLŐTLENSÉGEK: EKVIVALENS ÁTALAKÍTÁSOK ÉS AZ ÁLTALÁNOS INTERVALLUM-MÓDSZER

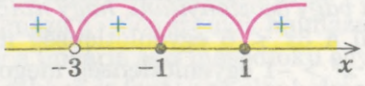
11. táblázat

1. A változót tartalmazó egyenlőtlenség fogalma és megoldásaik	
Meghatározás	Példa
Ha két változót tartalmazó kifejezést a $>$, $<$, $\leqslant$, $\geqslant$ jellel kapcsolunk össze, akkor *változót tartalmazó egyenlőtlenséget* kapunk. Általános alakban az egy x változót tartalmazó egyenlőtlenséget (például a „nagyobb” esetre) így írják fel: $f(x) > g(x)$.	$3x < 1$ – lineáris egyenlőtlenség; $x^2 - 3x + 2 > 0$ – másodfokú egyenlőtlenség; $\frac{x-5}{2x+4} < 1$ – törtes egyenlőtlenség.
***Az egyváltozós egyenlőtlenség megoldásának* a változó azon értékét nevezzük, amely az adott egyenlőtlenséget igaz számegyenlőtlenséggé alakítja.** *Megoldani az egyenlőtlenséget azt jelenti, hogy meghatározni az összes megoldását vagy bebizonyítani, hogy nem létezik megoldása.*	$x = 4$ a $2x - 3 > x$ egyenlőtlenség egyik gyöke, mert $x = 4$ esetén a $2 \cdot 4 - 3 > 4$ vagy $5 > 4$ igaz egyenlőtlenséget kapunk.
2. A megengedett értékek halmaza	
Az egyenlőtlenség *megengedett értékei halmazának* (vagy értelmezési tartományának) az egyenlőtlenség jobb és bal oldalán álló $f(x)$ és $g(x)$ függvények közös értelmezési tartományát nevezzük.	A $\sqrt{x+2} < x$ egyenlőtlenségnek a megengedett értékek halmaza az $x + 2 \geqslant 0$, vagyis $x \geqslant -2$, mert az $f(x) = \sqrt{x+2}$ függvény értelmezési tartományát az $x + 2 \geqslant 0$ feltétel adja meg, a $g(x) = x$ függvénynek pedig a valós számok halmaza.
3. Ekvivalens egyenlőtlenségek	
Meghatározás	Legegyszerűbb tételek
Két egyenlőtlenséget valamely halmazon *ekvivalensnek* (egyenértékűnek) nevezünk, ha ezen a halmazon ugyanazok lesznek a megoldásaik,	**1. Ha az egyenlőtlenség egyik oldaláról a tagokat ellenkező előjellel átviszszük a másik oldalra, akkor az eredetivel egyenértékű egyenlőtlenséget kapunk (bármilyen halmazon).**

A 11. táblázat folytatása

vagyis ha az első egyenlőtlenség minden megoldása a másodiknak is megoldása, és fordítva, ha a második egyenlőtlenség minden megoldása az elsőnek is megoldása.	**2. Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosszuk ugyanazzal a pozitív számmal** (*vagy ugyanazzal a függvénnyel, mely pozitív az adott egyenlőtlenség megengedett értékeinek a halmazán*), **nem változtatva az egyenlőtlenség irányát, akkor az adott egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk (az adott egyenlőtlenség megengedett értékeinek a halmazán).**
	3. Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk, vagy elosszuk ugyanazzal a negatív számmal (*vagy ugyanazzal a függvénnyel, mely negatív az adott egyenlőtlenség megengedett értékeinek a halmazán*), **és ellenkezőjére változtatjuk az egyenlőtlenség jelét, akkor az adott egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk (az adott egyenlőtlenség megengedett értékeinek a halmazán).**

4. Intervallum módszer
(az $f(x) \gtrless 0$ típusú egyenlőtlenségek megoldása)

Terv	Példa
1. A megengedett értékek halmazának (alaphalmaz) meghatározása. **2. Az $f(x) = 0$ függvény zérushelyeinek meghatározása.** **3. A zérushelyek megjelölése és az $f(x)$ függvény előjeleinek meghatározása az alaphalmaz azon részein, amelyek a zérushelyek jelölésével keletkeznek.** **4. Felelet felírása az adott egyenlőtlenség irányának figyelembevételével.**	Oldjuk meg az $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0$ egyenlőtlenséget! ▶ Legyen $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+3)^2}$. 1. A megengedett értékek halmaza: $(x+3)^2 \neq 0$, vagyis $x \neq -3$. 2. Zérushelyek: $f(x) = 0$. $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} = 0,\ x^2-1=0,$ $x_1 = -1, x_2 = 1$ (a megengedett értékek halmazához tartoznak). 3.  *Felelet:* $(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)$.

A 11. táblázat folytatása

5. Az egyenlőtlenség-megoldás lépései

Az egyenlőtlenség megoldása

ekvivalens átalakítások alkalmazásával	az **intervallum-módszer** alkalmazásával ($f(x) \gtrless 0$)
Figyelembe venni az adott egyenlőtlenség megengedett értékeinek halmazát.	1. Meghatározni a megengedett értékek halmazát. 2. Meghatározni a zérushelyeket: $f(x) = 0$. 3. Megjelölni a zérushelyeket és meghatározni az $f(x)$ függvény előjeleit a megengedett értékek halmazának azon részein, amelyek a zérushelyek jelölésével keletkeznek. 4. Felírni a feleletet, figyelembe véve az adott egyenlőtlenség irányát.
① ↓↑ ② **Megőrizni a megengedett értékeinek halmazán az egyenlőtlenség igaz voltát az egyenes és a fordított átalakításoknál.**	

① – az eredeti egyenlőtlenség;

② – az eredeti egyenlőtlenség átalakítása után kapott egyenlőtlenség;

↓, ↑ – az átalakítás szimbolikus jelölése (a végrehajtás irányát is jelöli)

Magyarázat és indoklás

1. Az egyváltozós egyenlőtlenség fogalma és megoldása. Ha két, változót tartalmazó kifejezés a $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$ jelekkel van összekapcsolva, akkor változót tartalmazó egyenlőtlenségről beszélünk.

Az egyenletekhez hasonlóan a változót tartalmazó egyenlőtlenségen is (például $>$) egy olyan feladat analitikus (képlet alakú) felírását értjük, amelynek során az argumentum azon értékeit kell meghatároznunk, amelyek esetén az egyik megadott függvényérték nagyobb a másik függvény értékénél. Ezért az egyváltozós egyenlőtlenséget az x változóra (a „nagyobb" esetben) így írjuk fel: $f(x) > g(x)$.

Emlékeztetünk arra, hogy *az egyenlőtlenség megoldásának a változó azon értékeit nevezzük, melyek ezt az egyenlőtlenséget igaz számegyenlőtlenséggé alakítják.*

Az egyenlőtlenséget megoldani annyit jelent, mint meghatározni mindegyik megoldását vagy bebizonyítani, hogy nincs megoldása.

Például a $3x < 6$ egyenlőtlenség megoldása minden 2-nél kisebb szám ($x < 2$), az $x^2 > -1$ egyenlőtlenség megoldása minden valós szám ($x \in \boldsymbol{R}$), az $x^2 < -1$ egyenlőtlenségnek pedig nincs megoldása, mert az x^2 nem lehet negatív szám, mely kisebb -1-nél.

2. Az egyenlőtlenség megengedett értékeinek halmazát (alaphalmazát) az egyenlet alaphalmazához hasonlóan határozzák meg. Ha adott az $f(x) > g(x)$ egyenlőtlenség, akkor az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények értelmezési tartományainak közös részét az adott egyenlőtlenség alaphalmazának nevezzük (néha az „egyenlőtlenség értelmezési tartománya" kifejezést is szokták alkalmazni). Például az $x^2 < x$ egyenlőtlenség alaphalmaza a valós halmaza (ez felírható így is: $x \in \boldsymbol{R}$), mivel mind az $f(x) = x^2$, mind a $g(x) = x$ függvények értelmezési tartományai $x \in \boldsymbol{R}$.

Nyilvánvaló, hogy az adott egyenlőtlenség mindegyik megoldása hozzátartozik az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények alaphalmazaihoz (különben nem kaphatnánk igaz számegyenlőtlenséget). Tehát *az egyenlőtlenség valamennyi megoldása feltétlen hozzátartozik ennek az egyenlőtlenségnek alaphalmazához.* Az alaphalmaz vizsgálata egyes esetekben megkönnyíti az egyenlet gyökeinek meghatározását.

Például a $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x} > x$ egyenlőtlenségnél $g(x) = x$ függvény értelmezve van az x bármely értékénél, de az $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}$ csak abban az esetben van értelmezve, ha a négyzetgyök alatt nemnegatív szám áll. Tehát az alaphalmazt az $\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant 0 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszer adja meg, melyből az $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \leqslant 2 \end{cases}$ rendszert kapjuk. Amint azt látjuk, ennek nincs megoldása. Tehát az adott egyenlőtlenség alaphalmaza egyetlen számot sem tartalmaz, ezért ennek az egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

Általában különböző típusú egyenlőtlenségek megoldásánál a következő két módszer egyikét kell alkalmazni: az egyenlőtlenségek ekvivalens átalakítását vagy az úgynevezett intervallum-módszert.

3. Ekvivalens egyenletek. Az egyenlőtlenségek ekvivalenciájának fogalmával már a 9. osztályban megismerkedtetek. Az egyenletek ekvivalenciájához hasonlóan az egyenlőtlenségek ekvivalenciáját is egy adott halmazon fogjuk vizsgálni.

Két egyenlőtlenséget egy adott halmazon ekvivalensnek nevezzük, ha ezen a halmazon ugyanazok lesznek a megoldásaik, vagyis ha az első egyenlőtlenség minden megoldása a másodiknak is megoldása, és fordítva, ha a második egyenlőtlenség minden megoldása az elsőnek is megoldása.

Megállapodunk abban, hogy ezután **az egyenlőtlenségek ekvivalens átalakítását az adott egyenlőtlenség alaphalmazán fogjuk végrehajtani.** Ha az adott egyenlőtlenség alaphalmaza a valós számok halmaza, akkor ezt nem mindig fogjuk felírni (mint ahogy a lineáris és a másodfokú egyenleteknél sem írjuk fel az alaphalmazt). Más esetekben is fontos az alaphalmaz figyelembevétele, például az adott egyenlőtlenség ekvivalens átalakítása során.

Az egyenlőtlenségek megoldásának általános menete hasonló a megfelelő egyenletek megoldásának menetéhez.

Amint már fentebb szóltunk róla, az *egyenlőtlenségek ekvivalens átalakításánál* **figyelembe kell venni az adott egyenlőtlenség alaphalmazát.** Ez az egyenlőtlenségek ekvivalens átalakításának az első fogódzója, alapszabálya.

Az ekvivalens egyenlőtlenségek definíciója alapján el kell érni, hogy az első egyenlőtlenség mindegyik megoldása a második egyenlőtlenségnek is megoldása legyen, és fordítva, a második egyenlőtlenség mindegyik megoldása az elsőnek is megoldása legyen. Ehhez **arra kell ügyelni, hogy az egyenlőtlenség igaz maradjon mind az egyenes, mind a fordított átalakítások során.** Ez a második alapszabály az egyenlőtlenségek ekvivalens átalakításánál. Valóban, az egyenlőtlenség mindegyik megoldása egy igaz számegyenlőtlenséggé alakítja azt át, és ha az egyenlőtlenség igaz marad, akkor mindegyik egyenlőtlenség megoldása a másiknak is megoldása, tehát az egyenlőtlenségek ekvivalensek (a megfelelő szabályok vázlatosan a 11. táblázat 5. pontjában találhatók).

Ahhoz, hogy ekvivalens átalakítások alkalmazásával oldjuk meg az

$$\frac{x-3}{x+1}>0 \qquad (1)$$

egyenlőtlenséget, elegendő az alaphalmaz figyelembevétele: $x+1\neq 0$, és a tört pozitív voltának a feltétele (*a tört akkor és csakis akkor pozitív, ha a számlálójának és a nevezőjének az előjelei megegyeznek*). A megoldáskor arra is figyelni kell, hogy minden szükséges átalakítást egyenes és fordított irányban is végre lehessen hajtani az alaphalmazon, az egyenlőtlenség igaz voltának megmaradása mellett.

Megoldás

▶ Az adott egyenlőtlenség egyenértékű a következő két egyenlőtlenség-halmazzal:

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x+1>0 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} x-3<0, \\ x+1<0. \end{cases} \qquad (2)$$

Ebből megkapjuk, hogy $\begin{cases} x>3, \\ x>-1 \end{cases}$ vagy $\begin{cases} x<3, \\ x<-1. \end{cases}$

Tehát, $x>3$ vagy $x<-1$.

Felelet: $(-\infty; -1)\cup(3; +\infty)$.◁

Magyarázat

Megjegyezzük, hogy amikor felírjuk a pozitív tört feltételét vagyis a (2) egyenlőtlenség-halmazokat, ekkor észrevétlenül figyelembe vettük az (1) egyenlőtlenség alaphalmazát. Valóban, ha $x+1>0$ vagy $x+1<0$, akkor $x+1\neq 0$, ezért az adott egyenlőtlenség alaphalmaza a megoldás során nincs külön felírva.

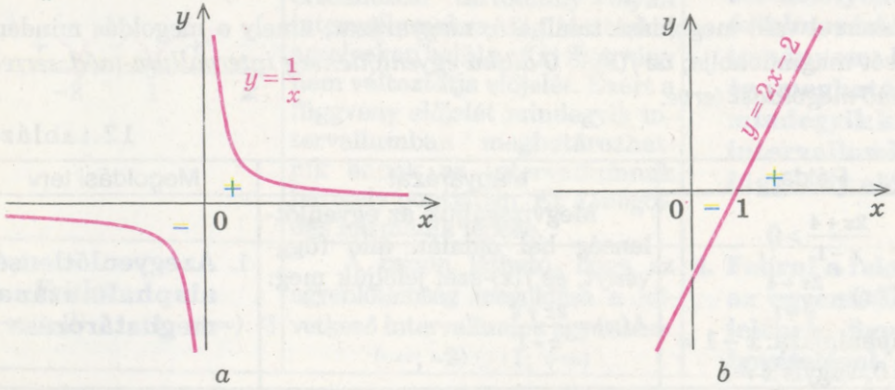
A fenti általános szabályokon kívül az egyenlőtlenségek ekvivalens átalakításai során alkalmazni lehet még az ekvivalencia speciális tételeit is. Az ekvivalens egyenlőtlenségek meghatározásának pontosításához általánosítjuk az ekvivalens egyenlőtlenségekről a 9. osztályban megismert tételeket.

1. ***Ha az egyenlőtlenség egyik oldaláról a tagokat ellenkező előjellel átvisszük az egyenlőtlenség másik oldalára, akkor az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk (bármilyen halmazon).***
2. ***Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosztjuk ugyanazzal a pozitív számmal (vagy ugyanazzal a függvénnyel, amely az adott egyenlőtlenség alaphalmazán pozitív), nem változtatva az egyenlőtlenség irányát, akkor az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk (az eredeti alaphalmazán).***
3. ***Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk vagy elosszuk ugyanazzal a negatív számmal (vagy ugyanazzal a függvénnyel, amely az adott egyenlőtlenség alaphalmazán negatív), megváltoztatva ellenkezőre az egyenlőtlenség irányát, akkor az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk (az eredeti alaphalmazán).***

Ezeknek a tételeknek a magyarázata teljesen megegyezik az adott egyenlőtlenség ekvivalens átalakításáról szóló alapszabályainak a magyarázataival.

Megjegyzés. Az áttérésre az eredeti egyenlettől egy vele ekvivalens egyenlethez a $\Leftrightarrow$ speciális jelet használjuk, de a megoldás során nem kötelező ennek a jelnek a használata (mi néha fogjuk alkalmazni, hogy aláhúzzuk az ekvivalens átalakítás alkalmazását).

4. Intervallum-módszer. Az egyenlőtlenségek megoldása intervallum-módszerrel a függvény azon tulajdonságán alapszik, hogy a függvény bizonyos esetekben előjelet vált. E tulajdonságokat az ismert függvények, például az $y = \frac{1}{x}$ és az $y = 2x - 2$ grafikonjai alapján magyarázzuk meg (53. ábra).



53. ábra

A grafikonok vizsgálata során észrevehetjük, hogy a függvények előjelei csak két esetben változhatnak meg:

1) ha a grafikonnak szakadási helye van (az $y=\frac{1}{x}$ (53. *a* ábra) függvény grafikonjának szakadása helye a 0 pontban van, és az előjele is változik ebben a pontban);

2) ha a függvény grafikonja folytonos módon halad át az alsó félsíkból a felsőbe (vagy fordítva), akkor a függvény (az $y = 2x - 2$ függvényhez hasonlóan) metszi az *Ox* tengelyt (53. *b* ábra). Az *Ox* tengelyen a függvény értéke nullával egyenlő. (Emlékeztetünk arra is, hogy az argumentum azon értékeit, melyben a függvény értéke nulla, *a függvény zérushelyeinek* nevezzük.) Tehát **bármely függvény előjelet csak a zérushelyein és a szakadási helyein[1] válthat.**

Az $f(x)$ függvény szakadási pontjait általában az adott függvény értelmezési tartományának meghatározása során jelöljük ki. Például az $f(x)=\frac{1}{x}$ függvény értelmezési tartománya az $x \neq 0$, éppen ezért a 0 pont a függvény szakadási helye (51. *a* ábra). Ha a függvény értelmezési tartományának valamely intervallumán a függvény grafikonja nem szakad meg és nem egyenlő nullával sem, akkor a fentiekből az következik, hogy ebben az intervallumban a függvény nem változtatja meg az előjelét sem.[2] Tehát, ha az értelmezési tartományon ábrázoljuk a függvény zérushelyeit, akkor az értelmezési tartományt olyan intervallumokra bontjuk fel, amelyen belül a függvény nem változtathatja meg az előjelét (és ezért ezt az előjelet az intervallum bármely pontjában meghatározhatjuk).

A 12. táblázatban a $\frac{2x+4}{x-1}>0$ törtes racionális egyenlőtlenség intervallum-módszerrel való megoldása található; magyarázat, amely a megoldás minden lépését megindokolja; *az $f(x) \geq 0$ alakú egyenlőtlenség intervallum-módszerrel történő megoldási terve.*

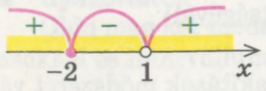
12. táblázat

Példa	Magyarázat	Megoldási terv
$\frac{2x+4}{x-1}>0$ ▶ $f(x)=\frac{2x+4}{x-1}$ 1. Alaphalmaza: $x-1 \neq 0$, vagyis $x \neq 1$	Megvizsgáljuk az egyenlőtlenség bal oldalán álló függvényt, és $f(x)$-szel jelöljük meg: $f(x)=\frac{2x+4}{x-1}$	**1. Az egyenlőtlenség alaphalmazának meghatározása**

[1] Ezzel a fogalommal részletesebben a 11. osztályban fogunk foglalkozni.

[2] A 11. osztályban pontosítjuk ennek a tulajdonságnak a megfogalmazását (az úgynevezett folytonos függvények segítségével). Az általatok ismert függvényekre (lineáris, másodfokú, tört-racionális) ez a tulajdonság alkalmazható.

A 12. táblázat folytatása

	Az $f(x) > 0$ egyenlőtlenségnek csak azok a számok lehetnek a megoldásai, melyek hozzátartoznak az $f(x)$ függvény értelmezési tartományához, és az alaphalmazához is. Ezért az intervallum-módszerrel való megoldás első lépése az alaphalmaz meghatározása.	
2. Az $f(x)$ függvény zérushelyei: $(f(x) = 0)$. $\frac{2x+4}{x-1} = 0,$ ekkor $x = -2$.	Bennünket az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának azok az intervallumai érdekelnek, melyekben a függvény pozitív. Mint ahogy fentebb már említettük, az $f(x)$ függvény előjelet válthat a zérushelyeiben, ezért az $f(x) > 0$ egyenlőtlenség megoldásakor a második lépés a függvény zérushelyeinek a meghatározása lesz (ehhez az $f(x)$ függvényt a nullával teszszük egyenlővé és megoldjuk a kapott egyenletet).	**2. Meghatározni az $f(x)$ függvény zérushelyeit $(f(x) = 0)$**
3. 	Ha most az $f(x)$ függvény értelmezési tartományán jelöljük a zérushelyeket, akkor az értelmezési tartomány olyan intervallumokra fog osztódni, amelyeken belül az $f(x)$ függvény nem változtatja előjelét. Ezért a függvény előjelét mindegyik intervallumban meghatározhatjuk ennek az intervallumnak bármely pontjában. Ez a megoldás harmadik lépése.	**3. Megjelölni a zérushelyeket az értelmezési tartományon belül, és meghatározni mindegyik kapott intervallumban a függvény előjelét**
4. *Felelet:* $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. ◁	A rajzon látható, hogy az egyenlőtlenség megoldása a következő intervallumok egyesítése: $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$	**4. Felírni a feleletet, az egyenlőtlenség jelének figyelembevételével.**

Nehezebb tört-racionális egyenlőtlenség példáján mutatjuk be az egyenlőtlenségek megoldását intervallum-módszerrel, illetve az ekvivalens átalakítások módszerével.

Példa. Oldjuk meg az $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \leqslant 0$ egyenlőtlenséget!

I. módszer (intervallum-módszer)

Megoldás

▶ Legyen $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

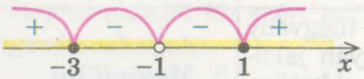
1 A függvény alaphalmaza: $x \neq -1$.

2. Az $f(x)$ zérushelyei: $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = 0$,

$x^2 + 2x - 3 = 0$,

$x_1 = 1$, $x_2 = -3$ (az alaphalmaz elemei).

3. Megjelöljük a függvény zérushelyeit az alaphalmazon és meghatározzuk az $f(x)$ függvény előjeleit azokon az intervallumokon, melyek a megengedett értékek halmazán keletkeznek.



4. *Felelet:* $[-3; -1) \cup (-1; 1]$. ◁

Magyarázat

Az adott egyenletnek az általános alakja $f(x) \leqslant 0$, ezért megoldásához alkalmazhatjuk az intervallum-módszert. Ehhez a fenti tervet és a 10. táblázatot alkalmazzuk.

Az $f(x)$ függvény zérushelyeinek a meghatározásánál vigyáznunk kell arra, hogy a meghatározott értékek a megengedett értékek halmazához tartozzanak (vagy végrehajtjuk az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeinek az ellenőrzését).

A nem szigorú egyenlőtlenség feleletének felírásánál figyelni kell arra is, hogy mindegyik zérushelynek hozzá kell tartoznia a felelethez (az adott esetben a -3 és 1 számoknak is).

II. módszer (ekvivalens átalakítások segítségével)

Magyarázat

Az egyenlőtlenség megoldásához az ekvivalens átalakítások módszerét választjuk. Az ekvivalens átalakítások során figyelnünk kell az adott egyenlőtlenség megengedett értékeinek a halmazára, vagyis figyelembe kell venni, hogy $(x + 1)^2 \neq 0$.

Azonban ha $x \neq -1$, akkor $(x + 1)^2 > 0$, és ekkor az adott tört nevezője pozitív. Ha fennáll az adott egyenlőtlenség, akkor a tört számlálója $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ (és fordítva, ha az utóbbi egyenlőtlenség teljesül, akkor a tört megengedett értékeinek a halmazán $\left.\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \leqslant 0\right)$, vagyis az adott egyenlőtlenség a megengedett értékeinek halmazán ekvivalens az $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ egyenlőtlenséggel.

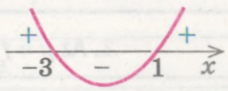
Ahhoz, hogy megoldjuk a másodfokú egyenlőtlenséget, meghatározzuk az $x^2 + 2x - 3$ másodfokú polinom gyökeit, és megrajzoljuk az $y = x^2 + 2x - 3$ függvény grafikonját. A másodfokú egyenlőtlenség megoldása: $-3 \leqslant x \leqslant 1$.

Mivel minden átalakítás csak a megengedett értékek halmazán volt ekvivalens, ezért a másodfokú egyenlőtlenségnek csak azokat a megoldásait kell kiválasztani, amelyek hozzátartoznak a megengedett értékek halmazához.

Megoldás

▶ Megengedett értékeinek a halmaza: $(x + 1)^2 \neq 0$, tehát $x \neq -1$.

Ekkor $(x + 1)^2 > 0$ és az adott egyenlőtlenség a megengedett értékeinek a halmazán ekvivalens az $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ egyenlőtlenséggel. Mivel $x^2 + 2x - 3 = 0$, ha $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ (ezek az x értékek a megengedett értékek halmazához tartoznak), megkapjuk, hogy $-3 \leqslant x \leqslant 1$.



Figyelembe véve a megengedett értékek halmazát, megkapjuk a feleletet.

Felelet: $[-3; -1) \cup (-1; 1]$. ◁

Ellenőrző kérdések

1. Magyarázd meg példákon a következő fogalmak jelentését: „egyenlőtlenség megoldása", „megoldani az egyenlőtlenséget", „az egyenlőtlenség megengedett értékeinek a halmaza", „ekvivalens egyenlőtlenségek"!
2. Fogalmazd meg az ekvivalens egyenlőtlenségekről szóló tételeket! Mondj példát!
3. Fogalmazd meg az egyenlőtlenségek intervallum-módszerrel történő megoldásának menetét! Mondj példát a módszer alkalmazására!
4. Magyarázd meg példákon, hogyan hajtható végre az egyenlőtlenségek ekvivalens átalakítása azokban az esetekben, melyekben nem alkalmazhatóak az ekvivalens egyenlőtlenségekről szóló ismert tételek!

Gyakorlatok

Oldd meg két módszerrel az **(1–2.)** egyenlőtlenségeket: ekvivalens átalakításokkal és intervallum-módszerrel!

1°. 1) $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-4} \geqslant 0$; 2) $\dfrac{2}{x+2} < \dfrac{1}{x-3}$;

3) $\dfrac{x^2-25}{(x+5)(x-4)} \leqslant 0$; 4) $\dfrac{x^2+12}{x^2-2x-8} \geqslant 1$.

2°. 1) $x^4 - 5x^2 + 4 \leqslant 0$; 2) $9x^4 - 10x^2 + 1 > 0$;

3) $\dfrac{81}{x} \geqslant x^3$; 4) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) < 105$.

3°. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-4}}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{2x-x^2-1}{x^2+3x+2}}$;

3) $y = \sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}}$; 4) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

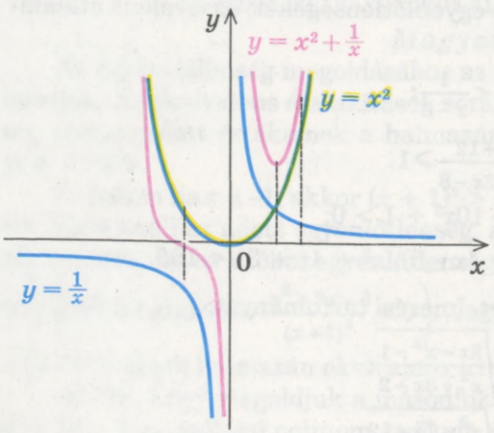
5. §. KÉTVÁLTOZÓS EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK GRAFIKONJAI

13. táblázat

1. Az $y = f(x) + g(x)$ alakú függvények grafikonjainak ábrázolása

Ha ismert az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ függvények grafikonjai, akkor az $y = f(x) + g(x)$ függvény grafikonjának vázlata a következőképpen rajzolható meg: egyazon koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények grafikonjait, és ezután a keresett grafikont a pontjai alapján ábrázoljuk az x minden értékére (az $f(x) + g(x)$ függvény értelmezési tartományán), végrehajtva a szükséges műveletet az $f(x)$ és a $g(x)$ megfelelő ordinátáit ábrázoló szakaszokkal.

Hasonlóan ábrázolhatók az $y = f(x) \cdot g(x)$ és az $y = \frac{1}{f(x)}$ függvények grafikonjai is.

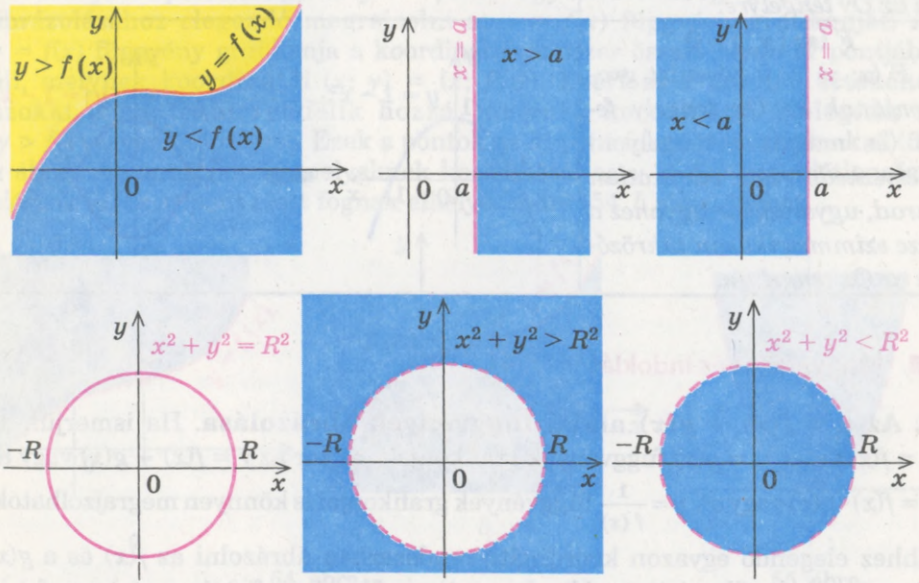
Példa	Magyarázat
Ábrázoljuk az $y = x^2 + \frac{1}{x}$ függvény grafikonját! 	Ábrázoljuk ugyanabban a koordináta-rendszerben az összeadandó függvények grafikonjait: $y = x^2$ és $y = \frac{1}{x}$ (a rajzon szaggatott vonallal jelölve). Az x minden értékére (az $x = 0$ kivételével, amely nem tartozik az adott függvény értelmezési tartományához) összeadjuk a megfelelő szakaszokat, azaz a megfelelő függvényértékeket (az Oy tengelytől jobbra) vagy kivonjuk, ha az $f(x)$ és a $g(x)$ értékei ellenkező előjelűek (az adott esetben az Oy tengelytől balra). A rajzon piros vonallal van ábrázolva az eredmény – az $y = x^2 + \frac{1}{x}$ függvény grafikonja

A 13. táblázat folytatása

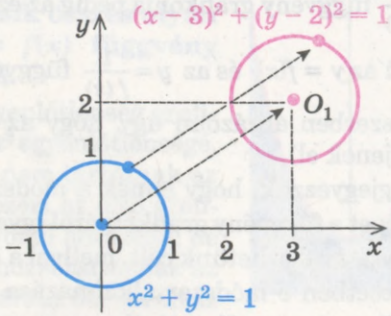
2. Kétváltozós egyenletek és egyenlőtlenségek grafikonjai

Meghatározás. ***Az x és y változókat tartalmazó kétváltozós egyenlet (egyenlőtlenség) grafikonjának* az összes olyan (x; y) koordinátájú ponthalmazt nevezzük, ahol az (x; y) számpárok megoldásai a megfelelő egyenletnek (egyenlőtlenségnek).**

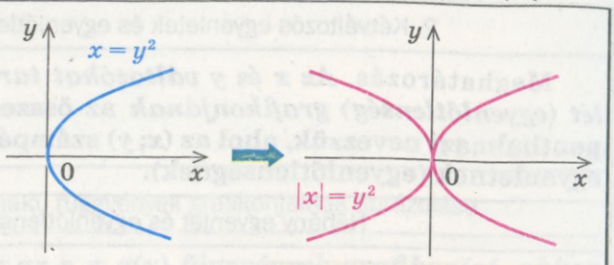
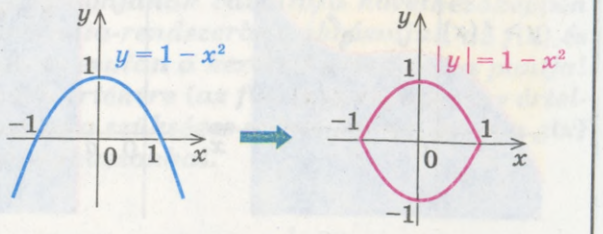
Néhány egyenlet és egyenlőtlenség grafikonja



3. Az $F(x; y) = 0$ egyenlet geometriai transzformációi

Transzformáció	Példa
$F(x - a; y - b) = 0$ Az $F(x; y) = 0$ egyenlet grafikonjának $\bar{n}(a; b)$ *vektorral való párhuzamos eltolása*	

A 13. táblázat folytatása

$F(\|x\|; y) = 0$ Az $F(x; y) = 0$ *egyenlet grafikonjának az Oy tengelytől jobbra* (és magán a tengelyen) *elhelyezkedő része változatlan marad, ugyanakkor ugyanez a része szimmetrikusan tükröződik az Oy tengelyre.*	
$F(x; \|y\|) = 0$ Az $F(x; y) = 0$ *egyenlet grafikonjának az Ox tengely felett* (és magán a tengelyen) *elhelyezkedő része változatlan marad, ugyanakkor ugyanez a része szimmetrikusan tükröződik az Ox tengelyre.*	

Magyarázat és indoklás

1. Az $y = f(x) + g(x)$ alakú függvények ábrázolása. Ha ismerjük az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ függvények grafikonjait, akkor az $y = f(x) + g(x)$ vagy az $y = f(x) \cdot g(x)$ vagy az $y = \frac{1}{f(x)}$ függvények grafikonjai is könnyen megrajzolhatók.

Ehhez elegendő egyazon koordináta-rendszerben ábrázolni az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények grafikonjait, majd a keresett grafikont az $f(x)$ és a $g(x)$ megfelelő függvényértékeinek összeadásával kapjuk meg.

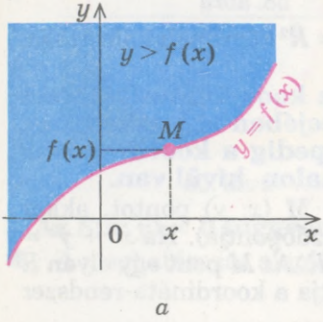
A 13. táblázatban az $y = f(x) + g(x)$ alakú függvény grafikonja látható, az $y = \frac{1}{f(x)}$ függvény grafikonja pedig az ezt követő 1. példában (az utóbbi esetben célszerű az $y = f(x)$ és az $y = \frac{1}{f(x)}$ függvények grafikonjait különböző koordináta-rendszerben ábrázolni úgy, hogy az ordinátatengelyeik egy egyenesen helyezkedjenek el).

Megjegyezzük, hogy ennek a módszernek az alkalmazása nem mindig ad teljes képet a függvény grafikonjáról (gyakran csak a speciális függvényvizsgálat alkalmazásával érhetünk célt, mellyel a 11. osztályban fogunk megismerkedni), de sok esetben e módszer alkalmazása elegendő arra, hogy elképzelésünk legyen a függvény grafikonjáról.

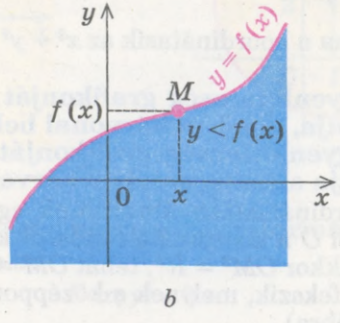
2. Kétváltozós egyenletek és egyenlőtlenségek grafikonjai. A kétváltozós egyenlet grafikonjával már korábbi tanulmányaitok során megismerkedtetek. Hozzá hasonlóan kerül bevezetésre a kétváltozós egyenlőtlenség grafikonja is. Megadjuk ezeknek a grafikonoknak a közös definícióját:

***Az x és y változókat tartalmazó kétváltozós egyenlet (egyenlőtlenség) grafikonjának* az összes olyan $(x; y)$ koordinátájú ponthalmazt nevezzük, ahol az $(x; y)$ számpárok megoldásai a megfelelő egyenletnek (egyenlőtlenségnek).**

● Az $y > f(x)$ (vagy a $y < f(x)$) egyenlőtlenség grafikonjának ábrázolásához elegendő megrajzolni az $y = f(x)$ függvény grafikonját. Az $y = f(x)$ függvény grafikonja a koordináta-rendszer összes olyan M pontjából áll, melynek koordinátái $(x; y) = (x; f(x))$. Ezért az x minden értékéhez azokat a pontokat rendelik hozzá, melynek koordinátái kielégítik az $y > f(x)$ egyenlőtlenséget. Ezek a pontok az M pont felett helyezkednek el (54. *a* ábra). Azok a pontok, melyeknek koordinátái az $y < f(x)$ egyenlőtlenséget elégítik ki, az M pont alatt fognak elhelyezkedni (54. *b* ábra). Tehát,

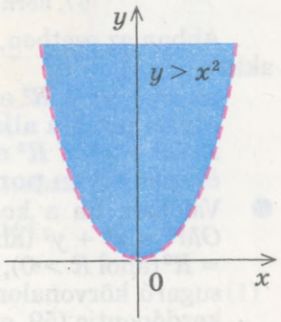


a



b

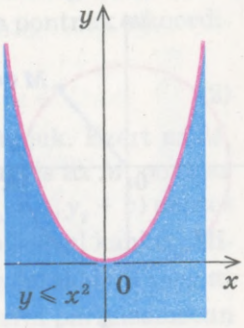
54. ábra



55. ábra

az $y > f(x)$ egyenlőtlenség grafikonja a koordinátasík összes olyan pontjából áll, amely az $y = f(x)$ függvény grafikonja felett helyezkedik el, az $y < f(x)$ egyenlőtlenség grafikonja pedig a koordinátasík összes olyan pontjából áll, amely az $y = f(x)$ függvény grafikonja alatt helyezkedik el. ○

Az 55. ábrán például az $y > x^2$ egyenlőtlenség grafikonja látható, az 56. ábrán pedig az $y \leqslant x^2$ egyenlőtlenségé. Mivel az $y = x^2$ grafikonjának pontjai nem tartoznak az $y > x^2$ egyenlőtlenség grafikonjához, ezért az első grafikonon az $y = x^2$ parabolát szaggatott vonal ábrázolja; de mivel az $y = x^2$ grafikonjának pontjai hozzátartoznak az $y \leqslant x^2$ egyenlőtlenség grafikonjához, ezért az 56. ábrán az $y = x^2$ parabola folytonos vonallal van ábrázolva.

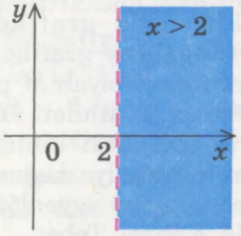


56. ábra

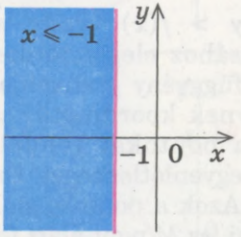
Hasonlóképpen, ha a koordinátasík $x = a$ egyenest ábrázolja, akkor

az $x > a$ egyenlőtlenség grafikonját a koordinátasík összes olyan pontja alkotja, melyek ettől az egyenestől jobbra helyezkednek el, az $x < a$ egyenlőtlenség grafikonját pedig a koordinátasík összes olyan pontja alkotja, melyek ettől az egyenestől balra helyezkednek el.

Az 57. ábrán például az $x > 2$ egyenlőtlenség grafikonja látható, az 58. ábrán pedig az $x \leqslant -1$ egyenlőtlenség grafikonja.



57. ábra



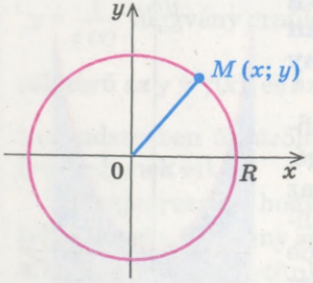
58. ábra

Abban az esetben, ha a koordinátasík az $x^2 + y^2 = R^2$ körvonalat ábrázolja, akkor

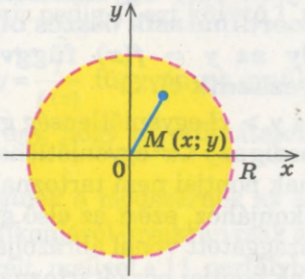
az $x^2 + y^2 < R^2$ egyenlőtlenség grafikonját a koordinátasík összes olyan pontja alkotja, amely a körvonal belsejében helyezkedik el, az $x^2 + y^2 > R^2$ egyenlőtlenség grafikonját pedig a koordinátasík összes olyan pontja alkotja, amely a körvonalon kívül van.

Valóban, ha a koordinátasíkon ábrázolunk egy M $(x; y)$ pontot, akkor $OM^2 = x^2 + y^2$ (ahol O a koordináta-rendszer kezdőpontja). Ha $x^2 + y^2 = R^2$ (ahol $R > 0$), akkor $OM^2 = R^2$, tehát $OM = R$. Az M pont egy olyan R sugarú körvonalon fekszik, melynek a középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja (59. *a* ábra).

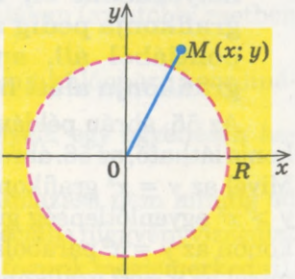
Ha $x^2 + y^2 < R^2$, akkor $OM^2 < R^2$, tehát $OM < R$. Vagyis az $x^2 + y^2 < R^2$ egyenlőtlenséget azoknak (és csak azoknak) a pontoknak a koordinátái elégítik ki, melyek az R sugarú körlap belsejében fekszenek, és amelynek a középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja is egyben (59. *b* ábra).



a



b

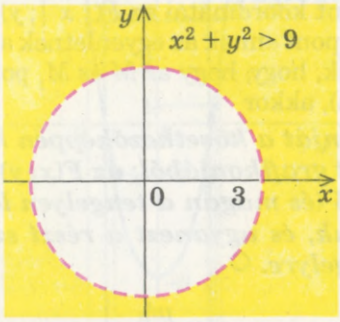


c

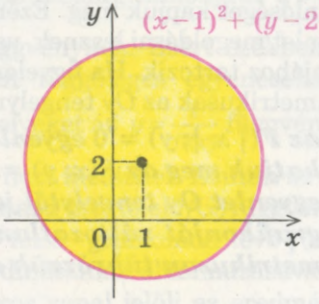
59. ábra

Ha $x^2 + y^2 > R^2$, akkor $OM^2 > R^2$, tehát $OM > R$. Vagyis az $x^2 + y^2 > R^2$ egyenlőtlenséget azoknak (és csak azoknak) a pontoknak a koordinátái elégítik ki, melyek az R sugarú körlapon kívül fekszenek, melynek a középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja (59. *c* ábra).

Hasonlóképpen, ha a síkon egy $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ körvonal van, akkor az $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$ egyenlőtlenség grafikonját a koordinátasík összes olyan pontja alkotja, melyek a körlap belsejében helyezkednek el, az $(x - a)^2 + (y - b)^2 > R^2$ egyenlőtlenség grafikonját pedig a koordinátasík összes olyan pontja, melyek a körlapon kívül helyezkednek el. A 60. ábra például az $x^2 + y^2 > 9$ egyenlőtlenség grafikonját ábrázolja, a 61. ábra pedig az $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 16$ egyenlőtlenség grafikonját ○



60. ábra



61. ábra

3. Az $F(x; y) = 0$ függvény geometriai transzformációi

● A meghatározás alapján az

$$F(x; y) = 0 \qquad (1)$$

egyenlet grafikonja a koordinátasík összes olyan $M(x_0; y_0)$ pontjából áll, melyek koordinátái $(x_0; y_0)$ az adott egyenlet megoldásai. Eszerint, ha az $(x_0; y_0)$ számpárt behelyettesítjük az adott egyenletbe, akkor az igaz számegyenlőséggé alakul át, vagyis az $F(x_0; y_0) = 0$ igaz egyenlőség lesz.

Vizsgáljuk meg az $M_1(x_0 + a; y_0 + b)$ pontot. Ha ennek a pontnak a koordinátáit behelyettesítjük az

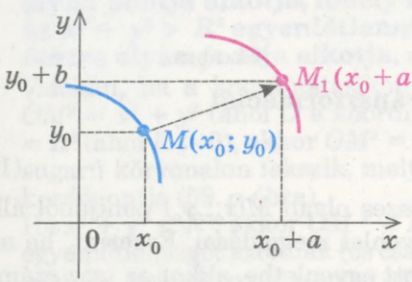
$$F(x - a; y - b) = 0, \qquad (2)$$

egyenletbe, akkor az $F(x_0; y_0) = 0$ igaz egyenlőséget kapjuk. Ezért az M_1 pont koordinátái a (2) egyenlet megoldásai lesznek, vagyis az M_1 pont az $F(x - a; y - b) = 0$ egyenlet grafikonján fekszik. Az $M_1(x_0 + a; y_0 + b)$ pontot az $M(x_0; y_0)$ pont $\overline{n}(a; b)$ vektorral való párhuzamos eltolásával kapjuk. Mivel az $F(x - a; y - b) = 0$ egyenlet minden M_1 pontját úgy kaphatjuk meg az $F(x; y) = 0$ egyenlet M pontjából, ha azt $\overline{n}(a; b)$ vektorral párhuzamosan eltoljuk (62. ábra), így a teljes

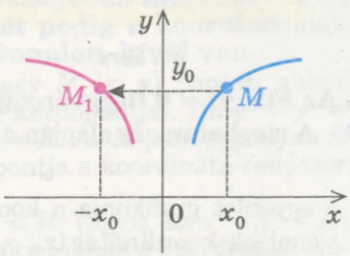
$F(x - a; y - b) = 0$ egyenlet grafikonja az $F(x; y) = 0$ egyenlet grafikonjából az $\bar{n}(a; b)$ vektor által megadott párhuzamos eltolás segítségével adható meg. ○

Az $F(x; y) = 0$ egyenlet grafikonja és az $F(|x|; y) = 0$ egyenlet grafikonja közötti kapcsolat megértéséhez elegendő megjegyezni azt, hogy $x \geqslant 0$ esetén az $F(|x|; y) = 0$ egyenlet megegyezik az $F(x; y) = 0$ egyenlettel. Tehát az Oy tengelytől jobbra, és magán a tengelyen is grafikonjaik egybeesnek. Legyen $M(x_0; y_0)$ (ahol $x_0 \geqslant 0$) pont ezeknek a grafikonoknak egy közös pontja. Ekkor az $F(x_0; y_0) = 0$ igaz egyenlőség. Tekintsük az $M_1(-x_0; y_0)$ pontot. Ha ennek a koordinátáit behelyettesítjük az $F(|x|; y) = 0$ egyenletbe, és figyelembe vesszük, hogy $x_0 \geqslant 0$, ekkor az $F(x_0; y_0) = 0$ igaz egyenlőséget kapjuk meg. Ezért az M_1 pont koordinátái az $F(|x|; y) = 0$ egyenlet megoldásai lesznek, vagyis az M_1 pont ennek az egyenletnek a grafikonjához tartozik. Ha figyelembe vesszük, hogy, hogy az M és M_1 pontok szimmetrikusak az Oy tengelyre (63. ábra), akkor

az $F(|x|; y) = 0$ egyenlet grafikonját a következőképpen kaphatjuk meg az $F(x; y) = 0$ egyenlet grafikonjából: az $F(x; y) = 0$ egyenlet Oy tengelytől jobbra lévő (és magán a tengelyen lévő) grafikonját változatlanul hagyjuk, és ugyanezt a részt szimmetrikusan tükrözzük az Oy tengelyre. ○



62. ábra



63. ábra

Hasonlóképpen magyarázható meg, hogy

az $F(x; |y|) = 0$ egyenlet grafikonját a következőképpen kaphatjuk meg az $F(x; y) = 0$ egyenlet grafikonjából: az $F(x; y) = 0$ egyenlet grafikonjának Ox tengely feletti részét (és magán a tengelyen lévőt is) változatlanul hagyjuk, és ugyanezt a részt szimmetrikusan tükrözzük az Ox tengelyre. ○

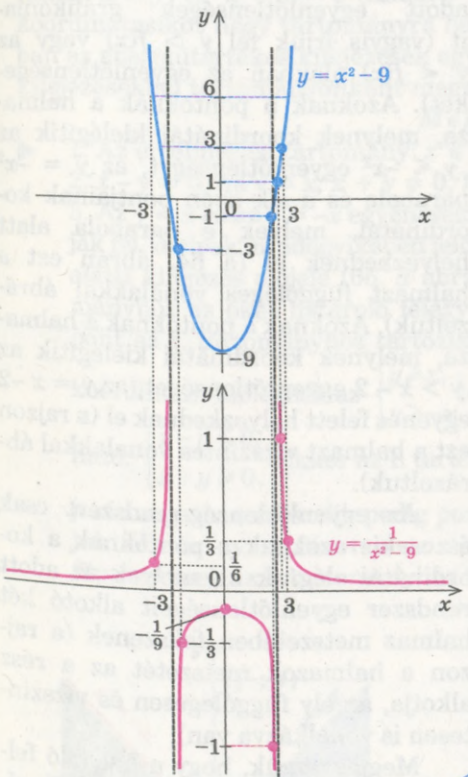
A 13. táblázatban megtalálhatóak az egyenletek grafikonjainak legegyszerűbb mértani transzformációi. A felsorolt összefüggéseket a következő feladattípusoknál alkalmazzák: az egyenletek és egyenlőtlenségek grafikus ábrázolásánál, vagy az adott egyenletet (egyenlőtlenséget) kielégítő ponthalmazok ábrázolásánál.

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Ábrázoljuk az $y = \frac{1}{x^2 - 9}$ függvény grafikonját!

Megoldás

▶ $x^2 - 9 = 0$, ha $x = \pm 3$. Ezért az adott függvény értelmezési tartománya: $x^2 - 9 \neq 0$, vagyis $x \neq \pm 3$.



◁

Magyarázat

Rajzoljunk két olyan koordinátarendszert, melynek ordinátatengelyei egy egyenesen fekszenek. Azokban a pontokban, melyben az $f(x) = x^2 - 9$ függvény nullával egyenlő ($x = \pm 3$), nem létezik grafikonja az $y = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 - 9}$ függvénynek. Ezért ezekben a pontokban függőleges egyeneseket húzunk, melyeket az $y = \frac{1}{f(x)}$ függvény grafikonja nem metszhet. Ezután az 1-et elosztjuk az x megfelelő $f(x)$ függvényértékével (a felső grafikonon lévő $f(x)$ függvény ordinátáinak alkalmazásával). A rajzon piros vonal jelöli az eredményt, vagyis $y = \frac{1}{x^2 - 9}$ függvény grafikonját. (E függvény grafikonjának ábrázolásához különböző beosztást alkalmaztunk az Ox és Oy tengelyeken.)

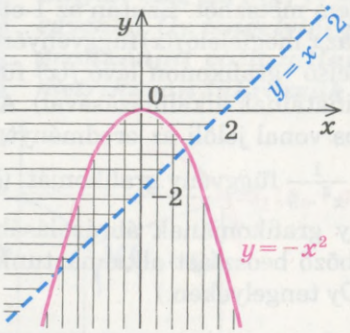
2. példa. A koordinátasíkon ábrázoljuk azoknak a pontoknak a halmazát, melyeknek a koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenségrendszert! $\begin{cases} x^2 + y \leqslant 0, \\ x - y < 2. \end{cases}$

Megoldás

▶ Az eredeti rendszer ekvivalens a következő egyenlőtlenség-rendszerrel:

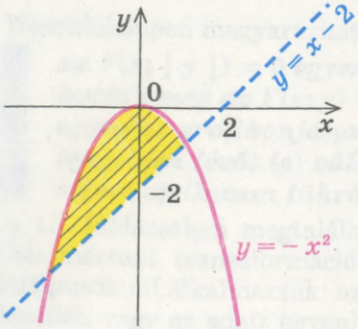
$$\begin{cases} y \leqslant -x^2, \\ y > x - 2. \end{cases}$$

Vonalkázással jelöljük az egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazát jelentő ponthalmazt (az első grafikonét függőleges vonalakkal, a másodikét vízszintessel):



64. ábra

Ekkor az egyenlőtlenség-rendszer megoldását kielégítő ponthalmaz:



65. ábra ◁

Magyarázat

Rendezzük az eredeti egyenlőtlenség-rendszert úgy, hogy egyszerűbb legyen ábrázolnunk az adott egyenlőtlenségek grafikonjait (vagyis írjuk fel $y > f(x)$ vagy az $y < f(x)$ alakban az egyenlőtlenségeket). Azoknak a pontoknak a halmaza, melynek koordinátái kielégítik az $y \leqslant -x^2$ egyenlőtlenséget, az $y = -x^2$ parabola és a sík azon pontjainak koordinátái, melyek e parabola alatt helyezkednek el (a 64. ábrán ezt a halmazt függőleges vonalakkal ábrázoltuk). Azoknak a pontoknak a halmaza, melynek koordinátái kielégítik az $y > x - 2$ egyenlőtlenséget, az $y = x - 2$ egyenes felett helyezkednek el (a rajzon ezt a halmazt vízszintes vonalakkal ábrázoltuk).

Az egyenlőtlenség-rendszert csak és csakis azoknak a pontoknak a koordinátái elégítik ki, melyek az adott rendszer egyenlőtlenségeit alkotó két halmaz metszetében fekszenek (a rajzon a halmazok metszetét az a rész alkotja, amely függőlegesen és vízszintesen is vonalkázva van).

Megjegyezzük, hogy a hasonló feladatoknál nem szükséges kisegítő rajzokat készíteni, hanem rögtön lehet a keresett pontok halmazát a koordinátasíkon ábrázolni (az $y = x - 2$ egyenes feletti és az $y = -x^2$ parabola alatti részt, melyek együtt a parabola belsejének egyenes feletti része; 65. ábra).

3. példa. Ábrázoljuk az $|x-y|+2|x+y|=x+6$ egyenlet grafikonját!

Útmutató

Ahhoz, hogy a több abszolút értéket tartalmazó kétváltozós kifejezéseket egyszerűbb alakra hozzuk, az abszolút érték jele alatt álló kifejezéseket nullával tesszük egyenlővé, és a vizsgált kifejezés értelmezési tartományát olyan intervallumokra osztjuk, melyen az abszolút érték egyértelműen felbontható.

A példamegoldás lépéseinek ismertetése.

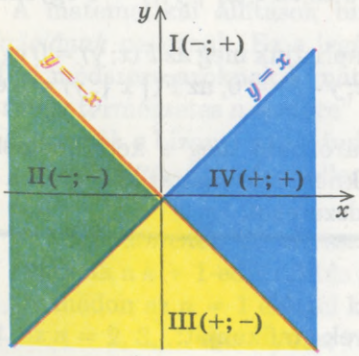
Az abszolút érték alatti kifejezést nullával tesszük egyenlővé: $x-y=0$ (innen $x=y$) és $x+y=0$ (innen $y=-x$). Az $y=x$ és az $y=-x$ egyenesek a koordinátasíkot négy tartományra osztják. Ezek közül mindegyik tartományban az abszolútértékes kifejezések egyértelműen felbonthatók, és az így kapott kifejezésekből tartományonként megrajzolható az adott egyenlet grafikonja.

Megoldás

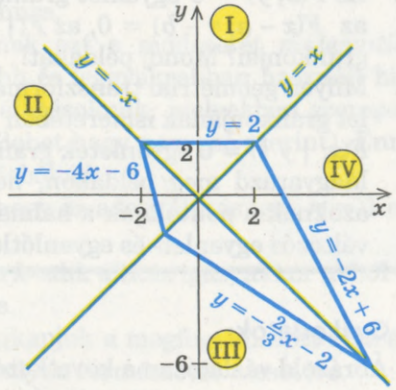
1. Az értelmezési tartomány: $x \in \boldsymbol{R}, y \in \boldsymbol{R}$.

2. $x-y=0$, ha $y=x$; $x+y=0$, ha $y=-x$.

3. Az $y=x$ és az $y=-x$ egyenesek a koordinátasíkot négy tartományra osztják fel, melyek mindegyikében jelölve van az első és a második abszolút érték alatti kifejezés előjele (66. *a* ábra). (Úgy tekintjük, hogy mindegyik tartományhoz az őket határoló félegyenesek is hozzátartoznak.) Valóban, ha a pont az I. tartományhoz tartozik vagy annak határvonalán fekszik, akkor koordinátái kielégítik az $\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \geqslant -x \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszert, mely így is felírható: $\begin{cases} x-y \leqslant 0, \\ x+y \geqslant 0. \end{cases}$ Ekkor az I. tartományban az első abszolút érték alatti kifejezés negatív, a második pedig pozitív, és ezért az adott egyenletet így írhatjuk fel: $-(x-y)+2(x+y)=x+6$. Melyből $y=2$. Megrajzoljuk ennek a függvénynek az I. tartományhoz tartozó grafikonrészét (66. *b* ábra).



a



b

66. ábra

Hasonlóképpen a II. tartomány pontjaira is igaz: $\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \leqslant -x, \end{cases}$ vagyis $\begin{cases} x-y \leqslant 0, \\ x+y \leqslant 0. \end{cases}$

Tehát a II. tartományra az adott egyenletet így írhatjuk fel: $-(x-y)-2(x+y)=x+6$. Melyből $y=-4x-6$. Megrajzoljuk ennek a függvénynek a II. tartományhoz tartozó grafikonrészét.

A III. tartományba eső megoldáshalmaz pontjaira: $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \leqslant -x, \end{cases}$ vagyis $\begin{cases} x-y \geqslant 0, \\ x+y \leqslant 0. \end{cases}$

Az adott egyenletet így írhatjuk fel: $(x-y)-2(x+y)=x+6$. Innen $y=-\frac{2}{3}x-2$.

Ha a megoldáshalmazt jelölő pontok a IV. tartományban fekszenek, akkor: $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \geqslant -x, \end{cases}$ vagyis $\begin{cases} x-y \geqslant 0, \\ x+y \geqslant 0, \end{cases}$ és az adott egyenletből az $(x-y)+2(x+y)=x+6$ egyenletet kapjuk. Innen $y=-2x+6$.

Az egyenlet grafikonjának végleges alakja a 66. *b* ábrán látható. ◁

Ellenőrző kérdések

1. Hogyan lehet az $y=f(x)$ és az $y=g(x)$ függvény grafikonjainak ismeretében megrajzolni az $y=f(x)+g(x)$ és az $y=\frac{1}{f(x)}$ függvények grafikonját? Magyarázd meg példákon!
2. Mit nevezünk a kétváltozós egyenlet grafikonjának? Mit nevezünk a kétváltozós egyenlőtlenség grafikonjának? Mondj példákat!
3. Az $y=f(x)$ függvény grafikonjának ismeretében, hogyan ábrázolhatók az $y>f(x)$ és az $y<f(x)$ egyenlőtlenségek grafikonjai? Mondj példákat!
4. Az $F(x;y)=0$ egyenlet grafikonjának ismeretében, hogyan ábrázolhatók az $F(x-a;y-b)=0$, az $F(|x|;y)=0$ és az $F(x;|y|)=0$ egyenletek grafikonjai? Mondj példákat!
5. Milyen geometriai transzformációkkal kaphatjuk meg az $F(x;y)=0$ egyenlet grafikonjának ismeretében az $F(x-a;y-b)=0$, az $F(|x|;y)=0$ és az $F(x;|y|)=0$ egyenletek grafikonját?
6. Magyarázd meg példákon, hogyan határozható meg a koordinátasíkon azoknak a pontoknak a halmaza, melyeknek koordinátái kielégítik a kétváltozós egyenlet- és egyenlőtlenség-rendszereket!

Gyakorlatok

1. Ábrázold vázlatosan a következő függvények grafikonját:

   1) $y=x+\frac{1}{x}$; 2) $y=x-\frac{1}{x}$; 3) $y=x^3+\frac{1}{x}$; 4) $y=x^2-\frac{1}{x}$!

2. Ábrázold az egyenletek grafikonjait:
1) $|y| = x - 2$; 2) $|y| = x^2 - x$; 3) $|x| = -y^2$;
4) $|x| + |y| = 2$; 5) $|x| - |y| = 2$!

3. Ábrázold az egyenlőtlenségek grafikonjait:
1) $y > x^2 - 3$; 2) $y < \frac{1}{x}$; 3) $x^2 + y^2 \leqslant 25$;
4) $(x-2)^2 + (y+3)^2 > 4$!

4. Ábrázold satírozással a koordinátasík azon pontjainak halmazát, melynek koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenség-rendszereket:
1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ y > x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \leqslant 5 - x^2, \\ y < -x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \leqslant 5 - x, \\ y \geqslant x, \\ y \leqslant 2x + 4! \end{cases}$

5. Ábrázold az egyenletek grafikonjait:
1) $|x - y| - |x + y| = y + 3$;
2) $|x - 2y| + |2x - y| = 2 - y$;
3) $|3x + y| + |x - y| = 4$!

6. §. A MATEMATIKAI INDUKCIÓ MÓDSZERE

A matematikai feladatok megoldása során néha azt kell igazolni, hogy valamely tulajdonság bármely n esetén érvényes.

Ezt a tulajdonságot minden természetes szám esetén nem tudjuk leellenőrizni, mert ezeknek az eseteknek a száma végtelen. Ezért a következőképpen kell gondolkodni: 1) ellenőrizni tudom, hogy az $n = 1$ esetén a tulajdonság igaz lesz; 2) igazolni tudom, hogy 1-gyel kezdődően minden következő n értékre igaz a tulajdonság, azaz minden természetes számra.

A matematikai állítások bizonyításának ezt a módszerét *matematikai indukciónak* nevezzük. Ez a legáltalánosabb és leggyakrabban használt bizonyítási módszere azoknak a matematikai állításoknak, melyekben szerepel a „bármely természetes n esetére" kifejezés (lehet hogy nem szó szerint). Ennek a módszernek a bizonyítása mindig két lépésből áll:

1) *az első állítás igazsága*: ellenőrizzük, hogy az adott állítás igaz $n = 1$ esetén;
2) *induktív átmenet*: ha feltesszük, hogy a k-adik állítás igaz, akkor abból következik a $k + 1$-edik állítás igazsága is.

Ily módon az $n = 1$ esettel kezdve megkapjuk a megfogalmazott igaz állítást, az $n = 2, 3, \ldots$ esetekre is, vagyis bármilyen természetes n esetére.

A gyakorlatban erre a módszerre célszerű a 14. táblázatban látható sémát alkalmazni.

14. táblázat

Az állítások bizonyításának sémája matematikai indukció módszerével	Példa
1. *Ellenőrizzük*, hogy az adott állítás igaz-e $n = 1$ esetén (néha $n = p$ esettel kell kezdenünk).	Bizonyítsuk be, hogy bármely természetes n esetére: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$.
2. *Feltételezzük*, hogy az adott állítás igaz az $n = k$ esetén is, ahol $k \geqslant 1$ (ha $n \leqslant k$ ez egy másik eset).	▶ Az egyszerűség kedvéért jelöljük: $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1)$. 1. Ha $n = 1$, akkor az egyenlőség igaz lesz: $1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$, vagyis $2 = 2$. 2. Feltételezzük, hogy az adott egyenlőség teljesül az $n = k$ esetében, ha $k \geqslant 1$, vagyis $S_k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k(k+1) = \frac{1}{3} k(k+1)(k+2)$. (1)
3. A feltételezésre támaszkodva *bebizonyítjuk*, hogy az állítás igaz $n = k + 1$ esetére is.	3. Bebizonyítjuk, hogy az egyenlőség teljesül $n = k + 1$ esetén, vagyis bebizonyítjuk, hogy $S_{k+1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$. Figyelembe véve azt, hogy $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)$, és behelyettesítve az S_k értékét az (1) egyenlőségből, megkapjuk $S_{k+1} = \frac{1}{3} k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$, amit bizonyítanunk kellett.
4. *Levonjuk a következtetést*, hogy az adott állítás bármely természetes n számra is igaz lesz (bármely $n \geqslant p$).	4. Tehát az adott egyenlőség az n bármely természetes értékére igaz. ◁

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Bizonyítsuk be, hogy a $10^n - 9n - 1$ osztható 81-gyel, bármely természetes n esetén.

Magyarázat

Mivel az állítást bármely természetes n esetére bizonyítani kell, ezért a matematikai indukció elvét fogjuk alkalmazni, amelynek sémája a 14. táblázatban található. Végrehajtva az induktív átmenetet ($n = k$-ról $n = k + 1$-re), azt a kifejezést, melyet az $n = k + 1$ esetén kapunk, megadjuk két kifejezés

összegeként: az egyik, amit az $n = k$ esetén kaptunk, a másik pedig az, amely osztható 81-gyel.

Megoldás

1. ▶ Ellenőrizzük, hogy teljesül-e az állítás $n = 1$ esetén. Az adott kifejezés 0-val lesz egyenlő, vagyis osztható 81-gyel. Tehát $n = 1$ esetén az adott tulajdonság igaz lesz.
2. Feltételezzük, hogy az adott állítás teljesül az $n = k$ esetén is, vagyis $10^k - 9k - 1$ osztható 81-gyel.
3. Bebizonyítjuk, hogy az adott állítás igaz $n = k + 1$ esetén is, vagyis $10^{k+1} - 9(k + 1) - 1$ osztható 81-gyel.

$$10^{k+1} - 9(k + 1) - 1 = 10^k \cdot 10 - 9k - 9 - 1 = 10(10^k - 9k - 1) + 81k.$$

A zárójelben lévő kifejezés $n = k$ esetén megegyezik az eredeti kifejezéssel, amely az indukció feltétele alapján osztható 81-gyel. Mivel az utóbbi összegnek minden összeadandója osztható 81-gyel, ezért az egész összeg is, vagyis a $10^{k+1} - 9(k + 1) - 1$ kifejezés is osztható lesz 81-gyel. Következésképen az állítás $n = k + 1$ esetén is igaz.

4. Tehát a $10^n - 9n - 1$ kifejezés osztható 81-gyel bármilyen természetes n szám esetén. ◁

2. példa. Bizonyítsuk be, hogy a $2^n > 2n + 1$, ha $n \geqslant 3$, $n \in N$.

Magyarázat

Mivel az állítást az $n = 3$-mal kezdődően kell bebizonyítani, ezért az ellenőrzést ezzel a számmal fogjuk kezdeni. Felírva az indukció feltételét, érdemes alkalmazni a „nagyobb" fogalmának meghatározását, vagyis $a > b$ akkor és csakis akkor, ha $a - b > 0$. Bizonyítva az egyenlőtlenséget az $n = k + 1$ esetén, újra alkalmazva ugyanezt a meghatározást bebizonyítjuk, hogy az egyenlőtlenség bal és jobb oldalának különbsége pozitív lesz.

Megoldás

1. Az $n = 3$ esetén a $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$ egyenlőtlenséget kapjuk, vagyis $8 > 7$ igaz egyenlőtlenség . Tehát $n = 3$ esetén az egyenlőtlenség teljesül.
2. Feltételezzük, hogy az adott egyenlőtlenség az $n = k$ (ahol $k \geqslant 3$) esetén is teljesülni fog:

$$2^k > 2k + 1, \text{ vagyis } 2^k - 2k - 1 > 0. \qquad (1)$$

3. Bebizonyítjuk, hogy az adott állítás igaz $n = k + 1$ esetén is, vagyis bizonyítjuk, hogy $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$.
Megvizsgáljuk a következő
$2^{k+1} - (2(k + 1) + 1) = 2^k \cdot 2 - 2k - 3 = 2(2^k - 2k - 1) + 2k - 1 > 0$
különbséget (mivel a zárójelben lévő kifejezés az (1) egyenlőtlenség alapján pozitív és a $k \geqslant 3$ esetén a $2k - 1$ szintén pozitív lesz). Tehát a $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$, vagyis az adott egyenlőtlenség $n = k + 1$ esetén is teljesülni fog.
4. Tehát az adott egyenlőtlenség teljesül bármely természetes $n \geqslant 3$ számra.

Gyakorlatok

Matematikai indukcióval bizonyítsd be az **(1–12.)** gyakorlatokat!

1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ minden természetes n ($n \in N$) esetén.

2. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$, ahol $n \in N$.

3. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, ahol $n \in N$.

4. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$, ahol $n \in N$.

5. Az $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ szorzatot $n!$-gyel jelölik (olv.: n faktoriális). Bizonyítsátok be, hogy $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$, ahol $n \in N$.

6. $4^n > 7n-5$, ahol $n \in N$.

7. $2^n > n^3$, ahol $n \geqslant 10$.

8. Bizonyítsd be, hogy a $9^n - 8n - 1$ osztható 16-tal, bármely természetes n esetén!

9. Bizonyítsd be, hogy az $5^n + 5\cdot 3^n - 3$ osztható 8-cal, bármely természetes n esetén!

10. Bizonyítsd be, hogy a $7^n + 3^n - 2$ osztható 8-cal, bármely természetes n esetén!

11. Bizonyítsd be, hogy a $2^{3n+3} - 7n + 41$ osztható 49-cel, bármely természetes n esetén!

12. Bizonyítsd be, hogyha $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, akkor $a_n = 3^n - 1$, ahol $n \in N$!

7. §. EGYVÁLTOZÓS TÖBBTAGÚ KIFEJEZÉSEK ÉS A VELÜK VALÓ MŰVELETEK

7.1. Az egyváltozós többtagú kifejezések meghatározása és azonosságaik

Megvizsgáljuk azokat az egytagú és többtagú kifejezéseket, melyek csak egy változót, például x-et tartalmaznak.

A számot és a betűt (a mi esetünkben x betűt) tartalmazó egytagú kifejezés meghatározása alapján közöttük csak két műveleti jel lehetséges – a szorzás és a természetes kitevőjű hatványra emelés. Ha az egytagú kifejezésben minden szám szorzatát a betű elé írjuk, és a változó hatványainak a szorzatát felírjuk mint ennek a betűnek a nemnegatív hatványa (vagyis az egytagú kifejezést normálalakban írjuk fel), akkor ax^n alakú kifejezést kapunk, ahol az a egy tetszőleges szám.

Ezért *az x változót tartalmazó egytagú kifejezésnek az ax^n alakú kifejezést nevezzük, ahol a tetszőleges szám, n pedig nemnegatív egész szám.* Ha $a \neq 0$, akkor az x változó n hatványkitevőjét az *egytagú kifejezés fokszámának* nevezzük. Például a $25x^6$ egytagú kifejezés hatodfokú, a $\frac{2}{3}x^2$ egytagú kifejezés pedig másodfokú. Ha az egytagú kifejezés csak egy nullától különböző szám, akkor a

fokszámát nullának tekintik. *Annak az egytagú kifejezésnek, mely a 0 számból áll, a fokszámát nem határozzák meg* (mert $0 = 0 \cdot x = 0 \cdot x^2 = 0 \cdot x^3 \ldots$).

Az x változót tartalmazó többtagú kifejezést az x változót tartalmazó egytagú kifejezések összegéből kapjuk. Ezért

egyváltozós többtagú kifejezésnek az:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

alakú kifejezést nevezzük, ahol $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ valamilyen számok, x pedig változó.

Ha $a_n \neq 0$, akkor az ilyen többtagú kifejezést x változójú *n-edik fokszámú többtagú* kifejezésnek nevezzük. Ebben az esetben az $a_n x^n$ tagot az $f(x)$ *többtagú kifejezés főtagjának* nevezzük, az a_n-t *többtagú kifejezés főegyüttható jának*, az a_0-t pedig *konstans tagnak*. Például $5x^3 - 2x + 1$ harmadfokú többtagú kifejezés, melynek konstans tagja 1, főegyüttható ja pedig 5.

Megjegyezzük, hogy néha a tényezők számozását az (1) kifejezés elejéről kezdjük, ekkor az $f(x)$ többtagú kifejezést így írhatjuk fel:

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n,$$

ahol $b_0, b_1, \ldots, b_n$ tetszőleges számok.

1. tétel. ***Az ax^n, ha $a \neq 0$, és a bx^m, ha $b \neq 0$, egytagú kifejezések akkor és csakis akkor azonosan egyenlők, ha $a = b$ és $n = m$. Az ax^n egytagú kifejezés akkor és csakis akkor lesz azonosan egyenlő nullával, ha $a = 0$.***

● Mivel

$$ax^n = bx^m \qquad (2)$$

az egytagú kifejezések egyenlősége az x minden értékére teljesül (a feltétel szerint ezek az egytagú kifejezések azonosan egyenlők), akkor behelyettesítve ebbe az egyenlőségbe az $x = 1$-et, azt kapjuk, hogy $a = b$. Egyszerűsítve a (2) egyenlőség mindkét oldalát a-val (ahol a feltétel alapján $a \neq 0$) az $x^n = x^m$ egyenlőséget kapjuk. $x = 2$ esetén ebből az egyenlőségből a $2^n = 2^m$-et kapjuk. Mivel $2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\text{-szer}}$, és $2^m = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{m\text{-szer}}$, ezért $2^n = 2^m$ egyenlőség csak akkor teljesül, ha $n = m$. Tehát az $ax^n = bx^m$ ($a \neq 0, b \neq 0$) azonosságból azt kapjuk, hogy $a = b$ és $n = m$.

Ha ismert, hogy $ax^n = 0$ bármely x esetén, akkor az $x = 1$ esetén $a = 0$ egyenlőséget kapjuk.

Ezért az ax^n $a = 0$ esetén azonosan egyenlő nullával (ekkor $ax^n = 0 \cdot x^n \equiv$ $\equiv 0$[1]). ○

Az elkövetkezőkben a $0 \cdot x^n$ egytagú kifejezést 0-val helyettesíthetjük.

2. tétel. ***Ha az $f(x)$ többtagú kifejezés azonosan egyenlő nullával*** (*vagyis az x minden értékénél nullával egyenlő*), ***akkor mindegyik együtthatója nullával egyenlő.***

[1] A $\equiv$ jellel a többtagú kifejezések azonosságát jelöljük.

● Ennek bizonyítására a matematikai indukció módszerét fogjuk alkalmazni.
Legyen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0$.
Ha $n = 0$, akkor $f(x) = a_0 \equiv 0$, innen $a_0 = 0$. Vagyis ebben az esetben a tétel állítása teljesül.
Feltételezzük, hogy az $n = k$ esetén is ez az állítás teljesülni fog: ha $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0$, ekkor $a_k = a_{k-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.
Bebizonyítjuk, hogy az állítás igaz $n = k + 1$ esetén is. Legyen

$$f(x) = a_{k+1} x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0. \quad (3)$$

Mivel a (3) egyenlőség teljesül minden x-re, ezért behelyettesítve az $x = 0$-t, az $a_0 = 0$ egyenlőséget kapjuk. Ekkor a (3) egyenlőség átalakul az $a_{k+1} x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x \equiv 0$ egyenlőséggé. A bal oldalából kiemeljük zárójel elé az x-et

$$x (a_{k+1} x^k + a_k x^{k-1} + \ldots + a_1) \equiv 0. \quad (4)$$

A (4) egyenlőségnek minden x-re teljesülnie kell. Ahhoz, hogy teljesüljön az $x \neq 0$ esetén, az

$$a_{k+1} x^k + a_k x^{k-1} + \ldots + a_1 \equiv 0$$

azonosságnak is teljesülnie kell.
Ennek az azonosságnak a bal oldalán egy olyan többtagú kifejezés áll, melyben a változó hatványai x^0-tól az x^k-ig terjednek. Ekkor az indukció feltételéből következik, hogy minden együtthatója nullával egyenlő: $a_{k+1} = a_k = \ldots = a_1 = 0$. De mi azt is bebizonyítottuk, hogy az $a_0 = 0$, ezért állításunk teljesülni fog az $n = k + 1$-re is. Tehát a tétel állítása igaz bármely nemnegatív n esetén, vagyis mindegyik többtagú kifejezésre nézve. ○

Azt a többtagú kifejezést, melyben mindegyik együttható nullával egyenlő, *nulladfokú polinomnak* nevezzük, és $0(x)$-szel jelöljük, vagy egyszerűen 0-val (mivel $0(x) = 0$).

3. tétel. ***Ha az $f(x)$ és $g(x)$ többtagú kifejezések azonosan egyenlők, akkor ezek a kifejezések megegyeznek (vagyis a hatványuk és az azonos hatványnál lévő együtthatóik is egyenlők lesznek).***

● Legyen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ többtagú kifejezés és a $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ többtagú kifejezés. Megvizsgáljuk az $f(x) - g(x)$ többtagú kifejezést. Mivel az $f(x)$ és a $g(x)$ többtagú kifejezések a feltétel alapján azonosan egyenlők, ezért az $f(x) - g(x)$ többtagú kifejezés azonosan 0-val lesz egyenlő. Tehát mindegyik együtthatója nullával egyenlő.
De $f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) x + (a_2 - b_2) x^2 + \ldots$.
Ekkor az $a_0 - b_0 = 0$, $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, … . Innen következik, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, … . Tehát ha feltételezzük, hogy két adott többtagú kifejezés közül valamelyik kifejezésnek a fokszáma magasabb, mint a másiké (például az n nagyobb, mint az m), akkor a különbség együtthatói nullával kell hogy egyenlők legyenek. Ezért az $(m + 1)$ sorszámtól kezdve mindegyik a_i együttható szintén nullával kell hogy egyenlő legyen. Tehát az $f(x)$ és $g(x)$ többtagú kifejezések fokszámai megegyeznek és a megfelelő együtthatóik szintén egyenlők egymással. ○

A 3. tétel az úgynevezett *határozatlan együtthatók módszerének* az alapjául szolgál. A módszer alkalmazását a következő példán szemléltetjük.

Példa. Bizonyítsuk be, hogy az $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+16$ kifejezés teljes négyzet.

▶ Az adott többtagú kifejezés negyedfokú, ezért csak egy másodfokú többtagú kifejezésnek lehet a teljes négyzete.

A másodfokú többtagú kifejezés általános alakja: $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

A következő azonosságot kapjuk:

$$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+16 = (ax^2+bx+c)^2. \qquad (5)$$

Ha az azonosság bal és jobb oldalán felbontjuk a zárójeleket, és az x azonos hatványainál az együtthatókat egyenlővé tesszük, akkor egy egyenletrendszert kapunk. Ezt a lépést célszerű a következőképpen felírni:

x^4	$1 = a^2$
x^3	$2+4+6+8 = 2ab$
x^2	$2\cdot4+2\cdot6+2\cdot8+4\cdot6+4\cdot8+6\cdot8 = b^2+2ac$
x^1	$2\cdot4\cdot6+2\cdot4\cdot8+2\cdot6\cdot8+4\cdot6\cdot8 = 2bc$
x^0	$2\cdot4\cdot6\cdot8+16 = c^2$

Az első egyenlőségből azt kapjuk, hogy $a = 1$ vagy $a = -1$.

Ha $a = 1$, akkor a második egyenlőségből kapjuk, hogy $b = 10$, és a harmadikból $c = 20$. Könnyű belátnunk, hogy az a, b és c ezen értékeinél az utolsó két egyenlőség is teljesülni fog. Tehát az (5) azonosság az $a = 1$, $b = 10$, $c = 20$ értékek mellett teljesülni fog (hasonlóképpen kaphatjuk meg, hogy $a = -1$, $b = -10$, $c = -20$).

Tehát, az $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+16 = (x^2+10x+20)^2$. ◁

Gyakorlatok

1. Ismerve, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ többtagú kifejezések azonosan egyenlők, határozd meg az a, b, c, d együtthatók értékeit:
   1) $f(x) = 2x^2 - (3-a)x + b$, $g(x) = cx^3 + 2dx^2 + x + 5$;
   2) $f(x) = (a+1)x^3 + 2$, $g(x) = 3x^3 + bx^2 + (c-1)x + d$!
2. Határozd meg azokat az a, b, c, d számokat, amelyeknél az $(x^2-1)a + b(x-2) + c(x+2) = 2$ egyenlőség az x bármely értékére teljesül!
3. Bizonyítsd be az azonosságokat:
   1) $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1) = x^6 - 1$;
   2) $1+x^4 = (1+x\sqrt{2}+x^2)(1-x\sqrt{2}+x^2)$!
4. Bizonyítsd be, hogy az adott kifejezés teljes négyzet:
   1) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$;
   2) $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$!

5. Határozd meg az a és b azon értékeit, hogy bármely x értékre teljesüljön a következő egyenlőség:

$$3x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 3x + 2 = (3x^2 + ax + 1)(x^2 + x + b)!$$

6. Írd fel a $\frac{2}{15x^2 + x - 2}$ algebrai törtet két $\frac{a}{3x - 1}$ és $\frac{b}{5x + 2}$ algebrai tört összegeként!

7. 2. Műveletek többtagú kifejezésekkel. A többtagú kifejezés maradékos osztása többtagú kifejezéssel

Az egyváltozós többtagú kifejezések összeadása és szorzása a már ismert többtagú kifejezések összeadásának és szorzásának szabályai szerint történik. Az egyváltozós többtagú kifejezések összeadásának vagy szorzásának eredményeképp mindig egy ugyanolyan változójú többtagú kifejezést kapunk.

A két többtagú kifejezés szorzatának definíciójából következik, hogy *többtagú kifejezések szorzásakor kapott szorzatban a főtag az egyes főtagok szorzatával, a szabad tag pedig a tényezőkben szereplő szabad tagok szorzatával egyenlő. Következésképpen a szorzat fokszáma a tényezők fokszámának összegével egyenlő.*

Azonos kitevőjű többtagú kifejezések összeadásakor legtöbbször ugyanilyen fokszámú többtagú kifejezést kapunk. Azonban előfordulhat, hogy kisebb fokszámú többtagú kifejezést kapunk.

Például $2x^3 - 5x^2 + 3x + 1 + (-2x^3 + 5x^2 + x + 5) = 4x + 6$.

A különböző fokszámú többtagú kifejezések összeadásakor az összeg fokszáma mindig az összeadandók legnagyobb fokszámával egyenlő.

Például $(3x^3 - 5x + 7) + (x^2 + 2x + 1) = 3x^3 + x^2 - 3x + 8$.

A többtagú kifejezés osztása többtagúval az egész számok osztásához hasonlóan történik. Emlékeztetünk arra, hogy az a szám osztható b-vel ($b \neq 0$), ha létezik egy olyan q szám, amelyre igaz, hogy $a = b \cdot q$.

Definíció. Az $A(x)$ többtagú kifejezés akkor osztható a $B(x)$ (ahol $B(x)$ nemnulla polinom) többtagú kifejezéssel, ha létezik egy olyan $Q(x)$ többtagú kifejezés, amelyre igaz az

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x)$$

egyenlőség.

Az egész számokhoz hasonlóan, a többtagú kifejezések osztását sem lehet mindig végrehajtani, ezért a többtagú kifejezések halmazán is bevezetik a *maradékos osztás* fogalmát.

Az $A(x)$ többtagú kifejezés maradékkal osztható a $B(x)$ (ahol $B(x)$ nemnulla polinom) többtagú kifejezéssel, ha létezik egy olyan $Q(x)$ és $R(x)$ kifejezés-pár, hogy $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, miközben az $R(x)$ maradék hatványkitevője kisebb az osztó $B(x)$ hatványkitevőjénél. (Megjegyezzük, hogy ekkor a $Q(x)$ többtagú kifejezést *nem teljes hányadosnak* nevezik.)

Osszuk el például az $x^3 - 5x + 2$ polinomot az $x^2 - 5$ kifejezéssel. Mivel $x^3 - 5x + 2 = (x^2 - 5)\,x + 2$, ezért az osztás során nem teljes hányadosként x-t, maradékként pedig 2-t kapunk.

Általában a többtagú kifejezések osztását hasonlóan végezzük, mint a többjegyű számok osztását.

Példa. Osszuk el az $A(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20$ kifejezést a $B(x) = x^2 - 2x + 3$ polinommal.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 & x^2 - 2x + 3 \\
\cline{2-2}
\underline{x^4 - 2x^3 + 3x^2} & x^2 - 3x - 8 \\
-3x^3 - 2x^2 + 8x - 20 & \\
\underline{-3x^3 + 6x^2 - 9x} & \\
-8x^2 + 17x - 20 & \\
\underline{-8x^2 + 16x - 24} & \\
x + 4 &
\end{array}
$$

◁

Bebizonyítjuk, hogy a kapott eredmény valóban az $A(x)$ és a $B(x)$ maradékos osztásának az eredménye.

Ha megjelöljük az algoritmus első lépésének eredményét $f_1(x)$-szel, a második eredményét $f_2(x)$-szel, a harmadikat pedig $f_3(x)$-szel, akkor a fenti osztási művelet a következő egyenletrendszerrel írható fel:

$$f_1(x) = A(x) - x^2 \cdot B(x); \qquad (1)$$

$$f_2(x) = f_1(x) - (-3x) \cdot B(x); \qquad (2)$$

$$f_3(x) = f_2(x) - (-8) \cdot B(x). \qquad (3)$$

Tagonként összeadjuk az (1), (2), (3) egyenlőségeket és megkapjuk, hogy

$$A(x) = (x^2 - 3x - 8)\,B(x) + f_3(x). \qquad (4)$$

Mivel az $f_3(x) = x + 4$ hatványkitevője kisebb a $B(x) = x^2 - 2x + 3$ polinom legnagyobb hatványkitevőjénél, ezért alkalmazhatjuk az $f_3(x) = R(x)$ (maradék), és az $x^2 - 3x - 8 = Q(x)$ (nem teljes hányados) jelöléseket. Ekkor a (4) egyenlőségből kapjuk, hogy $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, vagyis $x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 3x - 8) + x + 4$, ami azt jelenti, hogy az $A(x)$-et maradékosan osztottuk a $B(x)$-szel.

Könnyen beláthatjuk, hogy ezt a gondolatmenetet végig lehet vezetni bármely $A(x)$ és $B(x)$ polinom esetén, amikor „oszlopban" végezzük el az osztást. Ezért a fenti algoritmus lehetővé teszi bármely $A(x)$ osztandó és $B(x)$ (ahol $B(x)$ nemnulla polinom) osztó esetében a $Q(x)$ nem teljes hányados és a maradék $R(x)$ meghatározását.

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, ha az $A(x)$ osztandó hatványkitevője kisebb az osztó a $B(x)$ hatványkitevőjénél, akkor úgy tekintjük, hogy a nem teljes hányados a $Q(x) = 0$, a maradék pedig $R(x) = A(x)$.

Gyakorlatok

1. Végezd el a többtagú kifejezés osztását többtagú kifejezéssel:
   1) $3x^3 - 5x^2 + 2x - 8$-at $x - 2$-vel; 2) $x^{10} + 1$-et $x^2 + 1$-gyel;
   3) $x^5 + 3x^3 + 8x - 6$-ot $x^2 + 2x + 3$-mal!
2. Végezd el a többtagú kifejezés maradékos osztását többtagú kifejezéssel:
   1) $4x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$-et $x^2 + x + 2$-vel;
   2) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$-et $x^2 - x - 2$-vel!
3. Az a és b mely értékeivel osztható maradék nélkül az $A(x)$ polinom a $B(x)$-szel:
   1) $A(x) = x^3 + ax + b, B(x) = x^2 + 5x + 7$;
   2) $A(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + b, B(x) = x^2 - 4$;
   3) $A(x) = x^4 - x^3 + x^2 - ax + b, B(x) = x^2 - x + 2$?
4. Határozd meg a határozatlan együtthatók módszerével az $A(x)$ többtagú kifejezés és a $B(x)$ kifejezés osztásakor keletkezett nem teljes hányadost és maradékot:
   1) $A(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6, B(x) = x^2 - 1$;
   2) $A(x) = x^3 - 19x - 30, B(x) = x^2 + 1$!

7.3. Bézout-tétel. A többtagú kifejezés (polinom) gyökei. Viète képletei

Vizsgáljuk meg az $f(x)$ többtagú kifejezés osztását az $(x - a)$ kéttagú kifejezéssel. Mivel az osztó legnagyobb hatványkitevője 1, ezért a kapott maradék hatványkitevőjének 1-nél kisebbnek kell lennie, vagyis ebben az esetben a maradék valamilyen R szám lesz. Tehát, ha az $f(x)$ polinomot az $(x - a)$ kéttagú kifejezéssel osztjuk, akkor azt kapjuk, hogy:

$$f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R.$$

Ez az egyenlőség azonosság, vagyis bármilyen x értékre igaz. Az $x = a$ esetén: $f(a) = R$. A kapott eredményt *Bézout*[1]*-tételének nevezik.*

1. tétel (Bézout-tétel). ***Az $f(x)$ polinom $(x - a)$ kéttagú kifejezéssel való osztásakor a maradék $f(a)$-val egyenlő (vagyis a polinom értéke $x = a$ esetén egyenlő a maradékkal).***

1. példa. Bizonyítsuk be, hogy az $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 4$ maradék nélkül osztható $x - 1$-gyel.

▶ Helyettesítsük az $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 4$ kifejezésben az x-et 1-gyel. Akkor $f(1) = 0$. Tehát az $f(x)$-et az $(x - 1)$-gyel osztva a maradék 0, vagyis az $f(x)$ maradék nélkül osztható az $(x - 1)$-gyel. ◁

Definíció. ***Az a számot az $f(x)$ polinom gyökének nevezzük, ha az $f(a) = 0$.***

[1] Étienne Bézout (1730–1783) francia matematikus, aki jelentősen hozzájárult az algebrai egyenletek elméletének kidolgozásához.

Ha az $f(x)$ polinom osztható $(x - \alpha)$-val, akkor α gyöke az adott polinomnak.

Valóban, ha $f(x)$ osztható $(x - \alpha)$-val, akkor $f(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$, és ebből az következik, hogy $f(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot Q(\alpha) = 0$. Tehát α az $f(x)$ polinom gyöke. ○

Igaz a fordított állítás is. Ez a *Bézout-tétel következménye.*

2. tétel. ***Ha az α szám az $f(x)$ polinom gyöke, akkor ez a többtagú kifejezés maradék nélkül osztható az $(x - \alpha)$ kéttagú kifejezéssel.***

Bézout-tételéből következik, hogy ha $f(x)$-et elosztjuk $(x - \alpha)$-val, akkor a maradék $f(\alpha)$ lesz. De a feltétel alapján az α szám az $f(x)$ polinom gyöke, tehát, $f(\alpha) = 0$. ○

A 2. tétel általánosítása.

3. tétel. ***Ha az α_1, α_2, ..., α_n számok az $f(x)$ polinom páronként különböző gyökei, akkor ez a többtagú kifejezés maradék nélkül osztható az $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$ szorzattal.***

A bizonyításhoz a matematikai indukciót alkalmazzuk.

$n = 1$ esetére az állítás már bizonyított a 2. tétel szerint.

Feltételezzük, hogy az állítás igaz az $n = k$ esetére. Vagyis ha α_1, α_2, ..., α_k az $f(x)$ polinomnak a páronként különböző gyökei, akkor a polinom osztható az $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k)$ szorzattal. Tehát,

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k) \cdot Q(x). \qquad (1)$$

Bebizonyítjuk, hogy az állítás igaz az $n = k + 1$ esetére is. Legyen az α_1, α_2, ..., α_k, α_{k+1} — az $f(x)$ polinomnak a páronként különböző gyökei. Mivel α_{k+1} az $f(x)$ gyöke, ezért $f(\alpha_{k+1}) = 0$. Figyelembe véve az (1) egyenlőséget, amely az indukció feltételéből következően igaz, azt fogjuk kapni:

$$f(\alpha_{k+1}) = (\alpha_{k+1} - \alpha_1)(\alpha_{k+1} - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \cdot Q(\alpha_{k+1}) = 0.$$

A feltétel alapján minden α_1, α_2, ..., α_k, α_{k+1} gyök különböző, ezért egyetlen egy sem lesz nullával egyenlő az $\alpha_{k+1} - \alpha_1$, $\alpha_{k+1} - \alpha_2$, ..., $\alpha_{k+1} - \alpha_k$ számok közül. Tehát a $Q(\alpha_{k+1}) = 0$. Vagyis az α_{k+1} a $Q(x)$ polinom gyöke lesz. A 2. tétel alapján a $Q(x)$ polinom osztható $(x - \alpha_{k+1})$-gyel, vagyis a $Q(x) = (x - \alpha_{k+1}) \cdot Q_1(x)$ és az (1) egyenlőségből kapjuk, hogy

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)(x - \alpha_{k+1}) \cdot Q_1(x).$$

Ez azt jelenti, hogy az $f(x)$ osztható az

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)(x - \alpha_{k+1})$$

szorzattal, vagyis a tételt az $n = k + 1$ esetére is bebizonyítottuk.

Tehát a tétel igaz bármely természetes n esetére. ○

Következmény. ***Az n-edfokú polinom gyökeinek száma legfeljebb annyi, mint fokszáma, azaz nincs n-nél több gyöke.***

Feltételezzük, hogy az n-edfokú polinomnak $(n + 1)$ különböző gyöke van: α_1, α_2, ..., α_n, α_{n+1}. Ekkor az $f(x)$ osztható lenne az $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \times \times (x - \alpha_{n+1})$ szorzattal, azaz egy $(n + 1)$-fokú polinommal, de ez nem lehetséges. Ezért az n-edfokú polinomnak legfeljebb n számú gyöke lehet. ○

Legyen az $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ polinomnak az n különböző gyöke: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Ekkor ez a polinom maradék nélkül osztható az $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$ szorzattal. Ez a szorzat megegyezik az n-edfokú polinommal. Tehát az osztás eredményeként csak egy nulladfokú polinomot kaphatunk, vagyis egy számot. Tehát,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n). \quad (2)$$

Ha felbontjuk a zárójeleket a (2) egyenlet jobb oldalán és a legnagyobb hatványkitevőjű tagok tényezőit összehasonlítva $b = a_n$ egyenlőséget kapunk, vagyis

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n). \quad (3)$$

A (3) azonosság jobb és bal oldalán álló azonos hatványkitevőjű együtthatók összehasonlítása során megkapjuk az egyenlet együtthatói és a gyökei közötti összefüggéseket, melyeket Viète képleteinek vagy **Viète-formuláknak** nevezünk:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n};\\
&\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n};\\
&\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned} \quad (4)$$

Ha például $n = 2$, akkor:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \qquad \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_0}{a_2},$$

ha $n = 3$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_2}{a_3};\\
&\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{a_1}{a_3};\\
&\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_0}{a_3}.
\end{aligned} \quad (5)$$

A fenti egyenlőségek teljesülése a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ számok az $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ polinomnak a gyökei legyenek.

A (3) és a (4) képletek nem csak abban az esetben lesznek igazak, ha az $f(x)$ polinom minden gyöke különböző. Bevezetjük *a többszörös gyök fogalmát.*

Ha az $f(x)$ polinom maradék nélkül osztható $(x - \alpha)^k$ -nal, de nem osztható maradék nélkül $(x - \alpha)^{k+1}$-nel, ekkor azt mondjuk, hogy az α szám az $f(x)$ polinom k-szoros gyöke.

Ha például az $(x + 2)^3 (x - 1)^2 (x + 3)$ szorzatot polinom alakban írjuk fel, akkor a kapott polinomnak a (–2) szám 3-szoros gyöke lesz, az 1 szám a polinom 2-szeres gyöke, és a (–3) az 1-szeres gyöke.

A Viète-képleteket alkalmazva a többszörös gyökök esetén, mindegyik gyököt annyiszor kell leírni, amennyi a gyöktényezős alak fokszáma.

2. példa. Ellenőrizzük a Viète-képleteket az $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ polinom esetén!

▶ $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = x^2(x + 2) - 4(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 4) = (x - 2) \times (x + 2)^2$. Ezért az $f(x)$ gyökei: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = -2$ (mivel –2 a polinom 2-szeres gyöke).

Ellenőrizzük az (5) képletek teljesülését.

A mi esetünkben $a_3 = 1$, $a_2 = 2$, $a_1 = -4$, $a_0 = -8$. Ekkor

$$2 + (-2) + (-2) = -\frac{2}{1};\quad 2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) = \frac{-4}{1};\quad 2 \cdot (-2) \cdot (-2) = -\frac{-8}{1}.$$

Mint látjuk, mindegyik egyenlőség teljesül, ezért az adott polinomra igazak a Viète-képletek. ◁

3. példa. Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, melynek gyökei az $x^2 - 8x + 4 = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetei lesznek!

▶ Megjelöljük az $x^2 - 8x + 4 = 0$ egyenlet gyökeit x_1-gyel és x_2-vel. Ekkor a keresett egyenlet gyökei: $\alpha_1 = x_1^2$ és $\alpha_2 = x_2^2$. A keresett egyenlet $x^2 + px + q = 0$ alakú, ahol a $p = -(\alpha_1 + \alpha_2) = -\left(x_1^2 + x_2^2\right) = -\left((x_1 x_2)^2 - 2x_1 x_2\right)$, $q = \alpha_1 \alpha_2 = x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2$.

Viète képletéből kapjuk: $x_1 + x_2 = 8$ és $x_1 x_2 = 4$. Innen meghatározzuk, hogy

$q = (x_1 x_2)^2 = 4^2 = 16$ és $p = -((x_1 x_2)^2 - 2 x_1 x_2) = -(8^2 - 2 \cdot 4) = -56$.

Tehát a keresett egyenlet: $x^2 - 56x + 16 = 0$. ◁

Gyakorlatok

1. Határozd meg az $x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 5x + 1$ polinom $(x + 2)$-vel való osztásának maradékát!
2. Határozd meg az a együttható értékét, ha ismeretes, hogy az $x^3 - ax^2 + 5x - 3$ polinomnak $(x - 1)$-gyel való osztásakor a maradék 6!

3. Az $f(x)$ többtagú kifejezés $(x - 1)$-gyel való osztásakor maradékul 4-et kapunk, ha $(x - 3)$-mal osztunk, akkor 6-ot. Határozd meg az osztás maradékát, ha az $f(x)$-et az $(x^2 - 4x + 3)$-mal osztjuk!
4. Az a és b mely értékeinél osztható maradék nélkül az $x^4 + 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ polinom $(x + 2)$-vel, illetve $(x - 1)$-gyel maradékkal, ahol a maradék 3?
5. Az $f(x)$ többtagú kifejezés $(3x^2 - 5x + 2)$-vel való osztásakor a maradék $7x + 1$. Határozd meg a maradékot, ha ugyanezt a polinomot $x - 1$ és $3x - 2$ kéttagú kifejezésekkel osztjuk!
6. Add meg a Viète-formulákat, ha $n = 4$!
7. Add meg azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei 5, –2, 1 és főegyütthatója –2! A feladatot oldd meg kétféleképpen!
8. Az a mely értékeinél egyenlő az $x^2 - (a + 2)x + 3a$ polinom négyzeteinek összege 12-vel?
9. Hányszoros gyöke az $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ polinomnak a 2?
10. Írd fel azt a harmadfokú polinomot, melynek 3 kétszeres, (–1) egyszeres gyöke, főegyütthatója pedig 2!
11. Határozd meg az a és b azon értékeit, melyeknél a 3 kétszeresnél nem kisebb gyöke az $f(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$ polinomnak!
12. Írd fel azt a másodfokú egyenletet, melynek gyökei ellentétes előjelűek az $x^2 - 5x + 1 = 0$ egyenlet gyökeivel!
13. Írd fel azt a másodfokú egyenletet, melynek gyökei a $2x^2 - 5x + 1 = 0$ egyenlet gyökeinek reciprokai!
14. Írd fel azt a másodfokú egyenletet, melynek gyökei az $x^2 + 6x + 3 = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetei!

7.4. A Horner-séma

Az $f(x)$ többtagú kifejezésnek az $(x - a)$ kéttagú kifejezéssel való osztása során célszerű egy speciális sémát, az úgynevezett *Horner-sémát* alkalmazni.

Legyen $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ polinom, melyet el kell osztani az $(x - a)$ kéttagú kifejezéssel. Az n-edfokú polinomot elsőfokú polinommal osztva valamely $Q(x)$ $(n - 1)$-edfokú (vagyis $Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, ahol $b_0 \neq 0$) polinomot kapunk és R maradékot. Ekkor $f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$, vagyis

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (x - a) \cdot (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + R.$$

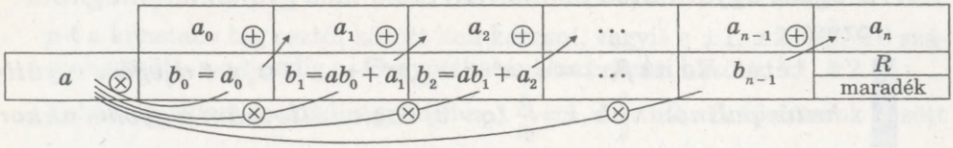
Mivel a bal és jobb oldalak azonosan egyenlők, összeszorozva a jobb oldalon álló többtagú kifejezéseket, az azonos hatványkitevőjű tagok együtthatóit egyenlővé tesszük:

x^n	$a_0 = b_0$
x^{n-1}	$a_1 = b_1 - ab_0$
x^{n-2}	$a_2 = b_2 - ab_1$
.....	.....
x^1	$a_{n-1} = b_{n-1} - ab_{n-2}$
x^0	$a_n = R - ab_{n-1}$

Ezekből az egyenlőségekből meghatározzuk a $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ együtthatókat és az R maradékot:

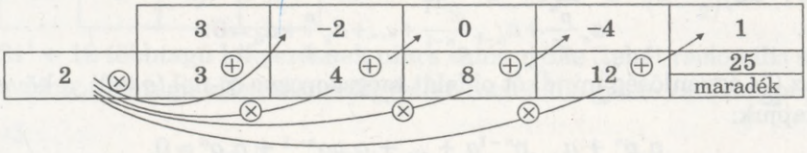
$b_0 = a_0$, $b_1 = ab_0 + a_1$, $b_2 = ab_1 + a_2$, ..., $b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}$, $R = ab_{n-1} + a_n$.

Vegyük észre, hogy a nem teljes hányados első együtthatója egyenlő az osztandó első együtthatójával. A nem teljes hányados többi együtthatóját és a maradékot a következőképpen határozzuk meg: ahhoz hogy megkapjuk a nem teljes hányadosnak b_{k+1}-edik tényezőjét, elegendő az előző b_k-adik együtthatót megszorozni a-val és hozzáadni az osztandó k-adik együtthatóját. Ezt a folyamatot célszerű egy táblázati-sémában megjeleníteni, melyet *Horner-sémának* neveznek.



1. példa. A Horner-séma alkalmazásával osszuk el az $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 4x + 1$ polinomot az $x - 2$ kéttagú kifejezéssel!

▶ Először meghatározzuk az $f(x)$ polinom minden együtthatóját (ha a polinomnak nincs másodfokú tagja, akkor a megfelelő együtthatót nullának vesszük), ezután a séma alapján meghatározzuk a nem teljes hányados együtthatóit és a maradékot:



Tehát a $3x^4 - 2x^3 - 4x + 1 = (x - 2)(3x^3 + 4x^2 + 8x + 12) + 25$. ◁

2. példa. Ellenőrizzük, hogy -3 gyöke-e az $f(x) = 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 2x - 42$ polinomnak!

▶ A Bézout-tétel alapján az $f(x)$ polinomnak $(x - a)$-val való osztásakor maradékul $f(a)$-t kapunk, ezért a maradékot a Horner-séma szerint az $f(x)$ polinomnak az $x - (-3) = x + 3$-mal történő osztásával határozzuk meg.

	2	6	4	−2	−42
−3	2	0	4	−14	0 (maradék = $f(-3)$)

Mivel az $f(-3) = 0$, ezért $x = -3$ az $f(x)$ polinom gyöke. ◁

Gyakorlatok

1. Határozd meg a Horner-séma alkalmazásával a nem teljes hányadost és a maradékot az $A(x)$ polinomnak a $B(x)$-el való osztásakor:
   1) $A(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; $B(x) = x + 1$;
   2) $A(x) = 5x^3 - 26x^2 + 25x - 4$; $B(x) = x - 5$;
   3) $A(x) = x^3 - 15x^2 + 10x + 24$; $B(x) = x + 3$!

2. A Horner-séma alkalmazásával ellenőrizd, hogy az $f(x)$ polinom osztható-e a $q(x)$ kéttagú kifejezéssel:
1) $f(x) = 4x^3 - x^2 - 27x - 18$; $q(x) = x + 2$;
2) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20$; $q(x) = x - 2$!

3. Oszd el az $A(x)$ polinomot a $B(x)$ kéttagú kifejezéssel:
1) $A(x) = 2x^3 - 19x^2 + 32x + 21$; $B(x) = x - 7$;
2) $A(x) = 4x^3 - 24x^2 + 21x - 5$; $B(x) = 2x - 1$!

7.5. Az egész együtthatós polinomok racionális gyökeinek meghatározása

4. tétel. ***Ha az*** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ***egész együtthatós polinomnak*** $x = \frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ***racionális szám a gyöke, akkor*** p ***a konstans (szabad) tag*** (a_0) ***osztója,*** q ***pedig a főegyüttható*** a_n ***osztója lesz.***

● Ha $\frac{p}{q}$ az $f(x)$ polinom gyöke, akkor $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Behelyettesítve az x helyére a $\frac{p}{q}$ számot az $f(x)$ képletbe, akkor az utóbbi egyenlőségből kapjuk

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0. \qquad (1)$$

Az (1) egyenlőség mindkét oldalát megszorozva q^n-nel $(q \neq 0)$, a következőt kapjuk:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0. \qquad (2)$$

A (2) egyenlőség mindegyik összeadandója, az utolsót kivéve osztható p-vel. Ezért $a_0 q^n = -(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1})$ osztható p-vel.

A $\frac{p}{q}$ alakban felírt racionális szám egy tovább már nem egyszerűsíthető tört, vagyis a p és q számoknak nincs közös osztójuk.

Az $a_0 q^n$ szorzat akkor és csakis akkor osztható p-vel (mikor a p és q relatív törzsszámok), amikor az a_0 osztható p-vel. Vagyis a p szám az a_0 konstans tag osztója.

Hasonlóan a (2) egyenlőség mindegyik összeadandója, kivéve az elsőt, osztható q-val. Ekkor $a_n p^n = -(a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n)$ osztható q-val. Mivel p és q relatív törzsszámok, ezért az a_n osztható q-val, vagyis q a polinom főegyütthatójának osztója.○

Ennek a tételnek két következménye is létezik. Ha $q = 1$, akkor a polinom gyöke a p egész szám, amely az a_0 osztója. Ebből az alábbi következmény adódik.

1. következmény. ***Az egész együtthatós polinom bármely egész gyöke a szabad tag osztója lesz.***

Ha az adott $f(x)$ polinomban $a_n = 1$, akkor az a_n osztói csakis a ± 1 számok lehetnek, vagyis ebben az esetben $q = \pm 1$, és igaz a következő állítás.

2. következmény. ***Ha egész együtthatós egyenlet főegyütthatója 1-gyel egyenlő, akkor minden racionális gyöke (ha létezik ilyen) egész szám.***

1. példa. Határozzuk meg a $2x^3 - x^2 + 12x - 6$ polinom racionális gyökeit!

▶ Legyen $\frac{p}{q}$, amely egy nem egyszerűsíthető tört, a polinom gyöke. Akkor a p-t a konstans tag osztói között kell keresni, vagyis a ± 1, ± 2, ± 3, ± 6 számok között, a q-t pedig a főegyütthatónak az osztói között: ± 1, ± 2.

Tehát a polinom racionális gyökeit a $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, $\pm\frac{3}{2}$, ± 2, ± 3, ± 6 számok között kell keresni. Annak ellenőrzésére, hogy az adott szám gyöke-e a polinomnak, érdemes a Horner-sémát alkalmazni. Az $x = \frac{1}{2}$ esetén a következő táblázatot kapjuk.

	2	−1	12	−6
$\frac{1}{2}$	2	0	12	0

A Horner-séma alapján felírható az alábbi egyenlet:

$$2x^3 - x^2 + 12x - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 + 12\right).$$

A $2x^2 + 12$ többtagú kifejezésnek nincs valós gyöke (tehát racionális sincs), ezért az adott többtagú kifejezésnek egyetlen racionális gyöke van, mégpedig az $x = \frac{1}{2}$. ◁

2. példa. Alakítsuk szorzattá a $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 2$ polinomot!

▶ A polinom egész gyökeit a konstans tag osztói között keressük: ± 1, ± 2. Az 1 megfelel. A $P(x)$-et osztjuk az $x - 1$-gyel a Horner-séma alkalmazásával.

	2	3	−2	−1	−2
1	2	5	3	2	0

Ekkor $P(x) = (x - 1)(2x^3 + 5x^2 + 3x + 2)$. A $2x^3 + 5x^2 + 3x + 2$ harmadfokú polinom egész gyökei a konstans tagjának osztói közül valók: ± 1, ± 2. A (-2) megfelel. Osztjuk $(x + 2)$-vel.

	2	5	3	2
−2	2	1	1	0

A $P(x) = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 1)$ egyenlőséget kaptuk.
A $2x^2 + x + 1$ másodfokú polinomnak nincsenek valós gyökei és ezért nem írható fel gyöktényezős alakban.
Felelet: $P(x) = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 1)$. ◁

Megjegyezzük, hogy a valós számok halmazán nem lehet mindig meghatározni a polinom mindegyik gyökét (például az $x^2 + x + 1$ másodfokú polinomnak nincsenek valós gyökei). Tehát az n-edfokú polinomot sem mindig lehet szorzattá alakítani, vagyis gyöktényezős alakban megadni. De a páratlan kitevőjű polinom mindig felírható elsőfokú és másodfokú polinom szorzataként, a páros kitevőjű polinom pedig másodfokú polinomok szorzataként.

Például a negyedfokú polinom felírható másodfokú polinomok szorzataként. Hogy meghatározzuk ennek a kifejezésnek az együtthatóit, néha alkalmazni lehet a *határozatlan együtthatók módszerét.*

3. példa. Alakítsuk szorzattá az $x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6$ polinomot!

▶ Racionális gyököt nem sikerült meghatározni, tehát a polinomnak nincsenek racionális (egész) gyökei.

Megpróbáljuk két másodfokú polinom szorzatára felbontani. Mivel a polinom főegyütthatója 1, ezért a másodfokú polinomok főegyütthatója szintén 1 lesz. Vagyis a polinom lehetséges felbontása a következő alakban írható fel:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d), \tag{3}$$

ahol az a, b, c és d ismeretlen (egyelőre) együtthatók.

Az egyenlőség bal és jobb oldalán álló polinomok azonosan egyenlők, ezért az x azonos hatványainak együtthatói is egyenlők. Felbontjuk az egyenlőség jobb oldalán a zárójeleket, és a megfelelő együtthatókat összevetjük. Ezt a következő módon célszerű felírni:

$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = x^4 + cx^3 + dx^2 + ax^3 + acx^2 + adx + bx^2 + bcx + bd.$

A következő egyenletrendszert kaptuk:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^4 & 1 = 1, \\ x^3 & 1 = a + c, \\ x^2 & 3 = ac + b + d, \\ x^1 & 1 = bc + ad, \\ x^0 & 6 = bd. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Az egyenletrendszer helyettesítési módszerrel történő megoldása során egy negyedfokú egyenlethez jutunk, ezért a (4) rendszert az egész számok halmazán próbáljuk megoldani. A (4) egyenletrendszer utolsó egyenlőségéből kapjuk, hogy b és d számok csak a 6 osztói lehetnek. Az összes lehetséges változatot egy táblázatba írjuk.

b	1	–1	2	–2
d	6	–6	3	–3

A (3) egyenlőség b és d együtthatói egyenrangúak, ezért mi nem vizsgáljuk a $b = 6$ és $d = 1$ vagy a $b = -6$ és $d = -1$ stb.

A b és d mindegyik párjára a (4) rendszer harmadik egyenlőségéből meghatározzuk az ac-t: $ac = 3 - (b + d)$, és a második egyenlőségből az $a + c = 1$.

Ismerve az $a + c$ és ac értékeket, Viète fordított tételéből meghatározzuk az a és c értékeit, mint a másodfokú egyenlet gyökeit. Mikor ismert lesz az a, b, c, d mindegyik értéke, akkor a (4) rendszer negyedik egyenlőségéből $bc + ad = 1$, ki lehet választani azokat a számokat, melyek a (4) rendszer megoldásai lesznek. Célszerű ezt a fejtegetést táblázatba foglalni.

b	1	-1	2		-2
d	6	-6	3		-3
$a + c = 1$	1	1	1		1
$ac = 3 - (b + d)$	-4	10	-2		8
a	nem egész	nem létezik	2	-1	nem létezik
c	nem egész	nem létezik	-1	2	nem létezik
$bc + ad = 1$	—	—	$bc + ad = 4$ $4 \neq 1$	$bc + ad = 1$ $1 = 1$	—

Mint látható, a (4) rendszert kielégíti az $a = -1, b = 2, c = 2, d = 3$. Ekkor a (3) rendszer a következőképpen írható fel:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = (x^2 - x + 2)(x^2 + 2x + 3). \qquad (5)$$

Mivel az $x^2 - x + 2$ és $x^2 + 2x + 3$ másodfokú polinomoknak nincsenek racionális, de még valós gyökei sem, ezért az (5) egyenlőség adja meg a végeredményt. ◁

Gyakorlatok

1. Határozd meg a polinomok egész gyökeit:
1) $x^3 - 5x + 4$; 2) $2x^3 + x^2 - 13x + 6$;
3) $5x^3 + 18x^2 - 10x - 8$; 4) $4x^4 - 11x^2 + 9x - 2$!

2. Határozd meg az egyenletek racionális gyökeit:
1) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$; 2) $2x^3 - 5x^2 - x + 1 = 0$;
3) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$; 4) $3x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 7x - 2 = 0$!

3. Alakítsd szorzattá a polinomokat:
1) $2x^3 - x^2 - 5x - 2$; 2) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;
3) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$; 4) $x^4 - 2x^3 - 24x^2 + 50x - 25$!

4. Határozd meg az egyenletek valós gyökeit:
1) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$; 2) $x^3 - 7x - 6 = 0$;
3) $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$; 4) $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$!

5*. A határozatlan együtthatók módszerével alakítsd szorzattá a polinomot:
1) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 13x - 6$; 2) $x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 13x - 2$!

6*. Alakítsd szorzattá a polinomot! Előtte a határozatlan együtthatók módszerével írd fel $(x^2 + bx + c)^2 - (mx + n)^2$ alakban:
1) $x^4 + 4x - 1$; 2) $x^4 - 4x^3 - 1$; 3) $x^4 + 4a^3x - a^4$!

8. §. AZ ABSZOLÚTÉRTÉKES EGYENLETEK

15. táblázat

1. Az abszolútértékes[1] egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása

meghatározás szerint

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ ha } a > 0, \\ 0, \text{ ha } a = 0, \\ -a, \text{ ha } a < 0. \end{cases}$$

geometriai értelmezése szerint

$|\ a\ |$ *a számegyenesen az a pont és a 0 pont közötti távolság.*

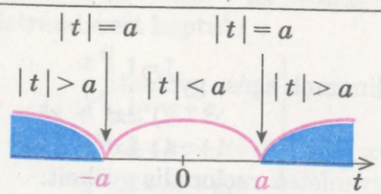
1. $|f(x)| = a.$
2. $|f(x)| = |g(x)|.$
3. $|f(x)| > a.$
4. $|f(x)| < a.$

általános módszer szerint

1. Meghatározni a megengedett értékek halmazát.
2. Meghatározni mindegyik abszolútérték jele alatti (abszolútértékes) függvény zérushelyeit.
3. Megjelölni a zérushelyeket a megengedett értékek halmazán, és ezzel intervallumokra osztani fel a halmazt.
4. Meghatározni mindegyik intervallumban a megoldást (és ellenőrizni, hogy ez a megoldás a vizsgált intervallumhoz tartozik-e).

speciális összefüggések alkalmazásával

2. Az abszolútérték geometriai értelmezése szerint (ha $a > 0$)



1. $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = a$ **vagy** $f(x) = -a.$
2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ **vagy** $f(x) = -g(x).$
3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ **vagy** $f(x) > a.$
4. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$

Általánosítás

5. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x) \text{ vagy } f(x) = -g(x). \end{cases}$
6. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)$ **vagy** $f(x) > g(x).$
7. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

[1] Az abszolútértékes egyenletek olyan egyenletek, amelyben az abszolútérték jel szerepel.

A 15. táblázat folytatása

3. Alkalmazva a speciális összefüggéseket
1. $\|u\| = u \Leftrightarrow u \geqslant 0$.
2. $\|u\| = -u \Leftrightarrow u \leqslant 0$.
3. $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow u^2 = v^2$.
4. $\|u\| > \|v\| \Leftrightarrow u^2 > v^2$. **Ekkor** $\|u\| - \|v\| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$; *abszolút értékek különbségének előjele megegyezik a négyzeteik különbségeinek előjelével.*
5. $\|u\| + \|v\| = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$
6. $\|u\| + \|v\| = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leqslant 0, \\ v \leqslant 0. \end{cases}$
7. $\|u\| + \|v\| = \|u + v\| \Leftrightarrow uv \geqslant 0$.
8. $\|u\| + \|v\| = \|u - v\| \Leftrightarrow uv \leqslant 0$.
9. $\|x - a\| + \|x - b\| = b - a \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$, **ahol** $a < b$.

Mintafeladatok megoldása

Bármely abszolútértékes egyenletet vagy egyenlőtlenséget a következő három módszer egyikével lehet megoldani: az abszolútérték definíciója alapján, az abszolútérték geometriai értelmezésének figyelembevételével vagy az általános módszer alkalmazásával. Néhány abszolútértékes egyenlet vagy egyenlőtlenség megoldható a speciális (relációk) összefüggések alkalmazásával is (15. táblázat).

A kiválasztott módszertől függően különbözőképpen kell leírni a megoldást.

Példa. Oldjuk meg a $|2x - 4| = 6$ egyenletet!

I. módszer (a meghatározás szerint)

Megoldás	*Magyarázat*
▶ 1) Ha $2x - 4 \geqslant 0$, (1) akkor a következő egyenletet kapjuk: $2x - 4 = 6$. Ekkor $x = 5$, amely kielégíti az (1) feltételt. 2) Ha $2x - 4 < 0$, (2) akkor a következő egyenletet kapjuk $-(2x - 4) = 6$. Ekkor $x = -1$, amely kielégíti a (2) feltételt. *Felelet:* 5; –1. ◁	Az abszolútérték meghatározásának figyelembevételével a következő két esetet vizsgáljuk meg: $2x - 4 \geqslant 0$ és $2x - 4 < 0$. A definíció szerint *pozitív (nemnegatív) szám abszolútértéke maga a szám, negatív szám abszolútértéke az adott szám ellentettje*. Ezért ha $2x - 4 \geqslant 0$ | $2x - 4$| $= 2x - 4$, és $2x - 4 < 0$ | $2x - 4$| $= -(2x - 4)$. Mindegyik esetben megoldjuk a kapott egyenletet és ellenőrizzük, hogy mindegyik kapott gyök kielégíti az adott feltételt.

II. módszer (az abszolútérték geometriai értelmezése alapján)

Megoldás	*Magyarázat*
▶ $2x - 4 = 6$ vagy $2x - 4 = -6$, $2x = 10$ vagy $2x = -2$, $x = 5$ vagy $x = -1$. *Felelet:* 5; –1. ◁	Az abszolútérték geometriai értelmezéséből következően $\lvert 2x - 4 \rvert$ ez a 0 pont és a $2x - 4$ pont közötti távolság, ami az egyenlet feltétele alapján 6-tal egyenlő. Ugyanakkor 6 egységet a 0 ponttól jobbra (ekkor 6-ot kapjuk) és balra (ekkor a –6-ot kapjuk) is fel lehet venni. Tehát a $\lvert 2x - 4 \rvert = 6$ egyenlőség akkor és csakis akkor lehetséges, ha $2x - 4 = 6$ vagy $2x - 4 = -6$.

Megjegyzés. Az abszolútérték geometriai értelmezése során az abszolútérték jele észrevétlenül tűnik el, vagyis nem szükséges alkalmazni a meghatározás leírt változatát.

Az abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásának általános módszere lényegében az intervallum módszer kissé módosított változata. Megmagyarázzuk ennek a módszernek lényegét a két abszolútértéket tartalmazó példán

$$|f(x)| + |g(x)| = a \quad (a > 0).$$

● Az egyenletek megoldásához fel kell bontanunk az abszolútértékek jelét. Ehhez tudni kell, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények hol vesznek fel pozitív, illetve negatív értékeket. Vagyis lényegében meg kell oldanunk a következő egyenlőtlenségeket

$$f(x) \geq 0, \quad (1)$$
$$g(x) \geq 0. \quad (2)$$

Az egyenlőtlenségek mindegyike megoldható intervallum módszerrel. Az egyenlőtlenségeket úgy alakítjuk át az intervallum módszerrel, hogy egyszerre lehessen megoldani az utóbbi egyenlőtlenségek mindegyikét. Mint ismeretes, az (1) egyenlőtlenség megoldása az intervallum módszerrel a megengedett értékek halmazának meghatározásával kezdődik (vagyis az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának meghatározásával), és a (2) egyenlőtlenség megoldása szintén az adott függvény alaphalmazának meghatározásával (vagyis a $g(x)$ függvény értelmezési tartományának meghatározásával)). Ahhoz, hogy egyszerre oldjuk meg mindkét egyenlőtlenséget, meg kell határozni az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények közös alaphalmazát (megengedett értékeik halmazát), vagyis meg kell **határozni az eredeti egyenlet megengedett értékeinek halmazát** (ez a megoldássorozat *első lépése*).

Az $f(x) \geq 0$ és $g(x) \geq 0$ egyenlőtlenségek megoldásának folytatásához meg kell találnunk az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények zérushelyeit, vagyis **meg kell határozni az abszolútértékek alatti függvények zérushelyeit** (ez *a második lépés*).

Ha tovább alkalmazzuk az intervallum módszerét mind a két egyenlőtlenségre egyszerre, akkor meg kell jelölni a **megengedett értékek halmazán az abszolútértékek alatti függvények zérushelyeit, és felosztani intervallumokra a megengedett értékek halmazát** (ez *a harmadik lépés*).

Mindegyik így kapott intervallumon az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények előjelei nem változnak. Meg tudjuk határozni **az abszolútérték jele alatti függvények előjeleit mindegyik intervallumon** (az adott intervallum bármelyik pontjában), **fel tudjuk bontani az abszolútérték jeleit és meg tudjuk határozni az adott egyenlet megoldásait mindegyik intervallumon** (ez *a negyedik lépése* az általános sémának). ◁

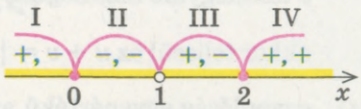
A fenti séma az abszolútértékes egyenlőtlenségek megoldásánál is hasonlóképpen alkalmazható.

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Oldjuk meg az $\left|\frac{x}{x-1}\right|+|x-2|=2$ egyenletet!

▶ 1. A megengedett értékek halmaza vagy alaphalmaz: $x \neq 1$.

2. Az abszolútérték jele alatti függvények zérushelyei: $\frac{x}{x-1}=0$ $(x=0)$ és $x-2=0$ $(x=2)$.



67. ábra

3. A 0 és 2 zérushelyek a megengedett értékek halmazát négy intervallumra osztják. Az intervallumokon az abszolútérték jele alatti függvények előjeleit[1] a 67. ábra szemlélteti.

4. Meghatározzuk mindegyik intervallumban az adott egyenlet megoldásait (mivel az I. és III. intervallumban az abszolútérték jele alatti függvények előjelei egyformák, ezért célszerű egyesíteni ezeket az intervallumokat).

Az I. és III. intervallum: $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$. Figyelembe véve az abszolútérték jele alatt álló függvények előjeleit ezeken az intervallumokon és az abszolútérték meghatározását, megkapjuk, hogy ezeken az intervallumokon az adott egyenlet ekvivalens az $\frac{x}{x-1}-(x-2)=2$ egyenlettel. Innen $x=0$ vagy $x=2$. A kapott értékek nem tartoznak ezekhez az intervallumokhoz, tehát az adott intervallumokban az egyenletnek nincsenek gyökei.

A II. intervallum: $x \in [0; 1)$. (Vigyázzunk, hogy el ne hagyjuk az $x=0$ értéket, amely a megengedett értékek halmazához tartozik.) Ebben az intervallumban a $-\frac{x}{x-1}-(x-2)=2$ egyenletet kapjuk. Innen $x=0$. Ez gyöke az egyenletnek, mivel benne van az intervallumban.

A IV. intervallum: $x \in [2; +\infty)$ (ebben az intervallumban sem szabad megfeledkezni az $x=2$ értékről). Az $\frac{x}{x-1}+x-2=2$ egyenletet kapjuk. Innen $x=2$. Ez gyöke az egyenletnek, mert az adott intervallumhoz tartozik.

Az egyes intervallumok megoldásainak egyesítésével megkapjuk az adott egyenlet gyökeit a teljes megengedett értékek halmazán.

Felelet: 0; 2. ◁

[1] A 67. ábrán mindegyik intervallumban az első előjel az $\frac{x}{x-1}$ függvény előjele, a második pedig az $x-2$ függvény előjele. Az ábra elkészítésénél először célszerű a számegyenesen megjelölni a megengedett értékek halmazát, aztán a megengedett értékek halmazán az abszolút értékek alatti függvények zérushelyeit.

Illusztráljuk a 15. táblázatban található speciális összefüggések levezetését és alkalmazását.

Igazoljuk például az 5. összefüggést: $|u|+|v|=u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$

● Felírjuk $|u|+|v|=u+v$ alakban az adott egyenlőséget, és illusztráljuk azt a 6. osztályban megismert szabályokkal, melyeket az egyforma és a különböző előjelű számokkal való műveletekről tudunk. Két, u és v szám összeadásához össze kell adni ezek abszolút értékét, tehát ekkor a számok előjelei megegyeznek. Ha mindkét szám negatív lenne, akkor az összegük szintén negatív, de $u+v=|u|+|v| \geqslant 0$. Ekkor azt kapjuk, hogy az u és v mindegyike nemnegatív szám. Az összefüggés fordítva is igaz: ha $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0, \end{cases}$ akkor teljesül az $u+v=|u|+|v|$ egyenlőség. Tehát $u+v=|u|+|v|$ egyenlőség egyenértékű az $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszerrel. ○

2*. példa. Oldjuk meg az $|x-5|+|2x+5|=3x$ egyenletet!

Megoldás

Mivel $3x=(x-5)+(2x+5)$, ezért adott egyenlet $|u|+|v|=u+v$ alakú, de ez az egyenlőség akkor és akis akkor teljesülhet, ha az u és v indegyike nemnegatív szám lesz. Tehát az adott egyenlet ekvivalens a következő rendszerrel:

$$\begin{cases} x-5 \geqslant 0, \\ 2x+5 \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{Innen} \quad \begin{cases} x \geqslant 5, \\ x \geqslant -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

hát $x \geqslant 5$.

lelet: $[5; +\infty)$. ◁

Magyarázat

Ha bevezetjük az $x-5=u$ és $2x+5=v$ jelöléseket, akkor $u+v=3x$ és az adott egyenlet $|u|+|v|=u+v$ alakú. Az 5. összefüggés alapján ez ekvivalens a következő rendszerrel:

$$\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy az adott egyenlet megoldható az általános módszerrel is, de ekkor a megoldás sokkal bonyolultabb lesz.

Az *abszolútértékes egyenlőtlenségeknél* az abszolútérték jelének felbontása asonló az abszolútértékeket tartalmazó egyenleteknél alkalmazott módszerekkel.

3. példa. Oldjuk meg a $|2x-5| \leqslant 7$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

Az abszolútérték geometriai értelzése szerint az adott egyenlőtlenség vivalens a következő egyenlőtlenség-:

$$-7 \leqslant 2x-5 \leqslant 7. \qquad (1)$$

Magyarázat

Az $|f(x)| \leqslant a$ alakú egyenlőtlenséget (ha $a > 0$) érdemes az abszolútérték geometriai értelmezésének alkalmazásával megoldani. Jelen esetben az adott egyenlőtlenség $|t| \leqslant 7$ alakú lesz.

Ekkor $-2 \leqslant 2x \leqslant 12$, tehát
$-1 \leqslant x \leqslant 6$.

Felelet: $[-1; 6]$. ◁

A szám abszolútértéke a koordinátaegyenesen megegyezik az adott számot ábrázoló pont és a 0 pont közötti távolsággal. Vagyis az adott egyenlőtlenséget minden olyan pont kielégíti, amely a $[-7; 7]$ intervallumhoz tartozik, vagyis $-7 \leqslant t \leqslant 7$. Ha felmerül valamilyen probléma az (1) kettős egyenlőtlenség megoldása során, akkor felcserélhetjük a vele ekvivalens $\begin{cases} 2x-5 \geqslant -7, \\ 2x-5 \leqslant 7 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszerre.

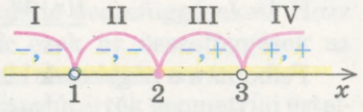
4. példa. Oldjuk meg az egyenlőtlenséget:

$$\frac{|x-3|}{|x-2|-1} \geqslant 1! \qquad (1)$$

▶ 1. A megengedett értékek halmaza: $|x-2|-1 \neq 0$. Ekkor $|x-2| \neq 1$, vagyis $x-2 \neq \pm 1$, tehát $x \neq 3$ vagy $x \neq 1$.

2. Az abszolútérték alatti függvények zérushelyei: $x-3=0$ ($x=3$ nem tartozik a megengedett értékek halmazához) és az $x-2=0$ ($x=2$).

3. A 2 zérushely négy intervallumra osztja a megengedett értékek halmazát. A 68. ábra szemlélteti az abszolútérték alatti függvények előjeleit az egyes intervallumokon (minden intervallumban az első jel az $x-3$ függvény előjele, a második pedig az $x-2$ függvényé).



68. ábra

4. Meghatározzuk az adott egyenlőtlenség megoldásait mindegyik intervallumban (mivel az abszolút értékek jelei alatt álló függvények előjelei az I. és II. intervallumon megegyeznek, célszerű a megoldás során egyesíteni ezeket).

Az I. és II. intervallum: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2]$. Figyelembe véve az abszolútértékek jelei alatt álló függvények előjeleit ezeken az intervallumokon és az abszolútérték meghatározását, azt kapjuk, hogyha $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2]$ az adott egyenlőtlenség ekvivalens a $\frac{-(x-3)}{-(x-2)-1} \geqslant 1$ egyenlőtlenséggel. Ekkor $\frac{3-x}{1-x} \geqslant 1$, vagyis $\frac{2}{1-x} \geqslant 0$. Innen $x < 1$. Mivel a vizsgált intervallumhoz minden olyan érték hozzátartozik, melyekre $x < 1$, ezért ebben az esetben a megoldás is $x < 1$.

A III. intervallum: $x \in [2; 3)$. Ezen az intervallumon a $\frac{-(x-3)}{x-2-1} \geqslant 1$ egyenlőtlenséget kapjuk, vagyis $\frac{-(x-3)}{x-3} \geqslant 1$. De a III. intervallumból vett x bármely értékénél az utóbbi egyenlőtlenség egy hamis egyenlőtlenséggé ($-1 \geqslant 1$) alakul át. Tehát a III. intervallumon az (1) egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

A IV. intervallum: $x \in (3; +\infty)$. Ebben az intervallumban az $\frac{x-3}{x-2-1} \geqslant 1$ egyenlőtlenséget kapjuk, vagyis $\frac{x-3}{x-3} \geqslant 1$. Könnyű belátnunk, hogy bármely, a IV. intervallumból vett x érték esetén az (1) egyenlőtlenség igaz számegyenlőtlenséggé ($1 \geqslant 1$) alakul át. Tehát a IV. intervallumból vett bármelyik szám ($x > 3$) megoldása az (1) egyenlőtlenségnek.

Az egyes intervallumok megoldásainak egyesítésével megkapjuk az adott egyenlet gyökeit a teljes (alaphalmazon) megengedett értékek halmazán: $x < 1$ vagy $x > 3$.

Felelet: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. ◁

Megjegyezzük, hogy néha az abszolútértékes egyenlőtlenségek megoldása során hasznos lehet a 15. táblázatban található speciális összefüggések alkalmazása.

5*. példa. Oldjuk meg a $\frac{(|x-1|-|x+3|)(|2x|-|x+6|)}{|1-x|-|x+2|} < 0$ egyenlőtlenséget!

▶ Mivel $|a| \geqslant 0$ és az $y = t^2$ függvény monotonon növekvő a nemnegatív számok halmazán, ezért minden különbséget tartalmazó abszolútértékes egyenlőtlenséget helyettesíthetünk a négyzetek különbségével (vagyis alkalmazható a 4. összefüggés: $|u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$). Ekkor az adott egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk:

$$\frac{\left((x-1)^2-(x+3)^2\right)\left((2x)^2-(x+6)^2\right)}{(1-x)^2-(x+2)^2} < 0.$$

Felbontva a négyzetek különbségét azt kapjuk, hogy:

$$\frac{(-4)(2x+2)(x-6)(3x+6)}{(-1-2x)3} < 0.$$

Majd az intervallum-módszert alkalmazva megkapjuk, hogy $-2 < x < -1$ vagy $-\frac{1}{2} < x < 6$ (69. ábra).

Felelet: $-2 < x < -1$ vagy $-\frac{1}{2} < x < 6$. ◁

A 15. táblázatban található általános módszert nemcsak az egyenletek és az egyenlőtlenségek megoldása során alkalmazhatjuk, hanem az abszolútértéket tartalmazó átalakítások végrehajtásakor is.

Például, ha meg kell rajzolni az $f(x) = |x+1| + |x-1|$ függvény grafikonját, először célszerű az általános módszer szerint felbontani az abszolútértékeket, és csak ezután ábrázolni az $f(x)$ függvény grafikonját.

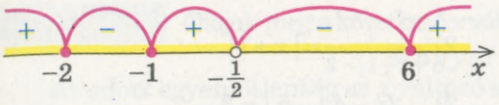
A hasonló példák megoldásakor az alábbiak szerint járhatunk el.

6. példa. Ábrázoljuk az $f(x) = |x+1| + |x-1|$ függvény grafikonját!

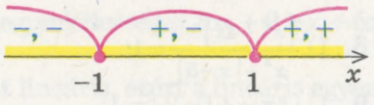
▶ 1. A függvény értelmezési tartománya: $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Az abszolútértékek alatti függvények zérushelyei: $x = -1$ és $x = 1$.

3. Megjelöljük a zérushelyeket az értelmezési tartományon és felosszuk intervallumokra az értelmezési tartományt (a 70. ábra az abszolútértékek alatti függvények előjeleit szemlélteti az egyes intervallumokban).



69. ábra



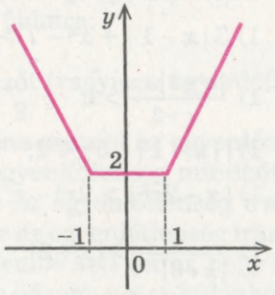
70. ábra

4. Ekkor

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1)-(x-1), & \text{ha } x\leqslant -1,\\ x+1-(x-1), & \text{ha } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1+x-1, & \text{ha } x\geqslant 1.\end{cases}$$

Tehát, $f(x)=\begin{cases}-2x, & \text{ha } x\leqslant -1,\\ 2, & \text{ha } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & \text{ha } x\geqslant 1.\end{cases}$

Ábrázoljuk a függvénygrafikont (71. ábra)



71. ábra

Ellenőrző kérdések

1. Magyarázd meg, milyen módszerekkel oldhatók meg az abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek! Mondj példákat mindegyik módszerre!
2. Magyarázd meg a 15. táblázatban lévő speciális összefüggéseket! Hozz fel példát arra, hogy hogyan alkalmazhatók ezek az összefüggések az abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása során!
3. Magyarázd meg a 15. táblázatban található abszolútérték geometriai értelmének általánosítását! Hozz fel példát arra, hogy hogyan alkalmazhatók ezek a módszerek az abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása során!

Gyakorlatok

Oldd meg az **(1–15)** abszolútértékes egyenleteket és egyenlőtlenségeket!

1. 1) $|3x-5|=7$; 2) $|8-4x|=6$; 3) $|x^2-5x|=6$.

2. 1) $|2x-3|>5$; 2) $|3-5x|<7$; 3*) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|>2$; 4) $\left|\frac{2x-3}{x-5}\right|<1$.

3. 1) $|x-2|-2x-1=0$; 2) $x^2+3x+|x+3|=0$.

4. 1) $|x-1|+|x-3|=2$; 2) $|x+1|+|x-5|=20$;
3) $|x+5|+|x-8|=13$.

5. 1) $|x+3|<x-2$; 2) $|x+1|+|x-2|\leqslant 2x-1$;
3) $|x+3|+|x-1|<|6-3x|$.

6. 1) $\sqrt{x^2-2x+1}+|x-2|=1$; 2) $\sqrt{x^2+4x+4}+|x|=x+5$.

7. 1) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2}=8$; 2) $\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{x^2+2x+1}=5$.

8. 1) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$.

9. 1) $||x-1|-2|=1$; 2) $||2x-4|-5|=3$.

10. 1) $|x^2-4x|<5$; 2) $|x^2-x-6|>4$.

11. 1) $3|x-1|+x^2-7>0$; 2) $|x-6|\geqslant x^2-5x+9$.

12. 1) $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1$; 2) $\frac{1}{|x|-3}<\frac{1}{2}$.

13. 1) $||x-1|-5|\leqslant 2$; 2) $|x-1|+|x+2|-|x-3|>4$.

14. 1) $|x-2x^2|>2x^2-x$; 2) $|x^2+x-20|\leqslant x^2+x-20$.

15. 1) $\frac{4}{|x+3|-1}\geqslant|x+2|$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}\geqslant|x-1|$.

16. Ábrázoljátok az alábbi függvények grafikonjait:

1) $y=|2x-4|+|2x+6|$; 2) $y=|x-5|+|3x+6|$!

9. §. PARAMÉTERES EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK

9.1. Paraméteres egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása

Ha a változókon és együtthatókon kívül az egyenletek és az egyenlőtlenségek felírásában betűket tartalmazó tényezők – paraméterek is vannak, akkor az ilyen egyenletek megoldása során a következő szabályt kell alkalmazni.

Bármilyen paraméteres egyenletet vagy egyenlőtlenséget egészen addig kell közönséges egyenletként vagy egyenlőtlenségként megoldani, ameddig mindegyik átalakítást, amelyeket a megoldás során alkalmazunk, egyértelműen végre lehet hajtani. Ha valamely átalakítás végrehajtása nem egyértelmű, akkor a megoldást különböző esetekre külön kell elvégezni, és mindegyikben a feleletet a paraméteren keresztül kell egyértelműen felírni.

A paraméteres egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásának menetét gyakran célszerű ábrákon illusztrálni, hogy könnyen megfigyelhető legyen az a lépés, amelyben nem egyértelmű az adott átalakítás, vagy az, hány esetre kell felosztani a megoldás menetét, vagy miben különbözik az egyik eset a másiktól. Az ilyen ábrákon, hogy el ne hagyjunk valamilyen megoldást, célszerű a végeredményeket téglalap alakú keretbe foglalni. Megjegyezzük, hogy a végeredményt a paraméter összes lehetséges értékére fel kell írni.

1. példa. Oldjuk meg a következő x változós egyenlőtlenséget: $3ax + 2 \geqslant x + 5a$.

Magyarázat

Az adott egyenlőtlenség az x változó szerint lineáris, ezért a lineáris egyenlőtlenség megoldásának ismert algoritmusát hajtjuk végre:

1) az x változót tartalmazó tagokat az egyenlőtlenség egyik oldalára visszük, az x változó nélküli tagokat pedig a másik oldalra:
$3ax - x \geqslant 5a - 2$;

2) a bal oldali részből kiemeljük a közös x tényezőt (vagyis az egyenlőtlenséget az $Ax \geqslant B$ alakra hozzuk): $(3a - 1)\,x \geqslant 5a - 2$.

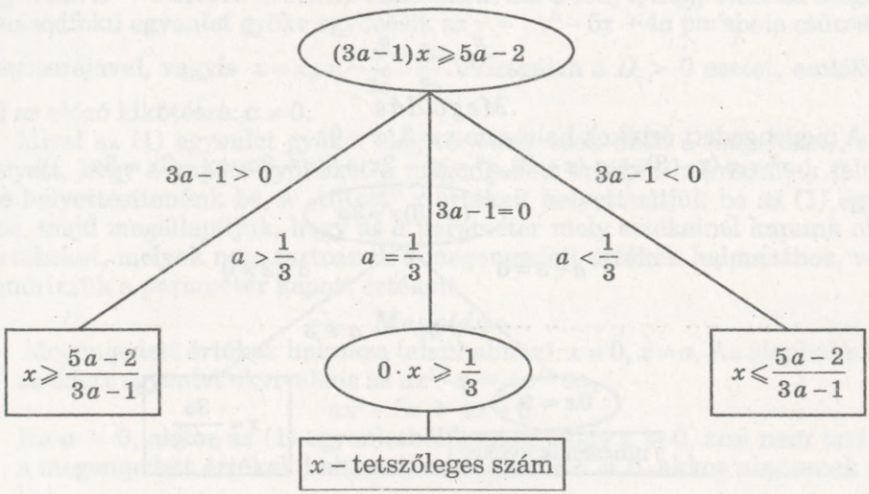
Az utóbbi egyenlőtlenség megoldásához el kellene osztani az egyenlőtlenség mindkét oldalát $(3a - 1)$-gyel. Azonban ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a pozitív számmal osztjuk, akkor az egyenlőtlenség iránya nem változik, ugyanakkor ha negatív számmal, akkor az egyenlőtlenség irányát ellenkezőjére kell változtatni. Ezenkívül azt is figyelembe kell venni, hogy nullával osztani nem lehet. Tehát ettől a lépéstől kezdve három esetet különböztetünk meg: $3a - 1 > 0$, $3a - 1 < 0$, $3a - 1 = 0$.

A fenti gondolatmenetet szemléletesen a következőképpen lehet ábrázolni:

$3ax + 2 \geqslant x + 5a.$

Megoldás

▶ $3ax - x \geqslant 5a - 2$



Felelet: 1) ha $a > \frac{1}{3}$, akkor $x \geqslant \frac{5a-2}{3a-1}$; 2) ha $a < \frac{1}{3}$, akkor $x \leqslant \frac{5a-2}{3a-1}$;

3) ha $a = \frac{1}{3}$, akkor x bármely szám. ◁

Nehezebb egyenletek vagy egyenlőtlenségek megoldása esetén azt kell figyelembe venni, hogy a paraméteres egyenletek és egyenlőtlenségek megoldását

ekvivalens átalakítások segítségével oldják meg, és az egyenletek és egyenlőtlenségek ekvivalens átalakítását az adott egyenlet vagy egyenlőtlenség megengedett értékeinek halmazán (vagyis az egyenlet vagy egyenlőtlenség felírása során keletkezett függvények közös értelmezési tartományán) kell elvégezni. Ezért mielőtt felírjuk a végeredményt, *figyelembe kell venni az adott egyenlet vagy egyenlőtlenség megengedett értékeinek halmazát.*

2. példa. Oldjuk meg az $\frac{x}{x-3}=1+\frac{a}{x}$ egyenletet, ahol a változó x.

Magyarázat

Az adott törtkifejezések akkor és csak akkor értelmezhetők, ha az adott törtek nevezői nem egyenlők nullával, tehát az egyenlet megengedett értékeinek halmaza: $x \neq 3$, $x \neq 0$.

Megszorozzuk az adott egyenlet mindkét oldalát $x(x-3)$-mal, azaz a törtek közös nevezőjével és egy algebrai egész kifejezést kapunk, amely az $x(x-3) \neq 0$ kikötés esetén (vagyis az egyenlet megengedett értékeinek halmazán) ekvivalens lesz az eredeti egyenlettel: $x^2 = x(x-3) + a(x-3)$. Ebből az egyenletből megkapjuk: $x^2 = x^2 - 3x + ax + 3a$, vagyis $ax - 3x = 3a$. Tehát $(a-3)x = 3a$.

Ahhoz, hogy meghatározzuk az x változó értékét, az egyenlet mindkét oldalát el kellene osztani $(a-3)$-mal, de az $a = 3$ esetén 0-val kellene ekkor osztani, amit nem lehet. Tehát, ettől a momentumtól kezdve két esetet kell megvizsgálni.

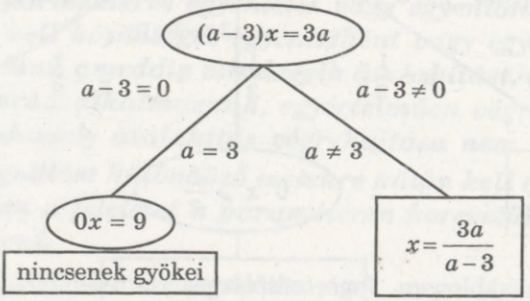
A megoldás gondolatmenetét szemléletesen ábrázoljuk a következő séman.

$$\frac{x}{x-3}=1+\frac{a}{x}$$

Megoldás

▶ A megengedett értékek halmaza: $x \neq 3$, $x \neq 0$.

$x^2 = x(x-3) + a(x-3)$, $x^2 = x^2 - 3x + ax - 3a$, $ax - 3x = 3a$,



Azt is figyelembe vesszük, hogy az a mely értékei mellett nem tartoznak a kapott gyökök a megengedett értékek halmazához, vagyis az a mely értékeinél kapjuk, hogy $x = 3$ és $x = 0$.

$\frac{3a}{a-3}=3$, ekkor $3a = 3(a-3)$, $3a = 3a - 9$ nincs megoldása. Tehát az a minden értéke mellett a $\frac{3a}{a-3}$ gyök nem egyenlő 3-mal.

Ha $\frac{3a}{a-3}=0$, ekkor $a = 0$. Tehát ha $a = 0$, akkor $x = 0$ hamis gyököt kapunk (nem tartozik a megengedett értékek halmazához), vagyis $a = 0$ esetén az adott egyenletnek nincs megoldása.

Felelet: 1) ha $a = 3$ és $a = 0$, akkor nincsenek gyökei;

2) ha $a \neq 3$, $a \neq 0$, akkor $x=\frac{3a}{a-3}$. ◁

3. példa. Oldjuk meg az $\frac{ax-1}{x-a}=\frac{4}{x}$ egyenletet, ahol a változó x.

Magyarázat

Elvégezzük az egyenlet ekvivalens átalakításait. Ehhez meghatározzuk a megengedett értékeinek halmazát (a tört nevezői nem lehetnek egyenlők nullával). Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a tört nevezőinek szorzatával (és amelyek nem egyenlők nullával az egyenlet megengedett értékeinek halmazán), akkor az $ax^2 - 5x + 4a = 0$ egyenletet kapjuk, amely ekvivalens az adott egyenlettel (a megengedett értékeinek halmazán). De az utóbbi egyenlet csak akkor másodfokú, ha $a \neq 0$, ezért a megoldása során két esetet kell megvizsgálni ($a = 0$ és $a \neq 0$).

Ha $a \neq 0$, akkor a kapott másodfokú egyenlet vizsgálatához meg kell különböztetni három esetet: $D = 0$, $D < 0$, $D > 0$ és ezek mindegyikére leellenőrizni, hogy a kapott gyökök hozzátartoznak-e a megengedett értékek halmazához vagy nem. $D = 0$ esetén érdemes alkalmazni azt a tényt, hogy ekkor a megfelelő másodfokú egyenlet gyöke egybeesik az $y = ax^2 - 5x + 4a$ parabola csúcsának abszcisszájával, vagyis $x = x_0 = -\frac{b}{2a}=\frac{5}{2a}$. Vizsgálva a $D > 0$ esetet, emlékezni kell az előző kikötésre: $a \neq 0$.

Mivel az (1) egyenlet gyökei elég terjedelmesek (lásd a megoldást), ezért ahelyett, hogy a kapott gyököket a megengedett értékek halmazának feltételébe helyettesítenénk be, a „tiltott" x értékeit helyettesítjük be az (1) egyenletbe, majd megállapítjuk, hogy az a paraméter mely értékeinél kapunk olyan x értékeket, melyek nem tartoznak a megengedett értékek halmazához, végül ellenőrizzük a paraméter kapott értékeit.

Megoldás

▶ Megengedett értékek halmaza (alaphalmaz): $x \neq 0$, $x \neq a$. Az alaphalmazon az adott egyenlet ekvivalens az $ax^2 - x = 4x - 4a$,

$$ax^2 - 5x + 4a = 0. \qquad (1)$$

1. Ha $a = 0$, akkor az (1) egyenletből kapjuk, hogy $x = 0$, ami nem tartozik a megengedett értékek halmazához, tehát ha $a = 0$, akkor nincsenek gyökei.
2. Ha $a \neq 0$, akkor az (1) egyenlet másodfokú. A diszkriminánsa $D = 25 - 16a^2$. Megvizsgálunk 3 esetet:

   1) $D = 0$, vagyis $25 - 16a^2 = 0$, $a=\pm\frac{5}{4}$. Ekkor az (1) egyenletnek egy gyöke van: $x=\frac{5}{2a}$.

Ha $a=\frac{5}{4}$, akkor az $x = 2$ az (1) egyenlet alaphalmazához tartozik, ezért gyöke az egyenletnek.

Ha $a=-\frac{5}{4}$, akkor az $x = -2$ az (1) egyenlet alaphalmazához tartozik, ezért gyöke az egyenletnek.

2) Ha $D < 0$, vagyis $25 - 16a^2 < 0$, tehát $a<-\frac{5}{4}$ vagy $a>\frac{5}{4}$. Akkor az (1) egyenletnek nincsenek gyökei.

3) Ha $D > 0$, vagyis $25 - 16a^2 > 0$, tehát $-\frac{5}{4}<a<\frac{5}{4}$, de $a \neq 0$. Akkor az (1) egyenletnek két gyöke van:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16a^2}}{2a}. \qquad (2)$$

Megállapítjuk, hogy a mely értékeinél nem tartoznak a meghatározott gyökök a megengedett értékek halmazához, vagyis milyen a értékek mellett kapjuk az $x = 0$ és az $x = a$ egyenlőséget.
Behelyettesítve az (1) egyenletbe az $x = 0$ értéket, $a = 0$ egyenlőséget kapunk, de ha $a = 0$, akkor az adott egyenletnek nincsenek gyökei.
Behelyettesítve az (1) egyenletbe az $x = a$-t, akkor az $a^3 - 5a + 4a = 0$, vagyis $a^3 - a = 0$, $a(a^2 - 1) = 0$. Ekkor $a = 0$ (az adott egyenletnek nincs gyöke), vagy $a = \pm 1$. Ellenőrizzük ezeket az a értékeket.
Ha $a = 1$, a megengedett értékek halmazát így írjuk fel: $x \neq 0$, $x \neq 1$. A (2) képletből kapjuk, hogy $x_1 = 4$ (hozzátartozik a megengedett értékek halmazához) és $x_2 = 1$ (nem tartozik hozzá a megengedett értékek halmazához). Tehát $a = 1$ esetén az adott egyenletnek csak egy gyöke van, az $x = 4$.
Ha $a = -1$, a megengedett értékek halmazát így írjuk fel: $x \neq 0$, $x \neq -1$ és a (2) képletből kapjuk, hogy $x_1 = -4$ (hozzátartozik a megengedett értékek halmazához) és $x_2 = -1$ (nem tartozik a megengedett értékek halmazához). Ezért $a = -1$ esetén az adott egyenletnek csak egy gyöke van, az $x = -4$.

Tehát a (2) gyökképlet akkor alkalmazható, ha $-\frac{5}{4}<a<\frac{5}{4}$, de csak az $a \neq 0$ és az $a \neq \pm 1$ teljesülése esetén.

Felelet: 1) ha $a=\frac{5}{4}$, akkor $x = 2$;

2) ha $a=-\frac{5}{4}$, akkor $x = -2$;

3) ha $a = 1$, akkor $x = 4$;

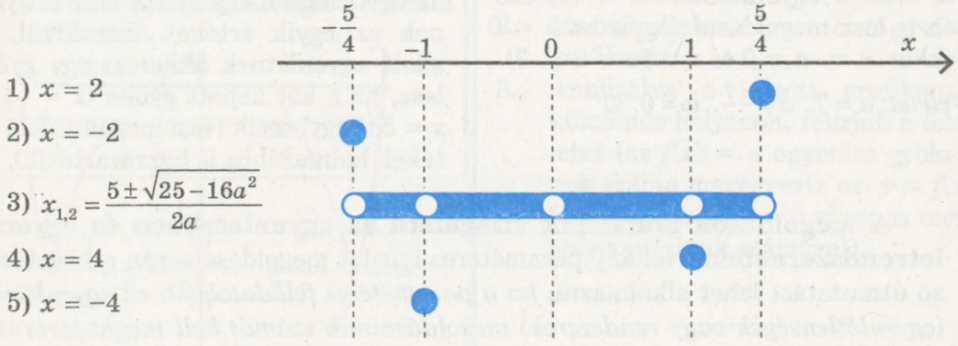
4) ha $a = -1$, akkor $x = -4$;

5) ha $a\in\left(-\frac{5}{4}; -1\right)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup\left(1; \frac{5}{4}\right)$, akkor $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16a^2}}{2a}$;

6) ha $a\in\left(-\infty; \frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$ vagy $a = 0$, akkor nincsenek gyökei. ◁

Megjegyzés. Hogy megkönnyítsük a felelet felírását ebben és az ehhez hasonló esetekben, a következő módszert kell alkalmazni. *Mielőtt felírjuk a bo-*

nyolult esetekben a feleletet, ábrázoljuk az (a) paraméter koordinátatengelyét, melyen megjelöljük a paraméter minden különleges értékét, amely a megoldás során felmerül. A paraméter tengelye alatt (balra tőle) felírjuk mindegyik megoldást (kivéve a „nincs megoldást") és mindegyik eredménnyel szembe megjelöljük, hogy a paraméter mely értékeinél kaphatjuk meg ezt a feleletet (72. ábra). *Ezután az eredményt felírják a paraméter mindegyik különleges értékére és mindegyik így kapott intervallumhoz a paraméter tengelyén.* A fenti példában a felelet felírása előtt érdemes egy ilyen sémát készíteni (72. ábra).



72. ábra

9.2. Paraméteres feladatok megoldása

Néhány paraméteres feladatot megoldása során a következőképpen kell eljárni: 1) *megoldani az adott paraméteres egyenletet vagy egyenlőtlenséget*; 2) *megvizsgálni a kapott eredményt.*

1. példa. Határozzuk meg az a paraméter összes olyan értékét, melynél az $\frac{(x+a)(x-5a)}{x+7} = 0$ egyenletnek egy gyöke lesz.

Megoldás	*Magyarázat*
▶ A megengedett értékek halmaza $x \neq -7$. A megengedett értékek halmazán az egyenlet ekvivalens az $(x + a)(x - 5a) = 0$ egyenlettel. Ekkor $x + a = 0$ vagy $x - 5a = 0$. Az $x = -a$ vagy az $x = 5a$ gyököket kapjuk. Figyelembe vesszük a megengedett értékek halmazát. Ehhez ellenőrizni kell, hogy mikor $x = -7$: $-a = -7$, ha $a = 7$, $5a = -7$, ha $a = -\frac{7}{5}$.	Mivel a tört akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha számlálója nulla, és a nevezője nem egyenlő nullával, tehát a megengedett értékek halmazán $(x + 7 \neq 0)$ az adott egyenlet ekvivalens az $(x + a)(x - 5a) = 0$ egyenlettel. Majd figyelembe vesszük, hogy a szorzat akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha legalább az egyik tényezője egyenlő nullával (a másik tényező pedig értelmezhető).

Ekkor az $a = 7$ esetén azt kapjuk, hogy:
$x = -a = -7$ hamis gyök;
$x = 5a = 35$ valódi gyök.

$a = -\frac{7}{5}$ esetén azt kapjuk, hogy:
$x = 5a = -7$ hamis gyök;
$x = -a = \frac{7}{5}$ valódi gyök.

Az eredeti egyenletnek $-a = 5a$ esetén is lesz megoldása, vagyis ha $a = 0$ (ekkor $x = -a = 0$ és $x = 5a = 0 \neq -7$).

Felelet: $a = 7$, $a = -\frac{7}{5}$, $a = 0$. ◁

Ezek után megállapítjuk, hogy a kapott gyökök az a mely értékei mellett nem tartoznak a megengedett értékek halmazához, vagyis ha $x = -7$: a gyököket -7-tel tesszük egyenlővé és meghatározzuk az a megfelelő értékeit.

A kapott a érték mellett a két gyök közül az egyik ($x = -7$) hamis gyök, és az egyenletnek egy gyöke lesz (a gyöknek az egyik értéke). Ezenkívül, az adott egyenletnek akkor is egy gyöke lesz, ha a két kapott gyöke ($x = -a$ és $x = 5a$) egybeesik (és a megengedett értékek halmazához is hozzátartozik).

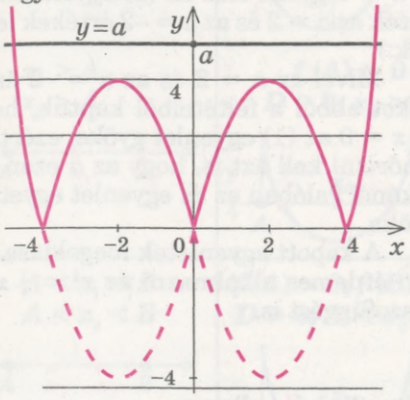
A megoldások számának vizsgálata az egyenletekben és egyenletrendszerekben. Néhány paraméteres feladat megoldása során a következő útmutatást lehet alkalmazni: *ha a paraméteres feladatokban az egyenletek (egyenlőtlenségek vagy rendszerek) megoldásainak számát kell meghatározni, akkor érdemes grafikus megoldást alkalmazni.*

Könnyű dolgunk van abban az esetben, ha az adott egyenlet $f(x) = a$ alakban van megadva, mivel az $y = a$ függvény grafikonja egy olyan egyenes, amely az Ox tengellyel párhuzamos (az a pontban metszi az Oy tengelyt). Megjegyezzük, hogy az eredeti egyenlet $f(x) = a$ alakú egyenletre történő felcserélése során csak ekvivalens átalakításokat szabad végrehajtani. Erre azért van szükség, hogy a kapott egyenlet gyökei azonosak legyenek az eredeti egyenlet gyökeivel, mivel ekkor a gyökeik száma is megegyezik. Ahhoz, hogy hány megoldása lesz az $f(x) = a$ egyenletnek, elegendő megállapítani, hogy az a paramétertől függően hány pontban metszi egymást az $y = f(x)$ függvény grafikonja és az $y = a$ egyenes. (Ehhez a megfelelő rajzon érdemes ábrázolni az egyenes minden jellegzetes helyzetét.)

2. példa. Hány megoldása lesz az a paramétertől függően az $||x^2 - 4|x|| = a$ egyenletnek?

Megoldás	*Magyarázat*
▶ Ábrázoljuk az $y = ||x^2 - 4|x||$ és az $y = a$ függvények grafikonjait. Analizálva a kapott grafikonok kölcsönös helyzetét, megkapjuk a *feleletet*:	Mivel ebben a feladatban az egyenlet megoldásainak számáról van szó, ezért az adott esetben grafikus módszert alkalmazunk.

1) ha $a < 0$, akkor az egyenletnek nincsenek gyökei;
2) ha $a = 0$, akkor az egyenletnek 3 gyöke van;
3) ha $0 < a < 4$, akkor az egyenletnek 6 gyöke van;
4) ha $a = 4$, akkor az egyenletnek négy gyöke van;
5) ha $a > 4$, akkor az egyenletnek 2 gyöke van.



73. ábra

1. Megrajzoljuk az
$$y = |x^2 - 4|x||$$
függvény grafikonját (figyelembe véve azt, hogy $x^2 = |x|^2$, az ábrázolást a következő lépésekkel lehet elvégezni:
$$x^2 - 4x \to |x|^2 - 4|x| \to$$
$$\to |x^2 - 4|x||).$$
2. Megrajzoljuk az $y = a$ függvény grafikonját.
3. Analizálva a kapott grafikonok kölcsönös helyzetét, felírjuk a feleletet (az $f(x) = a$ egyenlet gyökeinek száma megegyezik az $y = f(x)$ függvény és az $y = a$ egyenes metszéspontjainak számával).

Megjegyezzük, hogy a feladatok többségét nem lehet szokásos számítási módszerekkel megoldani (vagy az ilyen számítások nagyon hosszadalmasak lennének). Ezért először az adott egyenlet vagy egyenlőtlenség valamilyen tulajdonságát kell megvizsgálni, és ezután e tulajdonság alkalmazásával adjuk meg a választ a feladat kérdésére.

Például, figyelembe véve az egyenletben szereplő függvény párosságát, a következő útmutatás szerint is eljárhatunk.

Ha az $f(x) = 0$ egyenletben az $f(x)$ függvény páros vagy páratlan, akkor bármely α gyök mellett az egyenletnek egy másik gyökét is megnevezhetjük, mégpedig $-\alpha$-t.

3. példa. Határozzuk meg az a paraméter minden olyan értékét, melynél
$$x^4 - a|x|^3 + a^2 - 4 = 0 \qquad (1)$$
egyenletnek egy gyöke lesz!

Megoldás

Az $f(x) = x^4 - a|x|^3 + a^2 - 4$ függvény páros ($D(f) = \boldsymbol{R}$, $f(-x) = f(x)$).

Ha $x = \alpha$ az (1) egyenlet gyöke, akkor az $x = -\alpha$ is gyöke lesz ennek az egyenletnek. Ezért az egyenletnek csak

Magyarázat

Mivel az adott egyenlet bal oldalán egy páros függvény áll, alkalmazhatjuk rá a fenti útmutatást. Valóban, ha $x = \alpha$ az $f(x) = 0$ egyenlet gyöke, akkor az $f(\alpha) = 0$ egy igaz számegyenlőség lesz.

akkor lehet egyetlen gyöke, ha $\alpha = -\alpha$, vagyis ha $\alpha = 0$. Tehát az adott egyenletnek csak az $x = 0$ lehet az egyetlen gyöke. Ha $x = 0$, akkor az (1) egyenletből azt kapjuk, hogy $a^2 - 4 = 0$, ekkor az $a = 2$ vagy $a = -2$.

Ha $a = 2$, akkor az (1) egyenlet az $x^4 - 2 \mid x \mid^3 = 0$ egyenletté alakul át. Ekkor $\mid x \mid^4 - 2 \mid x \mid^3 = 0$, $\mid x \mid^3 \cdot (\mid x \mid - 2) = 0$. Innen az $\mid x \mid^3 = 0$ (ekkor $\mid x \mid = 0$, vagyis $x = 0$) vagy $\mid x \mid - 2 = 0$ (ekkor $\mid x \mid = 2$, vagyis $x = \pm 2$). Tehát $a = 2$ esetén az (1) egyenletnek három gyöke lesz, vagyis a feladat feltétele nem teljesül.

Ha $a = -2$, akkor az (1) egyenlet az $x^4 + 2 \mid x \mid^3 = 0$ egyenletté alakul át. Ekkor $\mid x \mid^4 + 2 \mid x \mid^3 = 0$, $\mid x \mid^3 \cdot (\mid x \mid + 2) = 0$. Mivel $\mid x \mid + 2 \neq 0$, ezért $\mid x \mid^3 = 0$. Innen $\mid x \mid = 0$, vagyis $x = 0$ az egyenlet egyetlen gyöke. Tehát az $a = -2$ kielégíti a feladat feltételét.

Felelet: $a = -2$. ◁

Figyelembe véve az $f(x)$ függvény párosságát azt kapjuk, hogy $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Tehát az $x = -\alpha$ szintén gyöke az $f(x) = 0$ egyenletnek. Ennek az egyenletnek csak akkor és csakis akkor lehet egy gyöke, ha az α és a $-\alpha$ azonos értékű. Ekkor $x = \alpha = -\alpha = 0$.

Ellenőrizzük, hogy léteznek-e az a paraméternek olyan értékei, melynél az $x = 0$ gyöke lesz az (1) egyenletnek. (Ezek az $a = 2$ és az $a = -2$ értékek lesznek.)

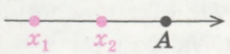
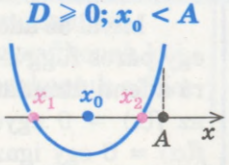
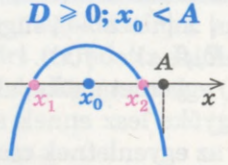
Mivel az $a = 2$ és az $a = -2$ értékeket abból a feltételből kaptuk, hogy az $x = 0$ az (1) egyenlet gyöke, ezért ellenőrizni kell azt is, hogy az a ezen értékénél valóban ez az egyenlet egyetlen gyöke.

A kapott egyenletek megoldása során érdemes alkalmazni az $x^4 = \mid x \mid^4$ összefüggést is.

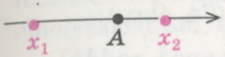
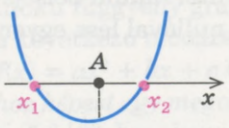
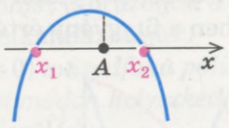
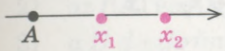
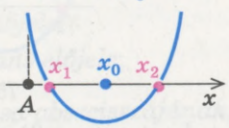
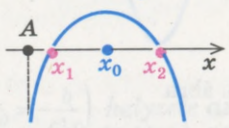
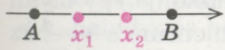
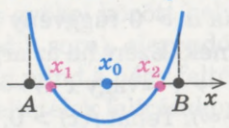
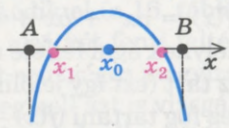
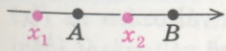
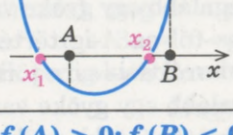
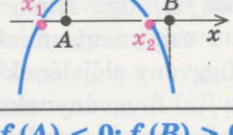
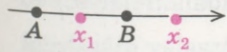
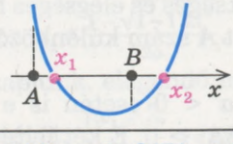
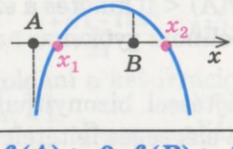
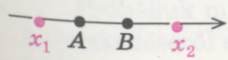
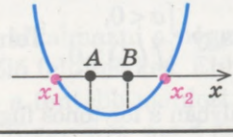
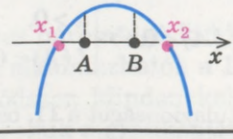
9.3. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ másodfokú polinom gyökei valamint az adott A és B számok egymáshoz való elhelyezkedésének alkalmazása

Néhány bonyolult paraméteres egyenlet megoldása közben alkalmazni lehet a másodfokú polinom gyökei elhelyezkedésének szükséges és elégséges feltételét. A legfontosabbakat ezek közül a 16. táblázatban (a táblázatban alkalmazzuk a tradicionális jelöléseket: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$) foglaltuk összesze.

16. táblázat

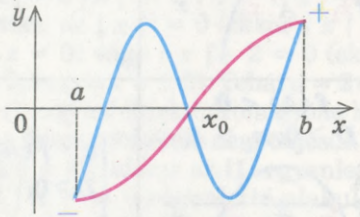
A gyökök elhelyezkedése	A gyökök elhelyezkedésének szükséges és elégséges feltételei		
	ha $a > 0$	ha $a < 0$	általános esetben $(a \neq 0)$
1. $x_1 < A$, $x_2 < A$ 	$f(A) > 0$, $D \geqslant 0$; $x_0 < A$ 	$f(A) < 0$, $D \geqslant 0$; $x_0 < A$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 < A \end{cases}$

A 16. táblázat folytatása

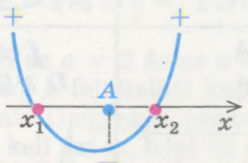
A gyökök elhelyezkedése	A gyökök elhelyezkedésének szükséges és elégséges feltételei		
	ha $a > 0$	ha $a < 0$	általános esetben ($a \neq 0$)
2. $x_1 < A < x_2$ 	$f(A) < 0$ 	$f(A) > 0$ 	$a \cdot f(A) < 0$
3. $x_1 > A$ $x_2 > A$ 	$f(A) > 0$ $D \geqslant 0; x_0 > A$ 	$f(A) < 0$ $D \geqslant 0; x_0 > A$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 > A \end{cases}$
4. $A < x_1 < B$ $A < x_2 < B$ 	$f(A) > 0; f(B) > 0$ $D \geqslant 0; A < x_0 < B$ 	$f(A) < 0; f(B) < 0$ $D \geqslant 0; A < x_0 < B$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0 \\ a \cdot f(B) > 0 \\ D \geqslant 0, \\ A < x_0 < B \end{cases}$
5. $x_1 < A$ $A < x_2 < B$ 	$f(A) < 0; f(B) > 0$ 	$f(A) > 0; f(B) < 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) > 0 \end{cases}$
6. $A < x_1 < B$ $x_2 > B$ 	$f(A) > 0; f(B) < 0$ 	$f(A) < 0; f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$
7. $x_1 < A$ $x_2 > B$ 	$f(A) < 0; f(B) < 0$ 	$f(A) > 0; f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$

Magyarázat és indoklás

A kitűzött feltételek igazolásához elegendő felhasználni azt, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ függvény folytonos (nincs szakadása[1]). Ha egy ilyen függvény valamilyen intervallum végein különböző előjelű értékeket vesz fel (vagyis a függvény grafikonjának megfelelő pontjai az Ox tengelyhez viszonyítva különböző félsíkokban fekszenek), ekkor az intervallum belsejében van legalább egy olyan pont, melyben a függvény értéke nullával lesz egyenlő (74. ábra)



74. ábra



75. ábra

Például *ahhoz, hogy az* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *másodfokú függvény gyökei az* $a > 0$ *esetén az adott* A *szám különböző oldalain helyezkedjenek el, elegendő egyetlen feltételnek a teljesülése*: $f(A) < 0$ (75. ábra).

Valóban, az $f(x) = ax^2 + bx + c$, ha $a > 0$ függvény grafikonja egy olyan parabola, amelynek ágai felfelé néznek. Ezért ha az argumentum a $+\infty$-hez vagy a $-\infty$-hez tart (ezt így jelölik: $x \to +\infty$ vagy $x \to -\infty$), akkor az $f(x)$ függvény a $+\infty$-hez fog tartani ($f(x) \to +\infty$). Tehát $f(x) > 0$, ha $x \to +\infty$ vagy $x \to -\infty$. Ha az $f(A) < 0$ feltétel teljesül, akkor az x argumentum értékeit A-tól $+\infty$-ig változtatva az $f(x)$ másodfokú függvény előjele «–» -ról a «+» -ra változik, vagyis az $f(x)$ függvénynek legalább egy gyöke van: $x_2 > A$.

Ugyanígy az x argumentumnak $-\infty$-től az A-ig történő változása az $f(x)$ másodfokú függvény előjelének «+» -ról a «–» -ra történő változását idézi elő, vagyis az $f(x)$ függvénynek legalább egy gyöke van: $x_1 < A$. De az $f(x)$ másodfokú polinomnak nem lehet kettőnél több gyöke, következésképpen, ha $a > 0$ az $f(A) < 0$ kikötés a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy másodfokú polinom gyökei az adott A szám különböző oldalain helyezkedjenek el.

Hasonló okfejtéssel bizonyítható $a < 0$ esetén is e kikötés teljesülésének szükséges és elégséges feltétele: $f(A) > 0$. E két feltételt egyesíteni lehet: $a \cdot f(A) < 0$.

Valóban, $a \cdot f(A) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0 \end{cases}$ vagy $\begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0. \end{cases}$ Tehát

[1] A megfelelő tulajdonságot a 11. osztályban a folytonos függvények vizsgálata során szigorúbban fogjuk igazolni.

a másodfokú polinomnak $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ akkor és csakis akkor van két különböző gyöke, melyek az A szám különböző oldalain helyezkednek el, ha teljesül a következő feltétel: $a \cdot f(x) < 0$.

Hasonlóan igazolható a 16. táblázat többi feltétele is.

Megállapítjuk, hogy a felsorolt feltételeket nem kötelező megjegyezni: a felírásukhoz a másodfokú függvény grafikonját (ábrázoljuk a szükséges gyökök elhelyezkedését) és a következő módszert alkalmazhatjuk.

Ahhoz, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ másodfokú polinomnak gyökei az adott A és B számokhoz képest egy megadott módon helyezkedjenek el, szükséges és elégséges a következő feltételrendszer teljesülése:

1) *a legmagasabb hatványkitevőnél lévő együttható (főegyüttható) előjelének ismerete;*
2) *az $f(A)$ és $f(B)$ előjelei;*
3) *a D diszkrimináns előjele;*
4) *a parabola csúcsa abszcisszájának $\left(x_0 = -\frac{b}{2a}\right)$ helyzete az adott A és B számokhoz viszonyítva.*

Azokban az esetekben, amikor legalább az adott számok egyike a négyzetes háromtagú kifejezés gyökei között helyezkedik el (a 16. táblázat második, ötödik, hatodik és hetedik sora), elegendő az első két fenti feltételnek teljesülnie, a többi esetben pedig mind a négy feltételt szükséges megvizsgálni. Megjegyezzük, hogy az adott feltételek felírásakor meg kell azt is vizsgálni, hogy teljesül-e a feladat követelménye abban az esetben, ha ezeknél a feltételeknél nem szigorú egyenlőtlenséget használunk.

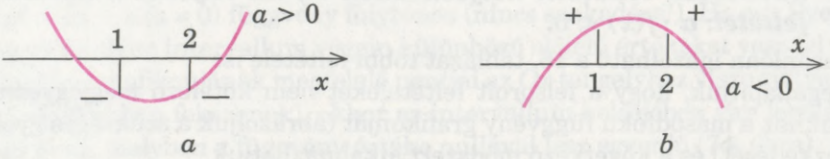
1. példa. Határozzuk meg az a paraméter összes olyan értékét, melynél az $ax^2 - x + 3a = 0$ egyenlet egyik gyöke nagyobb, mint 2, a másik pedig kisebb, mint 1.

Magyarázat

Mivel az adott egyenletnek két különböző gyöke van, ezért az másodfokú (vagyis $a \neq 0$). Ekkor $x_1 = \frac{1-\sqrt{1-12a^2}}{2a}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-12a^2}}{2a}$. Ahhoz, hogy a feladat kérdésére választ kapjunk, elegendő megoldani a két irracionális egyenlőtlenség-rendszer összességét: $\begin{cases} x_1 > 2, \\ x_2 < 1 \end{cases}$ vagy $\begin{cases} x_1 < 1, \\ x_2 > 2. \end{cases}$ De ez az eljárás elég munkaigényes.

Próbáljuk meg alkalmazni a négyzetes háromtagú kifejezés gyökeinek elhelyezkedéséről szóló feltételeket. Ehhez alkalmazhatók a 16. táblázat megfelelő feltételei, vagy a fentebb ajánlott módszer. Mindenekelőtt megjelöljük az $f(x) = ax^2 - x + 3a$ függvényt, majd ábrázoljuk a grafikonját az $f(x)$ (parabolá-

nak) függvénynek azokban a helyzetekben, melyek a feladat feltételeit kielégítik (76. ábra *a* és *b*).



76. ábra

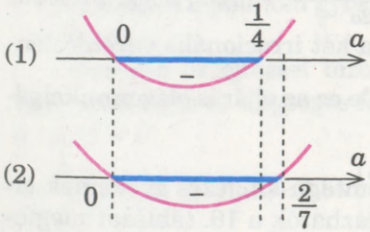
Ahhoz, hogy a négyzetes háromtagú kifejezés gyökei az 1 és 2 számok különböző oldalain helyezkedjenek el, szükséges és elégséges, hogy a következő feltételek összessége teljesüljön: $\begin{cases} a>0, \\ f(1)<0, \\ f(2)<0 \end{cases}$ vagy $\begin{cases} a<0, \\ f(1)>0, \\ f(2)>0. \end{cases}$ Könnyű belátni, hogy mindegyik rendszerben az a és az $f(1)$ valamint az a és az $f(2)$ ellenkező előjelűek, ezért e rendszerek összességét helyettesíteni lehet egy ekvivalens rendszerrel: $\begin{cases} af(1)<0, \\ af(2)<0. \end{cases}$ Ebből az alábbi megoldás következik.

Megoldás

▶ Mivel az adott egyenletnek két különböző gyöke van, ezért az másodfokú (vagyis $a \neq 0$). Használjuk a $f(x) = ax^2 - x + 3a$ jelölést. Mint ismeretes, a másodfokú polinom gyökei az 1 és 2 számok különböző oldalain csak akkor és csakis akkor helyezkedhetnek el, ha teljesül a következő feltételrendszer:

$$\begin{cases} af(1)<0, \\ af(2)<0. \end{cases}$$

A következő rendszert kapjuk: $\begin{cases} a(4a-1)<0, & (1) \\ a(7a-2)<0. & (2) \end{cases}$



77. ábra

Megoldjuk az (1) és a (2) egyenlőtlenséget, és meghatározzuk a rendszer közös megoldását (77. ábra).

Felelet: $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$ esetén az adott egyenlet egyik gyöke nagyobb, mint 2, a másik pedig kisebb, mint 1. ◁

Gyakorlatok

Oldd meg az x változós egyenleteket és egyenlőtlenségeket **(1–3)**!

1. 1) $5ax - a = ax + a$; 2) $4 - ax = 2x + 7a$;
3) $ax + 7a \leqslant ax + 8a$; 4) $2a - 6x > 2ax + 11$.

2. 1) $|x-2| + |x+1| = ax + 3$; 2) $|x-a| + |x| = 2$;
3) $|a-x| + |x+a+1| = 1$.

3. 1) $ax+1=\frac{9a+3}{x}$; 2) $2ax-1=\frac{4a-1}{x-1}$; 3) $\frac{ax+1}{x+a}=\frac{2}{x}$.

4. Határozd meg az a paraméter összes olyan értékét, melynél az adott egyenletnek egy gyöke van: 1) $\frac{(x-a)(x-2a)}{x-4}=0$; 2) $\frac{(x+2a)(x-6a)}{x+12}=0$!

5. Határozd meg az a paraméter összes olyan értékét, melynél az adott egyenletnek egy gyöke van: 1) $x^8 + ax^6 + a^2 + 4a = 0$; 2) $x^4 + ax^2 + a^2 - a = 0$!

6. A b paraméter mindegyik értékére határozd meg a $2x^2 + 10x + |6x + 30| = b$ egyenlet gyökeinek számát!

7. Határozd meg az a paraméter összes olyan értékét, melynél az $|x^2 - 2ax| = 1$ egyenletnek pontosan három gyöke van!

8. Határozd meg az a paraméter összes olyan értékét, melynél az $|x^2 + 2x + a| = 2$ egyenletnek négy különböző gyöke van!

9. Határozd meg a k paraméter legnagyobb olyan értékét, melynél az $x^2 + (2k+6)x + 4k + 12 = 0$ egyenlet mindkét gyöke nagyobb, mint -1!

10. Határozd meg az m paraméter minden olyan értékét, melynél az $(m-2)x^2 - 2(m+3)x + 4m = 0$ egyenlet egyik gyöke nagyobb, mint 3, a másik pedig kisebb, mint 2!

KIEGÉSZÍTŐ GYAKORLATOK AZ 1. FEJEZETHEZ

1. Határozd meg az egyenletek gyökeinek összegét:
1) $|x + 5| = 7$; 2) $|2x - 1| = 5$;
3) $|x + 7| = 2$; 4) $|4x - 8| + |2 - x| = 4$;
5) $2|x - 3| - |3 - x| = 5$; 6) $5|x + 4| - 2|4 - x| = 4$!

2. Határozd meg az $x + y$ értékét, ha:
1) $|x - y| + |4 - x| = 0$; 2) $|2x - y| + 2|2 - x| = 0$!

3. Határozd meg az xy értékét, ha:
1) $|x - 2| + 4x^2 - 4xy + y^2 = 0$; 2) $|y - 1| + x^2 - 2xy + y^2 = 0$!

4. Határozd meg az egyenlőtlenség egész megoldásainak számát:
1) $|x-1| \leqslant 2$; 2) $|x+2| \leqslant 4$; 3) $|x-3| \leqslant 6$; 4) $|x+4| < 5$!

5. Határozd meg az egyenlőtlenség egész megoldásainak számát a $[-5; 5]$ intervallumon:
1) $|x+2| \geqslant 3$; 2) $|x-1| \geqslant 4$; 3) $|x-2| \geqslant 3$; 4) $|2x-1| \geqslant 3$!

6. Számítsd ki az egyenlőtlenség legnagyobb egész megoldását:
1) $|3x - 1| < 2x + 2$; 2) $|2 - 3x| - x \leqslant 8$; 3) $|7 - 3x| - 2x \leqslant 2$!

7. Határozd meg az egyenlőtlenség legkisebb egész megoldását:
   1) $|1-2x|-x\leqslant 10$; 2) $|3x-2|+2x\leqslant 8$; 3) $|4x-4|+4x\geqslant 5$!
8. Határozd meg az egyenlőtlenség legkisebb megoldását:
   1) $|3x+1|\leqslant x+7$; 2) $|2x+3|\leqslant x+12$; 3) $|4x+3|\leqslant x+21$!
9. Számítsd ki az a paraméter legnagyobb értékét, melynél van megoldása az egyenletnek:
   1) $|2x-1|=1-4a$; 2) $|3x+2|=3-4a$!
10. Számítsd ki az a paraméter legkisebb értékét, melynél van az egyenletnek megoldása:
    1) $|2x-1|=4a+1$; 2) $|3x+3|=5a-7$!
11. Határozd meg az a paraméter legnagyobb egész értékét, melynél van az egyenletnek megoldása:
    1) $2|x-3|-a|3-x|=5$; 2) $3|x-2|+a|2-x|=-4$!
12. Számítsd ki az a paraméter legkisebb egész értékét, melynél van az egyenletnek megoldása:
    1) $8|x-3|+a|3-x|=5$; 2) $3|x-2|-a|2-x|=-6$!
13. Határozd meg az m paraméter értékét, melynél az egyenletnek pontosan négy megoldása van:
    1) $|x(|x|-5)|=m$; 2) $|(x+1)(|x+1|-3)|=m$;
    3) $|2(5-|x|x)|=m$!
14. Az m paraméter melyik legkisebb egész értékénél lesz négy megoldása az $x^2-|16x-48|=m$ egyenletnek?
15. Az m paraméter melyik értékénél lesz egy megoldása az $x^2-|14x-28|=m$ egyenletnek?
16. Hány valós gyöke van az $x^3-3|x|=0$ egyenletnek?
17. Számítsd ki az a paraméter összes értékét, melyeknél az adott egyenletrendszereknek egy megoldása lesz!

    1) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2+a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-4)^2=9, \\ x\cdot y=0; \end{cases}$

    3) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ (x-7)^2+y^2=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x-a)^2+y^2=4, \\ |y|=1-|x-12|. \end{cases}$

Oldd meg a **(18–29.)** feladatokat egyenlet, egyenlőtlenség vagy egyenletrendszer felállításával!

18. A munkásnak a terv szerint néhány nap alatt 72 alkatrészt kellett elkészítenie. Mivel ő a tervezettnél naponta 2 alkatrésszel kevesebbet csinált, ezért a munkáját a tervben előírtnál 3 nappal később fejezte be. Hány alkatrészt kellett a munkásnak terv szerint elkészítenie naponta?
19. Három azonos teljesítményű kombájn együttesen learatta a termést az első mezőről, majd ezután közülük kettő learatta a termést a második mezőről

(mely nem olyan területű, mint az első). A két mező learatása összesen 12 órát vett igénybe. Ha a három kombájn együtt dolgozva az egész munkának a felét elvégzi, majd a maradékot az egyik közülük, akkor így az egész munkát 20 óra alatt fejezik be. Hány óra alatt aratja le a termést két kombájn az első mezőről?

20. Az első munkapad teljesítménye 25%-kal nagyobb, mint a másiké. A második munkapadon 4%-kal több alkatrészt készítettek, mint az elsőn. Hány százalékkal több időt fordított a második munkapadon dolgozó munkás ugyanennek a munkának az elvégzésére, mint az első munkapadon dolgozó munkás?
21. Az első csövön a medence kétszer gyorsabban telik meg, mint a másodikon. Ha a medencét az első csövön félig megtöltik, majd a maradékot a második csövön, akkor a medence megtöltéséhez 6 órára lesz szükség. Mennyi idő alatt telik meg vízzel a medence az első csövön?
22. Két kerékpáros egyszerre indult el egymás felé az egymástól 30 km-re lévő A és B pontból. A kerékpárosok egy óra múlva találkoztak. Ha megállás nélkül, és változatlan sebességgel folytatják útjukat, akkor az első kerékpáros 1,5 órával hamarabb érkezik a B pontba, mint a második az A-ba. Határozd meg az első kerékpáros sebességét!
23. A motorcsónak 7 óra 20 percig a folyón felfelé haladva 35 km-t tett meg és ezután visszafordult. A folyó sebessége 4 km óránként. Mekkora sebességgel haladt a motorcsónak a vízfolyás irányában?
24. A 30%-os és a 10%-os sóoldat összekeverésével 600g 15%-os oldatot kaptak. Hány grammot vettek az egyes oldatokból?
25. Két ötvözetünk van, melyek cinkből, rézből és ólomból állnak. Ismeretes, hogy az első ötvözet 40% ólmot, a második pedig 26% rezet tartalmaz. A cink százalékos aránya mindkét ötvözetben egyforma. Összeolvasztva 150 kg-ot az első ötvözetből és 250 kg-t a másodikból, egy új ötvözetet kaptak, melyben 30% cink volt. Állapítsd meg, hány kilogramm ólom lesz az új ötvözetben!
26. Határozd meg azt a kétjegyű számot, melyben az egyesek száma kettővel nagyobb a tízesek számánál, és a keresett számnak valamint a számjegyei összegének szorzata 144!
27. A ház mellett nyírfák és hársfák nőnek, összesen több mint 14 fa. Ha a hársfák számát kétszeresére, a nyírfák számát pedig 18-cal növeljük, akkor nyírfából lesz több. Ha a kétszeresére növeljük a nyírfák számát, a hársfák számát pedig nem változtatjuk, akkor is hársfából lesz több. Hány nyírfa és hársfa nő az udvaron?
28. A laktanyában a katonákat nyolcasával sorokba állították. Így az egyik sor hiányos. Ha ugyanennyi katonát hetesével állítanak sorba, akkor minden sorban teljes lesz a létszám, a sorok száma pedig 2-vel több. Ha a katonákat ötösével állítanánk sorba, akkor 7-tel több sor lenne, és az egyik sor nem lenne teljes. Hány katona volt a laktanyában?

29. A virágüzletben szegfűt és rózsát árulnak. Egy szál szegfű 1 hrivnya 50 kop., a rózsa pedig 2 hr. A rózsa és a szegfű vásárlására összesen legfeljebb 30 hrivnya 50 kopijka költhető, miközben a szegfűk száma legfeljebb 6-tal különbözhet a rózsák számától. Az a feladat, hogy lehetőleg minél több szál virágot vásároljunk, miközben szegfűből a lehető legkevesebbet kell venni. Hány szál szegfűt és rózsát vásárolhatunk a fenti feltételek figyelembevételével?

MATEMATIKATÖRTÉNETI ADALÉKOK

Az algebra a matematikának az a része, amely betűs kifejezésekkel és egyenletekkel foglalkozik. Hosszú ideig az algebra – a számokkal foglalkozó tudományág – az aritmetika része volt. A feladatok többsége, amelyek az emberek gyakorlati tevékenysége során felmerülnek, ugyanazon módszerekkel oldhatók meg. A számokat betűkkel helyettesítve, a matematikusok általános alakban oldották meg az ilyen feladatokat. Ilyen módon keletkezett a matematikai egyik tudományága – az algebra.

Az algebra kezdeteit már a babiloniak, az egyiptomiak és a görögök az időszámításunk előtt ismerték. Megmaradt az egyiptomi Ahmesz-papirusz (i. e. XVII. sz.), melyen algebrai feladat megoldása található. Diophantosz görög matematikus, aki Alexandriában élt a III. században, megírta az *Arithmetica* c. könyvét, melyben már lineáris és egyéb egyenleteket old meg. A középkorban jelentősen fejlődött az algebra az arab országokban és Közép-Ázsiában. Az „algebra" szó (az arab *al-dzsabr*) először a Muhammad ibn Músza al-Hvárizmi üzbég matematikus és csillagász könyvének címében szerepel. Sok évszázadon keresztül az aritmetika és az algebra fejlődése nagyon sok akadályba ütközött, mert a matematikusoknak nem sikerült egységes jelöléseket találni. Ezért a matematikai munkák terjedelmesek és bonyolultak voltak. Csak a XVI. századtól kezdték fokozatosan alkalmazni a matematikusok a korszerű jelöléseket. Az a^2, a^3, a^4 és a hasonló jelöléseket először a francia tudós, René Descartes (1596–1650) használta. Az a^n jelölést bármely n esetére az angol Isaac Newton (1643–1727) alkalmazta.

A XVI. században Francois Viète (1540–1603) francia matematikus kutatásának köszönhetően kezdtek először alkalmazni betűs jelölést a másod-, harmad- és negyedfokú egyenleteknél. Viète először alkalmazta a betűs jelölést az ismeretlen értékek jelölésén túl az együtthatókra is. A tudós nagy gondot fordított arra, hogy képleteket is találjon, ami sikerült is neki, ezeket nevezzük Viète-képleteknek. Igaz ő is csak pozitív gyököket ismert. A XVII. században R. Descartes, I. Newton és más matematikusok munkái után a másodfokú és más egyenletek megoldásának a módja vette fel a mostani alakját.

A mennyiségek közötti összefüggések elve szintén az ógörög tudományban vette kezdetét. De a görögök csak azokat a mennyiségeket vizsgálták, melyeknek „geometriai" értelmük van, és nem vetették fel az általános összefüggések tanulmányozásának kérdését. A mennyiségek közötti grafikus összefüggést széleskörűen alkalmazták G. Gallilei (1564–1642), P. Fermat (1601–1665) és

R. Descartes, aki bevezette a változó érték fogalmát. A mechanika és a technika fejlődése meghozta a függvény általános fogalmának bevezetését, amit a német filozófus és matematikus G. Leibniz (1646–1716) végzett el. Kutatásai során a függvények nagy csoportjait vizsgálta I. Newton (1647–1727) angol tudós.

Csak Leibniz tanítványa, J. Bernoulli (1667–1748) adta meg 1718-ban a függvényt megszabadítva a mértani értelmezéstől. A függvény fogalmának fejlődésében a következő lépést J. Bernoulli tanítványa, a Pétervári Akadémia tagja, L. Euler (1707–1783) tette.

Sok matematikus (J. Fourier (1768–1830), Ny. I. Lobacsevszkij (1792–1856), P. Dirichlet (1805 – 1859) és mások) munkái után adták meg a meghatározást: „Az y változó mennyiséget az x változó mennyiség függvényének nevezzük, ha mindegyik x mennyiségnek az y mennyiség egyetlen értéke felel meg."

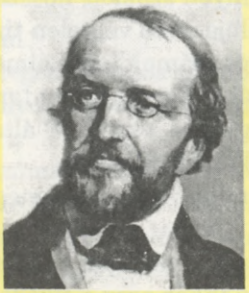
A korszerű meghatározásban a „mindegyik x értékének" hozzáadják még a „mely valamely halmazhoz tartozik", és a változók helyett azt mondják, hogy elemei ezeknek a halmazoknak. Ez a módszer megengedi, hogy egyféle módon közelítsenek a számfüggvényekhez, például a geometriai transzformációkhoz.

A négyzet oldalának és átlójának méréssel való összehasonlíthatatlansága már az i. e. V. században az ókori Görögországban is ismert volt. Ez a felfedezés megmutatta, hogy a mértani mérések elvégzéséhez nem elegendők a racionális számok. Ezért a görög matematikusok elutasították a mértani mennyiségek számmal való kifejezését, és a geometriai algebrát kezdték fejleszteni (ezért mondják még most is „a szám négyzete", „a szám köbe" stb.). Eudokszosz (i. e. IV. század) a mértani mennyiségek összefüggésének elméletét dolgozta ki, ami helyettesítette az ókori görög matematikusoknál a valós számok modern elméletét. Eudokszosz elméletének alapja a szakaszok és más alakzatok végtelen sok részre történő oszthatósága volt.

R. Descartes francia matematikus és filozófus bevezette a tetszőlegesen kiválasztott egységnyi szakasz fogalmát, ami helyettesítette a számokkal végzett műveleteket a szakaszokkal végzett műveleteken keresztül. Tulajdonképpen ő már pozitív valós számokkal dolgozott. Csak a XIX. század második felében lett



M. I. Lobacsevszkij
(1792–1856)



P. Dirichlet
(1805–1859)

aritmetizálva a valós számok elmélete, vagyis összevonva a természetes számok elméletével.

A valós szám fogalma. A számról az elképzelés folyamatosan alakult ki, gyakorlati tapasztalatok felhasználásával. A számokat az ókortól kezdve alkalmazták a számlálásra és a mennyiségek mérésére.

Arra a kérdésre, hogy hány elemet tartalmaz az adott véges halmaz mindig egy természetes számmal vagy a „nullával" válaszolunk. Tehát,

$$\{0; 1; 2; ...\}$$

a nemnegatív számok halmaza a számolási szükséget elégít ki.

Más a helyzet a mennyiségek mérésével. Két település közötti távolság egyenlő lehet 3,5 km-rel, a szoba területe pedig 16,45 négyzetméterrel stb.

Történelmileg úgy alakult, hogy a pozitív valós számok úgy jelentek meg, mint a szakaszok aránya.

Azzal a felfedezéssel, hogy az egységnyi oldalú négyzet átlójának és oldalának a mérete nem összemérhető – nyilvánvalóvá vált, hogy a szakaszok hosszának arányát nem mindig lehet természetes számmal kifejezni, de még racionális számmal sem. Ahhoz, hogy minden szakasz hosszát ki tudjuk fejezni számokkal, szükségessé tette új számok, az irracionális számok bevezetését.

A mennyiségek értékének méréssel történő meghatározása csak egy közelítő értéket ad. A szükséges pontosságú eredmény csak racionális tört segítségével vagy véges tizedes törttel adható meg. Például az 1 m oldalú négyzet átlóját 1 cm pontossággal mérve 1,41 m közelítő értéket kapunk. Ha a mérést 1 mm pontossággal végezzük, akkor az átló hossza 1,414 m lesz.

De a matematikában gyakran idegenkednek a mérés közelítő értékének fogalmától. A mérésekkel kapcsolatos elméleti módszerek alkalmazása ahhoz vezetett, hogy szükségessé vált a végtelen tizedes tört fogalmának bevezetése. (Ide sorolhatók a $\frac{2}{3} = 0{,}666...$, $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$, $\pi = 3{,}14159265...$ törtek).

Bármilyen szakasz hosszának és egy egységnyi szakasz hosszának aránya mindig kifejezhető végtelen tizedes törttel.

A valós számok teljes elmélete elég bonyolult és nem tartozik a középiskola programjába. Ezt csak a matematikai analízis keretén belül vizsgálják. A felépítésének egyik módszerével általánosan megismerkedünk.

1. Lefektették alapjait:

a) minden valós szám megadható végtelen tizedes törttel:

$$x = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...;$$

b) minden végtelen tizedes törttel egy valós szám van felírva.

Ugyanakkor arra a tizedes törtre, amely végtelen sorozatú kilencessel zárul úgy tekintünk, mint egy olyan tizedes törtre, amely végtelen sorozatú nullával fejeződik be: 0,9999... = 1,0000...; 12,765999... = 12,766000... .

Csak akkor kaphatunk kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a valós számok halmaza és a végtelen tizedes törtek halmaza között, ha kizárjuk a tizedes törtek vizsgálatából a kilences periódusú törteket.

Az a_0 a pozitív x *egész része*,

$x - a_0 = 0,a_1a_2...a_n...$ — az x szám *törtrésze*.

Az $x_n = a_0, a_1a_2...a_n$ számot az x szám 10^{-n}-re *lefelé kerekített közelítő értékének*, és az $x'_n = x_n + 10^{-n}$ számot pedig 10^{-n}-*re felfelé kerekített közelítő értékének* nevezzük, amely az

$$x = a_0, a_1a_2...a_n... .$$

számhoz tartozik.

Ha az x szám negatív, akkor

$$x = -a_0,a_1a_2...a_n..., \text{ akkor úgy tekintik, hogy}$$

$$x'_n = -a_0,a_1a_2...a_n \text{ és } x_n = x'_n - 10^{-n}.$$

2. Bevezetjük két valós szám *összehasonlításának* szabályát. A meghatározás szerint az x szám kisebb az y számnál, ha legalább az egy n-re igaz a következő egyenlőtlenség $x_n < y_n$, ahol x_n és az y_n az x és y számok 10^{-n}-re lefelé kerekített közelítő értéke. (Itt azt alkalmaztuk, hogy a véges tizedes törtek összehasonlítását már ismerjük.)
3. Meghatározzuk a valós számokkal való *műveleteket* (itt szintén a véges tizedes törtek közötti ismert műveleteket alkalmazzuk).

Az x és y számok *összegének* (jelölése: $x + y$) azt a z számot nevezzük, amelyre bármely n esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$x_n + y_n < x + y < x'_n + y'_n.$$

A matematikai analízisben bizonyítást nyert, hogy csak egyetlen ilyen szám létezik.

Hasonlóan két nemnegatív x és y számok *szorzatának* azt a z (jelölése: xy) számot nevezzük, amelyre bármilyen n esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$x_n y_n < xy < x'_n y'_n.$$

Létezik ilyen szám és csak egy ilyen szám van.

Emlékeztetünk arra, hogy az ilyen módon megadott valós számok körében az összeadás és szorzás műveletét a 8. osztályos algebrában már megvizsgáltuk.

A különböző előjelű valós számokra azt alkalmazzuk, hogy a nemnegatív $|x|$ és $|y|$ számokra a szorzás művelete már értelmezve van, ezért alkalmazhatjuk rá az $xy = -|x| \cdot |y|$ műveletet; és az azonos előjelű számokra az $xy = |x| \cdot |y|$ műveletet (az $a_0,a_1a_2...a_n...$, és a $-a_0,a_1a_2...a_n...$, szám abszolút értékének az $a_0,a_1a_2...a_n...$ számot nevezzük).

A kivonást úgy határozhatjuk meg, mint az összeadás fordított műveletét: az x és y számok $x - y$ *különbségén* azt a z számot értjük, melyre igaz $y + z = x$.

Az osztás műveletét, a szorzás fordítottjaként határozzuk meg: az $x : y$ *hányados* egy olyan z szám, melyre igaz az $yz = x$ egyenlőség.

4. Bebizonyítható, hogy a fent meghatározott egyenlőtlenségek és számtani műveletek megtartják a racionális számok halmazán is meglévő legfontosabb tulajdonságaikat.

A valós számok elméletét egyszerre többféle formában is a következő német matematikusok alkották meg: R. Dedekind (1831–1916), K. Weierstrass (1815–1897) és G. Cantor (1845–1918).

2. fejezet
HATVÁNYFÜGGVÉNY

KÖTELEZŐ TANANYAG

10. §. Az n-edik gyök fogalma és tulajdonságai. Az $y = \sqrt[n]{x}$ függvény és grafikonja
11. §. Irracionális egyenletek
12. §. A hatvány fogalmának általánosítása. A hatványfüggvény, annak tulajdonságai és grafikonja

KIEGÉSZÍTŐ TANANYAG

13. §. A függvény tulajdonságainak alkalmazása az irracionális egyenletek megoldásánál
14. §. Az irracionális egyenlőtlenségek megoldása
15. §. A paraméteres irracionális egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása

A **kötelező tananyagrészben** megismerkedhettek a négyzetgyök általános fogalmával – az n-edik gyökkel és tulajdonságaival; megtanuljátok az irracionális egyenletek megoldását, valamint a hatványfüggvény és az $y = \sqrt[n]{x}$ függvény grafikonjának ábrázolását, a megtanult tulajdonságok alkalmazásával különböző típusú feladatokat oldhattok meg.

A **kiegészítő tananyagrészben** megismerkedhettek az adott téma bonyolultabb feladatainak megoldási módszereivel, melyek az emelt szintű és a középszintű érettségi feladatsorok nehezebb feladatai megoldásához szükségesek (ezek elsősorban: az irracionális egyenlőtlenségek megoldása, a függvények tulajdonságainak alkalmazása az irracionális egyenletek megoldása során, és a paraméteres irracionális egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásainak módszerei).

10. §. AZ n-edik GYÖK ÉS TULAJDONSÁGAI. AZ $y=\sqrt[n]{x}$ FÜGGVÉNY ÉS GRAFIKONJA

17. táblázat

1. Meghatározás	
Négyzetgyök	Az n-edik gyök
Az a szám négyzetgyökének azt a b számot nevezzük, melynek négyzete a-val egyenlő. Ha $a = b^2$, akkor a b az a számnak a négyzetgyöke.	**Az a szám n-edik gyökének azt a b számot nevezzük, melynek n-edik hatványa a-val egyenlő.** Ha $a = b^n$, $(n \in N, n \neq 1)$, akkor a b az a számnak az n-edik gyöke.
A számtani gyök a gyök nemnegatív értéke. Ha $a \geqslant 0$, akkor a $\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{a}$ kifejezések a számtani gyök értékének a jelölése.	
$(\sqrt{a})^2 = a$	$(\sqrt[n]{a})^n = a$
2. A megengedett értékek halmaza	
Négyzetgyök	Az n-edik gyök
$\sqrt{a}$ létezik, ha $a \geqslant 0$.	**$\sqrt[2k]{a}$ létezik, ha $a \geqslant 0$ $(k \in N)$; $\sqrt[2k+1]{a}$ létezik az a bármilyen értékénél**
Az $x^n = a$ $(n \in N)$ egyenlet megoldásának felírása	
Páratlan $n = 2k + 1$ $(k \in N)$ esetén	Páros $n = 2k$ $(k \in N)$ esetén
Bármely a esetén az $x^{2k+1} = a$ egyenlet gyöke az $x = \sqrt[2k+1]{a}$	**Ha $a < 0$, akkor az $x^{2k} = a$ egyenletnek nincs gyöke** / **Ha $a \geqslant 0$, akkor az $x^{2k} = a$ egyenlet gyökét így írhatjuk fel: $x = \pm\sqrt[2k]{a}$**
Példák	
Az $x^5 = 3$ egyenletnek egyetlen gyöke az $x = \sqrt[5]{3}$	Az $x^8 = -7$ egyenletnek nincs gyöke / Az $x^8 = 7$ egyenletnek a gyökei az $x = \pm\sqrt[8]{7}$
3. Az n-edik gyök tulajdonságai	
Páratlan $n = 2k + 1$ esetén	Páros $n = 2k$ esetén
1) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ 2) $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$	$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = \lvert a \rvert$

A 17. táblázat folytatása

Tetszőleges n ($n \in \mathbf{N}$, $n \neq 1$) értékére

3) Ha $a \geqslant 0$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

4) Ha $a \geqslant 0$ $\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

5) Ha $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ $\quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Következmények

Ha $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$ *a tényező kiemelése a gyökjel alól.*

Ha $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ *a tényező bevitele a gyökjel alá.*

6) Ha $a \geqslant 0, b > 0$ $\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

7) Ha $a \geqslant 0$ $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ a gyök alaptulajdonsága.

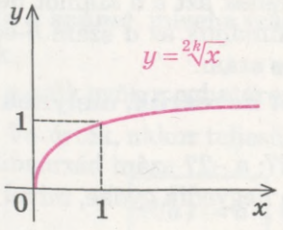
A nemnegatív kitevőjű hatvány gyökének értéke nem változik, ha a gyökkitevőt és a gyök alatti kifejezés hatványkitevőjét megszorozzuk (vagy elosztjuk) egy és ugyanazon természetes számmal.

8) Ha $a \geqslant 0, b \geqslant 0$, ha $a > b$, akkor $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

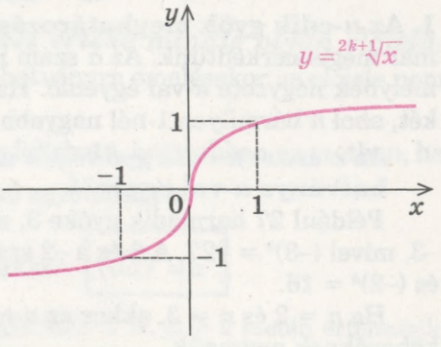
4. Az $y = \sqrt[n]{x}$ függvény és grafikonja

Az $y = \sqrt[n]{x}$ függvény grafikonja ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$)

páros n ($n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$) esetén



páratlan n ($n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}$) esetén



A 17. táblázat folytatása

Az $y=\sqrt[n]{x}$ függvény tulajdonságai	
1. *A függvény értelmezési tartománya:* $x \geqslant 0$, vagyis $D\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;+\infty)$.	1. *A függvény értelmezési tartománya:* $x \in \boldsymbol{R}$ (x bármilyen szám), vagyis $D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=\boldsymbol{R}$.
2. *A függvény értékkészlete:* $y \geqslant 0$, vagyis $E\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;+\infty)$.	2. *A függvény értékkészlete:* $y \in \boldsymbol{R}$, (y bármilyen szám), vagyis $E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=\boldsymbol{R}$.
3. *Az* $y=\sqrt[2k]{x}$ *függvény legnagyobb értéke nem létezik; legkisebb értéke:* $y = 0$ (ha $x = 0$).	3. Az $y=\sqrt[2k+1]{x}$ függvény legnagyobb és legkisebb értéke nem létezik.
4. *A függvény se nem páros, se nem páratlan.*	4. *A függvény* **páratlan**: $\sqrt[2k+1]{-x}=-\sqrt[2k+1]{x}$, *tehát a függvény grafikonja szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára.*
5. *A függvény és a koordinátatengelyek metszéspontjai:* $Oy\ \begin{cases}x=0,\\y=0;\end{cases}$ $Ox\ \begin{cases}y=0,\\x=0.\end{cases}$ **A függvény grafikonja átmegy az origón.**	
6. *A növekedés és fogyás intervallumai: a függvény teljes értelmezési tartományán növekvő.*	
7. *Előjeltartás intervallumai:* ha $x > 0$, akkor az $y > 0$	7. *Előjeltartás intervallumai:* ha $x > 0$, akkor az $y > 0$, ha $x < 0$, akkor az $y < 0$

Magyarázat és indoklás

1. Az *n*-edik gyök meghatározása. Az a szám négyzetgyökének fogalmával már megismerkedtünk. Az a szám négyzetgyökének azt a b számot nevezzük, melynek négyzete a-val egyenlő. Hasonlóan definiáljuk az a szám n-edik gyökét, ahol n bármilyen 1-nél nagyobb természetes szám.

***Az a szám n-edik gyökének* azt a számot nevezzük, melynek *n*-edik hatványa *a*-val egyenlő.**

Például 27 harmadik gyöke 3, mivel $3^3 = 27$; a –27 szám harmadik gyöke –3, mivel $(-3)^3 = -27$. A 2 és a –2 szám 16-nak a negyedik gyöke, mivel $2^4 = 16$ és $(-2)^4 = 16$.

Ha $n = 2$ és $n = 3$, akkor az n-edik gyököt megfelelően négyzetgyöknek és köbgyöknek nevezzük.

Hasonlóan a négyzetgyökhöz, bevezetjük a számtani n-edik gyök fogalmát is.

Az a szám számtani n-edik gyökének azt a nemnegatív számot nevezzük, melynek n-dik hatványa a-val egyenlő.

Az $a \geqslant 0$ esetén az a szám számtani n-edik gyökének van egy speciális jelölése[1]: $\sqrt[n]{a}$; az n számot a *gyök kitevőjének*, és az a számot pedig a *gyök alatti kifejezésnek* nevezzük.

Például azt, hogy a 27 harmadik gyöke 3, így írjuk fel: $\sqrt[3]{27} = 3$; és azt, hogy a 16-nak a negyedik gyöke 2, pedig így: $\sqrt[4]{16} = 2$. De annak, hogy a 16-nak a negyedik gyöke –2 nincs jelölése.

$a < 0$ esetén az a számnak akkor, és csak akkor van n-edik gyöke, ha n páratlan (mivel nem létezik olyan valós szám, melynek páros hatványa negatív szám lenne). Ebben az esetben az a szám páratlan n-edik gyökét szintén $\sqrt[n]{a}$ -val jelölik. Például azt, hogy a –27 harmadik gyöke –3, így írjuk fel: $\sqrt[3]{-27} = -3$. Mivel a –3 negatív szám, ezért a $\sqrt[3]{-27}$ nem számtani gyök. De a negatív szám páratlan gyökét ki lehet fejezni számtani gyök segítségével a következő képlet alapján

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}.$$

● A fenti képlet bizonyítása előtt megjegyezzük, hogy az n-edik gyök meghatározása szerint ez az egyenlőség akkor teljesül, ha $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Valóban, $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = (-1)^{2k+1} \cdot \left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$, , és ez azt jelenti, hogy $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$. ○

Például $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$; $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$.

Megjegyezzük, ***hogy a $\sqrt[2k+1]{a}$ kifejezés értéke mindig olyan előjelű, mint az a számé***, mivel a szám páratlan hatványra emelésekor az előjele nem változik.

Az n-edik gyök meghatározásából az is felírható, hogy abban az esetben, ha létezik $\sqrt[n]{a}$ érték, akkor teljesül a következő egyenlőség is:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \text{ és ha } a \geqslant 0 \text{ akkor } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

[1] Az $\sqrt[n]{a}$ kifejezés mindegyik tulajdonságát az $n \in N$, $n \geqslant 2$ esetén értelmezik. $n = 1$ esetén úgy tekinthetjük, hogy $\sqrt[n]{a} = \sqrt[1]{a} = a$.

2. Az n-edik gyököt tartalmazó kifejezések megengedett értékeinek halmaza. Az $x^n = a$ $(n \in N)$ egyenlet megoldása. Megjegyezzük, hogy

A $\sqrt[2k+1]{a}$ értéke, vagyis az a szám páratlan gyöke bármilyen a értékre létezik.

Igazoljuk köbgyök esetére. Alkalmazzuk a $\sqrt[3]{a} = x$ jelölést. Ekkor az n-edik gyök meghatározásából következik, hogy $x^3 = a$ és a $\sqrt[3]{a}$ kifejezés akkor igaz, ha az $x^3 = a$ egyenletnek van megoldása.

Az $y = x^3$ és az $y = a$ függvények grafikonjaiból (78. ábra) láthatjuk, hogy az a bármely értékére az $y = a$ egyenes az $y = x^3$ függvény grafikonját egy pontban metszi. Tehát az a bármely értékére a $\sqrt[3]{a}$ kifejezésnek egy értéke van (mivel az $y = x^3$ függvény növekvő, és felvesz minden értéket a $-\infty$ -től a $+\infty$-ig). ○

Más páratlan kitevőjű hatványfüggvény esetében is (lásd az $y = x^{2k+1}$ függvény grafikonját és tulajdonságait a 12. §-ban) hasonlóképpen magyarázható meg az ilyen egyenletek megoldása.

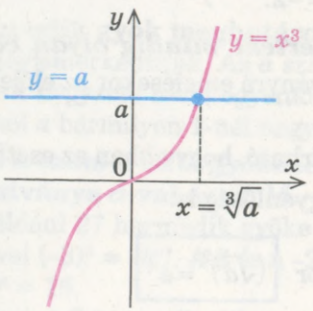
A fenti magyarázat alapján felírjuk az $x^n = a$ egyenlet megoldását páratlan $n = 2k + 1$ értékekre: **bármilyen a értékre az $x^{2k+1} = a$ $(k \in N)$ egyenletnek egyetlen gyöke van, az $x = \sqrt[2k+1]{a}$.**

Például az $x^5 = 3$ egyenletnek egyetlen megoldása az $x = \sqrt[5]{3}$, az $x^7 = -11$ egyenletnek is egyetlen megoldása az $x = \sqrt[7]{-11}$ (figyelembe véve, hogy $x = \sqrt[7]{-11} = -\sqrt[7]{11}$, az $x^7 = -11$ egyenlet gyöke felírható: $x = -\sqrt[7]{11}$) alakban).

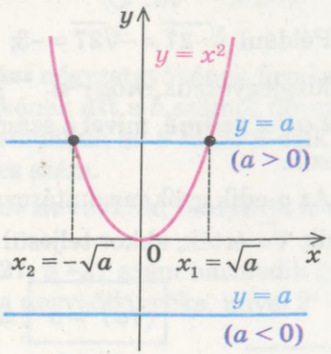
Az a számnak páros kitevőjű gyöke $\sqrt[2k]{a}$ csak az $a \geqslant 0$ esetén létezik.

Valóban, ha $\sqrt[2k]{a} = x$, az n-edik gyök definíciója szerint $a = x^{2k}$. Tehát $a \geqslant 0$.

A négyzetgyökre ez könnyen igazolható az $y = x^2$ függvény grafikonjának alkalmazásával.



78. ábra



79. ábra

Legyen $\sqrt{a} = x$, ekkor az n-edik gyök definíciója szerint $x^2 = a$ és a $\sqrt{a}$ csak akkor létezik, ha az $x^2 = a$ egyenletnek van megoldása.

Ábrázoljuk az $y = x^2$ és az $y = a$ függvények grafikonjait (79. ábra). Innen látható, hogy az $y = a$ egyenes csak $a \geqslant 0$ esetén metszi az $y = x^2$ függvény grafikonját (amellett, ha $a > 0$, akkor két pontban, $x_1 = \sqrt{a}$ és $x_2 = -\sqrt{a}$, ha $a = 0$, akkor csak $x = 0$ egyetlen pontban). Tehát a $\sqrt{a}$ kifejezésnek bármilyen $a \geqslant 0$ esetén van értelme, mivel az $y = x^2$ függvény a $[0; +\infty)$ intervallum mindegyik értékét felveszi. ○

Megvizsgáljuk az $x^n = a$ egyenlet megoldásait az $n = 2k$ ($k \in N$) páros értékeire.

Az $x^2 = a$ egyenletnek $a < 0$ esetén nincsenek gyökei, mivel bármilyen szám négyzete nem lehet negatív (a 79. ábrán az $y = a$ egyenes, ha $a < 0$ nem metszi az $y = x^2$ függvény grafikonját). Hasonlóképpen az **$x^{2k} = a$ ($k \in N$) egyenletnek, ha $a < 0$ nincsenek gyökei** (mivel bármilyen szám páros kitevőjű hatványa nem lehet negatív szám).

$a = 0$ esetén az **$x^{2k} = 0$ ($k \in N$) egyenletnek egyetlen gyöke van, az $x = 0$** (mivel bármely nullától különböző számnak páros kitevőjű hatványa pozitív szám, vagyis nem egyenlő nullával és a $0^{2k} = 0$).

Ha $a > 0$, akkor a $2k$-adik gyök definíciója alapján $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$. Tehát $x = \sqrt[2k]{a}$ az $x^{2k} = a$ egyenlet gyöke. De $\left(-\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = \left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$, ezért $x = -\sqrt[2k]{a}$ szintén gyöke az $x^{2k} = a$ egyenletnek. Az egyenletnek nincs más gyöke, mivel az $y = x^{2k}$ függvény tulajdonságai hasonlóak az $y = x^2$ függvény tulajdonságaihoz: $x \geqslant 0$ esetén a függvény növekvő, tehát az a értéket csak egy argumentumérték $\left(x = \sqrt[2k]{a}\right)$ esetén veszi fel. Hasonlóan, ha $x \leqslant 0$ esetén az $y = x^{2k}$ függvény fogyó, így az a értéket csak egy argumentumérték $\left(x = -\sqrt[2k]{a}\right)$ esetén veszi fel. Tehát az **$x^{2k} = a$ egyenletnek $a > 0$ esetén csak két gyöke van**: $x = \pm\sqrt[2k]{a}$.

Például az $x^{10} = -1$ egyenletnek nincs gyöke, az $x^6 = 5$ egyenletnek pedig két gyöke lesz: $x = \pm\sqrt[6]{5}$.

3. Az n-edik gyök tulajdonságai az n-edik gyök meghatározása alapján magyarázhatók.

1) A $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ képlet magyarázata az 1. pontban volt.

Megmagyarázzuk a 17. táblázat többi képletét is.

Emlékeztetünk arra, hogy az n-edik gyök definíciójából következik a $\sqrt[n]{A} = B$ egyenlőség, amelynek bizonyításához ($A \geqslant 0, B \geqslant 0$ esetén) elegendő ellenőrizni a $B^n = A$ egyenlőséget.

2) Az $\sqrt[n]{a^n}$ kifejezést külön vizsgáljuk $n = 2k+1$ (páratlan) és $n = 2k$ (páros) számok esetén.

Ha *n páratlan*, akkor figyelembe vesszük azt, hogy az $\sqrt[n]{a^n}$ kifejezés létezik bármely a érték mellett és $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}$ előjele megegyezik az a előjelével. Ekkor az n-edik gyök meghatározásából kapjuk, hogy

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}.$$

Ha *n páros*, akkor figyelembe véve, hogy az $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}}$ kifejezés az n-edik gyök számtani gyökeként értelmezhető (tehát $\sqrt[2k]{a^{2k}} \geqslant 0$) és $|a|^{2k} = a^{2k}$. Ekkor

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|}.$$

3) A

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, \text{ ha } a \geqslant 0$$

képletet jobbról balra haladva igazoljuk. Mivel $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$, ezért az $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ a meghatározás szerint.

4) A

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}, \text{ ha } a \geqslant 0$$

képlet igaz volta a $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k$ egyenlőségből következik.

5) Az

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ ha } a \geqslant 0, b \geqslant 0$$

képlet igazolásához a $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$ egyenlőséget kell alkalmaznunk.

6) Az

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ ha } a \geqslant 0, b > 0$$

képlet igazolásához a $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$ egyenlőség alkalmazása szükséges.

7) Az

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}, \text{ ha } a \geqslant 0$$

képlet igazolásához a $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = \left(a^m\right)^k = a^{mk}$ egyenlőség alkalmazható. ○

Például $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ (a gyökkitevőt és a gyök alatti kifejezés hatványkitevőjét elosztottuk 3-mal).

Az $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ $(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$ képlet alkalmazásával a következő fontos következményhez juthatunk: a tényező gyökjel alóli kiemelésének vagy a tényező gyökjel alá való bevitelének képleteihez.

Valóban, ha $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$. Megvizsgálva a kapott képletet balról jobbra, megkapjuk a *nemnegatív tényező gyökjel alóli kiemelésének képletét*:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}},$$

és jobbról balra *a nemnegatív tényező gyökjel alá való bevitelének képletét*:

$$\boxed{a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}}.$$

Például $\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{32 \cdot 3} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = 2\sqrt[5]{3}$.

8) Tekintsük az n-edik gyök egy további tulajdonságát: *bármilyen nemnegatív a és b számra,*

$$\boxed{\text{ha } \boldsymbol{a > b}, \text{ akkor } \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}}.$$

● A bizonyítást indirekt módszerrel végezzük. Tételezzük fel, hogy $\sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{b}$. Ekkor az utolsó egyenlőtlenség mindkét oldalát az n-edik hatványra emelve (megtartva az egyenlőtlenség jelét) $a \leqslant b$ igaz egyenlőtlenséget kapunk. Ez ellentmond az $a > b$ feltételnek. Tehát kiinduló feltételezésünk hibás, vagyis $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. ○

Például a $21 > 16$ egyenlőtlenség alkalmazásával azt kapjuk, hogy $\sqrt[4]{21} > \sqrt[4]{16}$. Mivel $\sqrt[4]{16} = 2$, ezért $\sqrt[4]{21} > 2$.

Az n-edik gyök tulajdonságainak általánosítása[1]

Az n-edik gyök tulajdonságait kifejező képletek többsége a gyök alatti nemnegatív kifejezésekre vannak értelmezve. Olykor azonban átalakításokat kell végezni az n-edik gyököt tartalmazó kifejezésekkel akkor is, amikor nincs ilyen korlátozó feltétel: például négyzetgyököt kell vonni (általános esetben páros hatványú gyököt kell vonni) az ab negatív számok $(a < 0, b < 0)$ szorzatából. Ekkor $ab > 0$ és $\sqrt[2k]{ab}$ értelmezve van, azonban az

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad (1)$$

képlet nem alkalmazható, mert csak a nemnegatív a és b értékekre igaz. De az $ab > 0$ esetén: $ab = |ab| = |a| \cdot |b|$ és most az $|a| > 0$ és $|b| > 0$. Tehát az $|a| \cdot |b|$ szorzatból az (1) képlet alkalmazásával lehet gyököt vonni.

[1] Ez a tananyag csak a fizika-matematika szakosított tantervű osztályok részére kötelező.

Így $a < 0, b < 0$ esetén leírhatjuk:

$$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a| \cdot |b|} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}.$$

Megjegyezzük, hogy a kapott képlet igaz $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ esetén is, mivel ebben az esetben $|a| = a$ és $|b| = b$. Tehát,

ha $\boldsymbol{ab \geqslant 0}$, akkor $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}$.

Hasonlóképpen általánosíthatjuk a 6. tulajdonságot is,

ha $\frac{a}{b} \geqslant 0$, akkor $\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{|a|}}{\sqrt[2k]{|b|}}$.

Azokban az esetekben, amikor az alapképletek értelmezését vizsgáljuk, ezeket megismételhetjük bármely negatív a és b értékekre is. Ilyen képleteket alkalmazni lehet bármilyen a és b értékekre is (a képlet bal oldalának értelmezési tartományából).

Például a páratlan gyökkitevő *bármilyen a és b értékre*

$$\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{a} \cdot \sqrt[2k+1]{b}. \qquad (2)$$

Belátható, hogy minden olyan a és b értékeknél, amelynél ennek a képletnek a bal és jobb oldala értelmezhető, teljesül a következő egyenlőség:

$$\left(\sqrt[2k+1]{a} \cdot \sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1} = \left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} \left(\sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1} = ab.$$

Tehát a $(2k+1)$-edik gyök meghatározásából következik a (2) egyenlőség teljesülése is.

Például $\sqrt[3]{a^{15}b} = \sqrt[3]{a^{15}} \cdot \sqrt[3]{b} = a^5 \sqrt[3]{b}$ bármely a-ra és b-re igaz.

De nem minden képletet lehet alkalmazni bármilyen a és b értéknél. Például, ha a gyök alaptulajdonságának alkalmazásával felírjuk a $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$ egyenlőséget (a gyökkitevőt és a gyök alatti kifejezés hatványkitevőjét elosztottuk 2-vel), akkor a kapott egyenlőség nem azonosság, mivel $a = -1$ esetén (az egyenlőség bal és jobb oldala is minden a értékre értelmezve van) kapjuk, hogy $\sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[3]{-1}$ hamis egyenlőség.

Tehát a gyökkitevőnek és a gyök alatti kifejezés hatványkitevőjének páros természetes számmal való osztása során szükség van a gyök alaptulajdonságának általánosítására. Ehhez vegyük észre, hogy $a^2 = |a|^2$, és most a gyök alatti hatvány alapja $|a| \geqslant 0$, tehát alkalmazni lehet az alaptulajdonság képletét (7. tulajdonság): $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{|a|^2} = \sqrt[3]{|a|}$.

Általános esetben, ha *a gyök alaptulajdonságának alkalmazása során a gyökkitevőt és a gyök alatti kifejezés hatványkitevőjét páros számmal kell osztani, akkor a gyök alatti kifejezés abszolút értékét kell venni, vagyis*

$$\sqrt[2kn]{a^{2km}} = \sqrt[n]{|a|^m}.$$

Hasonlóképpen igazolható a gyökök többi alaptulajdonsága bármely a és b számra (a képlet bal oldalán álló kifejezés értelmezési tartományára), melyeket a 18. táblázatban foglaltunk ösze.

18. táblázat

Az n-edik gyök alapképletei (csak nemnegatív a és b értékekre, vagyis $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0 \end{cases}$)	Alkalmazhatók-e az alapképletek bármely a és b esetén a bal oldal megengedett értékeinek halmazán (ha nem, akkor meg van adva az általános képlet)	
	páratlan gyökkitevő esetén	páros gyökkitevő esetén
1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$	*igen*	*csak nemnegatív a esetén*
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$	*igen*	$\sqrt[2k]{a^{2k}} = \lvert a \rvert$
3. Gyökből gyököt $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	*igen*	*igen*
4. Szorzatból gyököt $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	*igen*	$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{\lvert a \rvert}\sqrt[2k]{\lvert b \rvert}$
és a gyökök szorzata $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$		*igen*
5. A hányadosból gyököt $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$	*igen*	$\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{\lvert a \rvert}}{\sqrt[2k]{\lvert b \rvert}}$
és a gyökök hányadosa $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$		*igen*
6. A gyök alaptulajdonsága: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ és fordítva $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$	*igen, ha mindegyik páratlan kitevőjű gyök* (vagyis *páratlan → páratlan* átmenet esetén)	*Páros → páros* átmenet esetén *igen* *Páratlan → páros* átmenet esetén $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[nk]{a^{mk}}, & \text{ha } a^m \geqslant 0, \\ -\sqrt[nk]{a^{mk}}, & \text{ha } a^m < 0 \end{cases}$ $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\lvert a^m \rvert}$

A 18. táblázat folytatása

Az n-edik gyök alapképletei (csak a nemnegatív a és b értékekre, vagyis $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0 \end{cases}$)	Alkalmazhatók-e az alapképletek bármely a és b esetén a bal oldal megengedett értékeinek halmazán (ha nem, akkor meg van adva az általános képlet)	
	páratlan gyökkitevő esetén	páros gyökkitevő esetén
7. A tényező kiemelése a gyökjel alól $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$	*igen*	$\sqrt[n]{a^n b} = \lvert a \rvert \sqrt[n]{b}$
8. A tényező bevitele a gyökjel alá $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	*igen*	$a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b}, & \text{ha } a \geqslant 0, \\ -\sqrt[n]{a^n b}, & \text{ha } a < 0, \end{cases}$ ahol $b \geqslant 0$

M e g j e g y z é s . A 18. táblázatban alkalmazott „átmenet" fogalmán az n-edik gyökről az m-edik gyökre való áttérést értjük egy adott képleten belül.

Ha az n is és az m is páros szám, akkor röviden jellemezzük „átmenet párosból → párosba" (például $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[8]{a^4}$).

Ha az n és az m is páratlan szám, akkor a táblázatban az van írva, hogy „átmenet páratlanból → páratlanba" (például $\sqrt[15]{a^9} = \sqrt[5]{a^3}$).

Ha az n páratlan és az m páros szám, akkor a táblázatban az van írva, hogy „átmenet páratlanból → párosba" (például $\sqrt[5]{(-2)^3} = -\sqrt[10]{(-2)^6}$).

Következésképpen, ha a feladat feltételéből az n-edik gyököt tartalmazó kifejezésben (irracionális kifejezés) ismert, hogy minden változó (amely az adott kifejezés felírásában található) nemnegatív, akkor ennek a kifejezésnek az átalakítása során alkalmazhatók az alapképletek; ha ilyen feltétel nem áll a rendelkezésünkre, akkor az adott kifejezés megengedett értékeinek a halmazát kell először megállapítani, és csak ezután kell eldönteni, hogy milyen képleteket fogunk alkalmazni, az alapképleteket vagy az általánosokat.

4. Az $y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in N$, $n \geqslant 2$) függvény és grafikonja. A függvény tulajdonságainak jellemzése során leggyakrabban a következő tulajdonságokat emelik ki: 1) értelmezési tartománya; 2) értékkészlete; 3) párossága vagy páratlansága (paritása); 4) a koordinátatengelyekkel való metszéspontjainak meghatározása; 5) előjeltartási intervallumok meghatározása; 6) a növekedési és fogyási intervallumok[1]; 7) a függvény legnagyobb és legkisebb értékének meghatározása.

[1] A növekedési és fogyási intervallumokat néha monotonitási intervallumoknak is szokták nevezni.

Megvizsgáljuk az $y = \sqrt[n]{x}$ függvény tulajdonságait. Mivel a páratlan kitevőjű gyök néhány tulajdonsága nem egyezik a páros kitevőjű gyök bizonyos tulajdonságaival, ezért az eltéréseket külön fogjuk vizsgálni.

Ha n **páratlan** ($n = 2k + 1$, $k \in N$):

1. *Az értelmezési tartomány.* Páratlan n esetén ($n = 2k + 1$, $k \in N$) az x szám páratlan kitevőjű gyöke bármilyen x érték esetén létezik, ezért az $y = \sqrt[2k+1]{x}$ függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza:
$$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R.$$
2. Páratlan n esetén a függvény is *páratlan* lesz, mivel $\sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x}$, tehát *az* $y = \sqrt[2k+1]{x}$ *függvény grafikonja szimmetrikus az origóra.*

Ha n **páros** ($n = 2k$, $k \in N$):

1. *Az értelmezési tartomány.* Páros n esetén ($n = 2k$, $k \in N$) az x szám páros kitevőjű gyöke csak az $x \geqslant 0$ értéke esetén létezik, ezért az $y = \sqrt[2k]{x}$ függvény értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza:
$$D\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0; +\infty).$$
2. Páros n esetén a függvény *se nem páros se nem páratlan* (azért mert a függvény értelmezési tartománya nem szimmetrikus az origóra).

3. Mivel $x = 0$ esetén a függvényérték $y = 0$, *ezért az* $y = \sqrt[n]{x}$ *függvény grafikonja mindig átmegy a koordináta-rendszer kezdőpontján* (más metszéspontja nincs a koordinátatengelyekkel: ha $y = 0$, akkor az $\sqrt[n]{x} = 0$ egyenletből megint csak azt kapjuk, hogy $x = 0$).

4. *Az* $y = \sqrt[n]{x}$ *függvény az egész értelmezési tartományán növekvő.* Valóban a nemnegatív x_1 és x_2 értékekre a 8. tulajdonságból az következik, hogyha $x_1 > x_2$, akkor $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$, és ez azt jelenti, hogy a függvény nemnegatív x értékeknél növekvő. Tehát a függvény az n páros értékeinél valóban növekvő az értelmezési tartomány egészén. A páratlan n értékénél elegendő azt figyelembe venni, hogy az $y = \sqrt[n]{x}$ függvény szimmetrikus az origóra, és ha leképezzük az $x \geqslant 0$ intervallumon növekvő függvényt, akkor ismét növekvő függvényt kapunk (lásd lejjebb).

5. Ahhoz, hogy meghatározzuk az $y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in N$, $n \geqslant 2$) függvény *értékkészletét*, felállítjuk a következő egyenletet:
$$\sqrt[n]{x} = a. \qquad (*)$$

Páratlan n esetén az $\sqrt[n]{x}$ kifejezés nemnegatív és negatív értékeket is felvesz, és az (*) egyenletnek az n-edik gyök definíciója alapján az a bármely értékénél gyöke az $x = a^n$ szám. Tehát páratlan n esetén az értékkészlet a valós számok halmaza: $E(\sqrt[2k+1]{x}) = \boldsymbol{R}$. Ezért az $y = \sqrt[2k+1]{x}$ függvénynek *legnagyobb és legkiesebb értéke nem létezik.*

6. *Előjelvizsgálat*:
ha $x > 0$, akkor $y > 0$ (mivel ebben az esetben az $y = \sqrt[2k+1]{x}$ a gyök számtani értéke), ha $x < 0$, akkor az $y < 0$ (mivel negatív szám páratlan kitevőjű gyöke negatív).

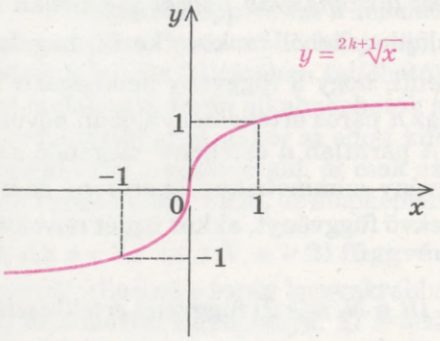
Ha n páros, akkor az $\sqrt[n]{x}$ kifejezés számtani gyök $(\sqrt[n]{x} \geqslant 0)$, ezért az (*) egyenletnek csak akkor van gyöke, ha $a \geqslant 0$. Ekkor mindegyik $a \geqslant 0$ számra igaz, hogy $x = a^n$. Tehát páros n esetén az értékkészlet a nemnegatív számok halmaza: $E(\sqrt[2k]{x}) = [0; +\infty)$.

Az $y = \sqrt[2k]{x}$ függvénynek ezért nincs legnagyobb értéke, és legkisebb értékét, az $y = 0$-t az $x = 0$ értéknél veszi fel.

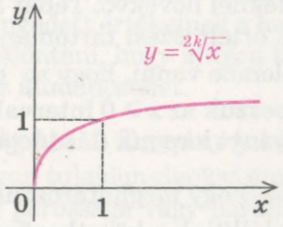
6. *Előjelvizsgálat*:
ha $x > 0$, akkor $y > 0$ (mivel ebben az esetben az $y = \sqrt[2k]{x}$ kifejezés a gyök számtani értéke).

Megjegyezhető még az is, hogy $x = 1$ esetén $y = 1$, tehát az $y = \sqrt[n]{x}$ függvény grafikonja mindig átmegy a (1; 1) ponton.

A fenti vizsgálat alapján megrajzolható az $y = \sqrt[n]{x}$ függvény grafikonja páratlan (80. ábra) és páros (81. ábra) n értékekre is.



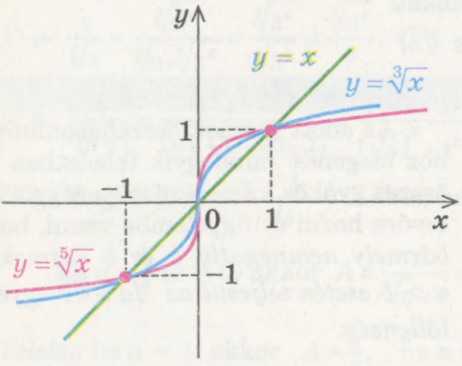
80. ábra



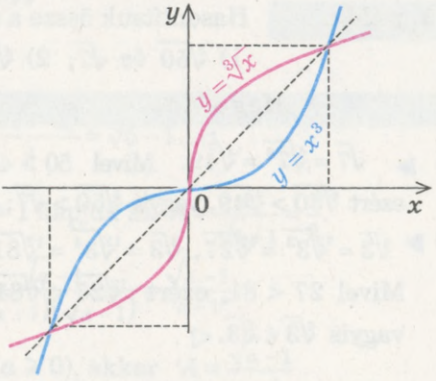
81. ábra

A 82. ábrán közös koordináta-rendszerben vannak ábrázolva az $y = \sqrt[3]{x}$ és $y = \sqrt[5]{x}$ függvények grafikonjai és az összehasonlítás végett még az $y = x$ grafikonja is.

Az $y = \sqrt[n]{x}$ függvény grafikonjának megrajzolásához alkalmazzuk az $y = x^n$ függvény grafikonját. Az $y = \sqrt[3]{x}$ függvény grafikonját például az $y = x^3$ függvény inverzének tekinthetjük, ezért ábrázolásához (83. ábra) először megrajzoljuk az $y = x^3$ harmadrendű parabolát, majd a kapott görbét tükrözzük az $y = x$ egyenesre. A 2.4. pontban ehhez hasonlóan ábrázoltuk az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonját az $y = x^2$ parabola jobb oldali ága alapján (82. ábra).



82. ábra



83.ábra

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Határozzuk meg a kifejezés értékét:

1) $\sqrt[4]{625}$; 2) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$!

Megoldás

1) ▶ $\sqrt[4]{625} = 5$, mivel $5^4 = 625$. ◁

2) ▶ $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$, mivel $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$; ◁

3) ▶ $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$, mivel $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$. ◁

Magyarázat

Alkalmazzuk az n-edik gyök definícióját. A $\sqrt[n]{a} = b$ azt jelenti, hogy $b^n = a$.

2. példa. Határozzuk meg a kifejezés értékét:

1) $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$; 2) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$!

Magyarázat

Alkalmazzuk az n-edik gyök tulajdonságait, és figyelembe vesszük, hogy ezeket a tulajdonságokat leíró mindegyik képlet alkalmazható balról jobbra és jobbról balra is. Például az 1. példa megoldása során az $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ képletet

alkalmazzuk, a 2. példa megoldásánál is ugyanezt a képletet használjuk, csak jobbról balra, vagyis:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \quad (\text{ha } a\geqslant 0, b\geqslant 0).$$

Megoldás

1) ▶ $\sqrt[3]{27\cdot 125}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{125}=3\cdot 5=15$; ◁

2) ▶ $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\cdot 8}=\sqrt[4]{16}=2$. ◁

3. példa. Hasonlítsuk össze a számokat:

1) $\sqrt[4]{50}$ és $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[4]{3}$ és $\sqrt[3]{3}$!

Megoldás

1) ▶ $\sqrt{7}=\sqrt[4]{7^2}=\sqrt[4]{49}$. Mivel $50>49$, ezért $\sqrt[4]{50}>\sqrt[4]{49}$, vagyis $\sqrt[4]{50}>\sqrt{7}$; ◁

2) ▶ $\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$. Mivel $27<81$, ezért $\sqrt[12]{27}<\sqrt[12]{81}$, vagyis $\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{3}$. ◁

Magyarázat

Az adott számok összehasonlításához elegendő mindegyik feladatban az összes gyökös kifejezést azonos gyökkitevőre hozni és figyelembe venni, hogy *bármely nemnegatív a és b számokra $a>b$ esetén teljesül az $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ egyenlőtlenség.*

4. példa. Írjuk fel a kifejezéseket egy olyan tört alakjában, melynek a nevezője nem tartalmaz n-edik kitevőjű gyököt:

1) $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$; 2) $\frac{4}{\sqrt{5}+1}$; 3*) $\frac{1}{\sqrt{a}+1}$.

Magyarázat

Az 1) példában figyelembe vesszük, hogy $\sqrt[5]{3^5}=3$, tehát miután megszorozzuk a tört számlálóját és nevezőjét $\sqrt[5]{3^4}$, a nevezőt felírhatjuk gyökjel nélkül. A 2) példában elegendő a számlálót és a nevezőt $\sqrt{5}-1\neq 0$ különbséggel megszorozni (ekkor a nevezőben a négyzetek különbségének képletét kapjuk).

De hasonló átalakítás a 3) feladatban bizonyos problémákkal jár. Az $\frac{1}{\sqrt{a}+1}$ kifejezés megengedett értékeinek a halmaza az $a\geqslant 0$ (és minden ekvivalens átalakítás csak az $a\geqslant 0$ esetén hajtható végre). A megoldáshoz meg kell szoroznunk a tört számlálóját és nevezőjét a $\sqrt{a}-1$ kifejezéssel. Azonban a tört alaptulajdonsága alapján ezt csak abban az esetben tehetjük meg, ha $\sqrt{a}-1\neq 0$, vagyis csak akkor, ha $a\neq 1$. De az $a=1$ hozzátartozik az eredeti kifejezés értékkészletéhez, ezért a kiválasztott módszer az eredeti kifejezés értékkészletének szűküléséhez vezet. Valóban, ha felírjuk, hogy $\frac{1}{\sqrt{a}+1}=\frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$,

akkor ez az egyenlőség nem azonosság, mivel nem teljesül az eredeti kifejezés megengedett értékei halmazához tartozó $a = 1$ esetére. Ebben az esetben, hogy ne hibázzunk, a következő útmutatás szerint járunk el: *Ha az ekvivalens átalakítás során (vagy az egyenletek vagy egyenlőtlenségek megoldása során) olyan átalakítást (vagy képletet) kell alkalmazni, amelynél az eredeti kifejezés megengedett értékeinek halmaza szűkül, akkor azokat az értékeket, melyek az adott halmazból kiestek, külön meg kell vizsgálni.*

Megoldás

1) ▶ $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3^4}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^4}}{3}$. ◁

2) ▶ $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \dfrac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \dfrac{4(\sqrt{5}-1)}{4} = \sqrt{5}-1$. ◁

3) ▶ Megjelöljük $A = \dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$. Ekkor, ha $a = 1$ kapjuk az $A = \dfrac{1}{\sqrt{1}+1} = \dfrac{1}{2}$.

Ha $a \neq 1$ $(a \geqslant 0)$ akkor $A = \dfrac{1}{\sqrt{a}+1} = \dfrac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} = \dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}$.

Felelet: ha $a = 1$, akkor $A = \dfrac{1}{2}$, ha $a \neq 1$ $(a \geqslant 0)$, akkor $A = \dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}$

(vagyis a feleletet nem írhatjuk fel egyértelműen). ◁

5. példa. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$; 2) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$, ha $a > 0$ és $b > 0$; 3*) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$!

Megoldás

1) I. módszer

▶ $\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} = \dfrac{(\sqrt[6]{a})^2-(\sqrt[6]{b})^2}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} =$

$= \dfrac{(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} = \sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$. ◁

II. módszer

▶ Megjelöljük a $\sqrt[6]{a} = x$, $\sqrt[6]{b} = y$, ahol $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Ekkor $\sqrt[3]{a} = (\sqrt[6]{a})^2 = x^2$ és $\sqrt[3]{b} = (\sqrt[6]{b})^2 = y^2$. Tehát,

$\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} = \dfrac{x^2-y^2}{x-y} = \dfrac{(x-y)(x+y)}{x-y} =$

$= x+y = \sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$. ◁

Magyarázat

Az 1) feladatban lévő kifejezés értékkészlete $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b} \neq 0$. A nemnegatív a és b értékekre alkalmazhatjuk a gyökök átalakítására szolgáló összes alapképletet (balról jobbra és jobbról balra is).

Az $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ esetén felírhatjuk: $\sqrt[3]{a} = (\sqrt[6]{a})^2$ és $\sqrt[3]{b} = (\sqrt[6]{b})^2$. Ekkor az adott tört számlálója a négyzetek különbsége alapján bontható fel.

Ahhoz, hogy a számlálóban a négyzetek különbségéhez jussunk, a következő helyettesítést alkalmazhatjuk: $\sqrt[6]{a} = x$; $\sqrt[6]{b} = y$.

2) ▶ $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\dfrac{(\sqrt{a})^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}=$

$$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$ ◁

3) ▶ Megjelöljük $A=\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$.

Ha $\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$ $(\text{és } b+\sqrt{ab}\neq 0)$ akkor:

$$A=\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{a})^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$ ◁

Ha $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0\end{cases}$ $(\text{és } b+\sqrt{ab}\neq 0)$ akkor:

$$A=\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{-(-a)+\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}}{-(-b)+\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}}=$$

$$=\frac{-(\sqrt{-a})^2+\sqrt{-a}\sqrt{-b}}{-(\sqrt{-b})^2+\sqrt{-a}\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{-a}(-\sqrt{-a}+\sqrt{-b})}{-\sqrt{-b}(\sqrt{-b}-\sqrt{-a})}=$$

$$=-\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=-\sqrt{\frac{-a}{-b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Felelet:

1) ha $a\geqslant 0$ és $b>0$, akkor $A=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$;

2) ha $a\leqslant 0$ és $b<0$, akkor $A=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$. ◁

A 2) példában a feladat feltétele alapján $a>0$ és $b>0$, ezért alkalmazhatjuk a gyökök átalakítására szolgáló összes alapképleteket. Ekkor

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b},\quad a=(\sqrt{a})^2,\quad b=(\sqrt{b})^2.$$

A 3) feladatban az adott kifejezés megengedett értékeinek halmaza: $ab\geqslant 0$, $b+\sqrt{ab}\neq 0$. De $ab\geqslant 0$ akkor igaz, ha $\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$ vagy $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0.\end{cases}$ Ha $\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$ akkor alkalmazhatjuk a gyökök átalakítására szolgáló összes alapképleteket (amint azt a 2) feladatban is tettük).

$\begin{cases}a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0\end{cases}$ esetén a $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$ általános képletet kell alkalmazni, és figyelembe kell venni, hogyha $a\leqslant 0$, akkor $(-a)\geqslant 0$. Ekkor leírhatjuk: $a=-(-a)=-(\sqrt{-a})^2$. Hasonlóképpen $b\leqslant 0$ esetén: $b=-(-b)=-(\sqrt{-b})^2$. Vegyük figyelembe még azt is, hogyha $a\leqslant 0$ és $b\leqslant 0$, akkor azt kapjuk:

$$|a|=-a \text{ és } |b|=-b.$$

A felelet felírása során érdemes azt is figyelembe venni, hogy a $b=0$ nem tartozik az adott kifejezés megengedett értékeinek halmazához.

6°. példa. Egyszerűsítsük a $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}}$ kifejezést!

Magyarázat

A feltételben nincs arról szó, hogy az a értéke nemnegatív, ezért először a kifejezés megengedett értékeinek halmazát kell meghatározni.

A $\sqrt[3]{a^2}$ kifejezés az a bármely értékére értelmezve van és nemnegatív. Az a^4 kifejezés is értelmezve van az a bármely értékére, és értéke nemnegatív. Tehát az a bármely értéke esetén a gyök jele alatt egy nemnegatív kifejezés, az $a^4\sqrt[3]{a^2}$ áll, vagyis az adott kifejezés létezik az a bármely értékénél. Megengedett érté-

keinek halmaza: $a \in \boldsymbol{R}$, és az átalakítását a teljes értelmezési tartományra el kell végezni.

Több módszer is létezik az adott kifejezés átalakítására, például: 1) először négyzetgyököt vonunk a szorzatból, majd alkalmazzuk a gyököt gyökből képletet és a gyök alaptulajdonságát; 2) bevisszük az a^4 kifejezést a köbgyök alá, majd ezután alkalmazzuk a gyöknek a gyöke képletét és a gyök alaptulajdonságát. A műveleteknél figyelembe kell venni, hogy az a bármely értéke esetén $a^2 \geqslant 0$ és $a^4 \geqslant 0$ (vagyis ezekre a kifejezésekre alkalmazható a gyök alaptulajdonsága). A gyök alaptulajdonságának alkalmazásakor a gyökkitevőt és a gyök alatti kifejezés hatványkitevőjét egy páros természetes számmal, a 2-vel kell elosztani. Ezért az eredményben a gyök alatti kifejezést abszolútértékjel közzé kell tenni (mivel $a \in \boldsymbol{R}$).

Megoldás

I. módszer

$$\blacktriangleright \sqrt{a^4 \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = a^2 \sqrt[6]{a^2} = a^2 \sqrt[6]{|a|^2} = a^2 \sqrt[3]{|a|}. \triangleleft$$

II. módszer

$$\blacktriangleright \sqrt{a^4 \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^{12} \cdot a^2}} = \sqrt[6]{a^{14}} = \sqrt[6]{|a|^{14}} = \sqrt[3]{|a|^7} = \sqrt[3]{|a|^6 \cdot |a|} =$$
$$= \sqrt[3]{|a|^6} \sqrt[3]{|a|} = |a|^2 \sqrt[3]{|a|} = a^2 \sqrt[3]{|a|}. \triangleleft$$

Ellenőrző kérdések

1. Fogalmazd meg az a szám n-edik gyökének definícióját! Hozz fel példákat!
2. Fogalmazd meg az a szám n-edik számtani gyökének definícióját! Hozz fel példákat!
3. Az a mely értékei mellett léteznek a $\sqrt[2k]{a}$ és a $\sqrt[2k+1]{a}$ $(k \in \boldsymbol{N})$ kifejezések?
4. Írd fel az n-edik gyök tulajdonságait a nemnegatív gyök alatti kifejezésekre!
5*. Bizonyítsd be az n-edik gyök tulajdonságait a nemnegatív gyök alatti kifejezésekre!
6*. Az n-edik gyök milyen tulajdonságai alkalmazhatók a tényezők bármely értékeire (a megfelelő képlet bal oldalának értelmezési tartományára)? Hozz fel példákat az alapképletek alkalmazására és azok általánosítására!
7. Az a mely értékeinél lesz gyöke a következő egyenletnek:
   1) $x^{2k+1} = a$ $(k \in \boldsymbol{N})$; 2) $x^{2k} = a$ $(k \in \boldsymbol{N})$.
8. Írd fel a következő egyenletek valamennyi megoldását:
   1) $x^{2k+1} = a$ $(k \in \boldsymbol{N})$;
   2) $x^{2k} = a$ $(k \in \boldsymbol{N})$: a) ha $a > 0$; b) ha $a < 0$; c) ha $a = 0$.
   Hozz fel példákat az ilyen egyenletekre és oldd meg őket!

9. Ábrázold az $y=\sqrt[2k]{x}$, ahol $k \in N$ függvény grafikonját, és fogalmazd meg tulajdonságait!

10. Ábrázold az $y=\sqrt[2k+1]{x}$, ahol $k \in N$ függvény grafikonját, és fogalmazd meg tulajdonságait!

11*. Magyarázd meg az $y=\sqrt[n]{x}$ ($n \in N$, $n \geqslant 2$) függvény tulajdonságait: 1) páratlan n esetén; 2) páros n esetén!

Gyakorlatok

1. Ellenőrizd, hogy igaz-e az egyenlőség:

1°) $\sqrt[3]{64}=4$; 2°) $\sqrt[9]{-1}=-1$; 3) $\sqrt[10]{1024}=2$;

4°) $\sqrt[25]{0}=0$; 5°) $\sqrt[5]{-32}=-2$; 6°) $\sqrt[13]{1}=1$!

2°. Számítsd ki:

1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; 3) $\sqrt[13]{-1}$;

4) $\sqrt[5]{32}$; 5) $\sqrt[3]{125}$; 6) $\sqrt[4]{81}$!

Határozd meg a **(3–7.)** kifejezések értékét!

3. 1°) $\sqrt[3]{8\cdot 1000}$; 2°) $\sqrt[4]{16\cdot 625}$; 3) $\sqrt[3]{24\cdot 9}$; 4) $\sqrt[5]{48\cdot 81}$.

4. 1) $\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[5]{27}$; 2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; 3) $\sqrt[7]{8}\cdot\sqrt[7]{-16}$; 4) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{125}$.

5. 1) $\frac{\sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{2}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{-5}}$; 4) $\frac{\sqrt[6]{1024}}{\sqrt[6]{16}}$.

6°. 1) $\sqrt[3]{7^3\cdot 11^3}$; 2) $\sqrt[6]{2^6\cdot 3^6}$; 3) $\sqrt[7]{3^7\cdot 5^7}$; 4) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot 10^5}$.

7°. 1) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot 3^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{5^6\cdot 2^9}$; 3) $\sqrt[4]{(0{,}1)^4\cdot 3^8}$; 4) $\sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{30}\cdot 6^{20}}$.

8. Hasonlítsd össze a számokat:

1°) $\sqrt[9]{0{,}1}$ és 0; 2°) $\sqrt[11]{1{,}3}$ és 1; 3) $\sqrt[4]{23}$ és $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[5]{4}$ és $\sqrt[3]{3}$!

9°. Az x mely értékeire van értelmezve a kifejezés:

1) $\sqrt[5]{5x+1}$; 2) $\sqrt[4]{2x-6}$; 3) $\sqrt[6]{x+2}$; 4) $\sqrt[8]{\frac{5}{x}}$!

10. Írd fel a kifejezést olyan tört alakjában, melynek a nevezője nem tartalmaz n-edik gyököt:

1) $\frac{3}{\sqrt[7]{2}}$; 2) $\frac{4}{\sqrt{7}-1}$; 3*) $\frac{1}{\sqrt{a}+3}$; 4*) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$!

11. Emeld ki a tényezőt a gyökjel alól ($a>0$, $b>0$):

1) $\sqrt[5]{a^{11}b^7}$; 2) $\sqrt[4]{a^7b^{13}}$; 3) $\sqrt[3]{-27a^5b^{14}}$; 4) $\sqrt[6]{128a^9b^{17}}$!

12*. Emeld ki a tényezőt a gyökjel alól:

1) $\sqrt[4]{a^4b^{14}}$; 2) $\sqrt[7]{a^9b^8}$; 3) $\sqrt[6]{64a^{12}b^7}$; 4) $\sqrt[8]{a^{17}b^9}$!

13. Vidd be a tényezőt a gyökjel alá ($a > 0, b > 0$):

1) $a\sqrt[3]{7}$; 2) $-b\sqrt[4]{ab}$; 3) $ab\sqrt[7]{5}$; 4) $ab^2\sqrt[6]{\frac{a}{b^{11}}}$!

14*. Vidd be a tényezőt a gyökjel alá:

1) $a\sqrt[4]{7}$; 2) $a^3\sqrt[7]{ab}$; 3) $ab\sqrt[6]{\frac{2b}{a^5}}$; 4) $-b\sqrt[8]{-3b^3}$!

15. Egyszerűsítsd a kifejezéseket:

1) $\sqrt[8]{a^8}$, ha $a < 0$; 2) $\sqrt[5]{a^5}$, ha $a < 0$;

3) $\sqrt[4]{a^4} - \sqrt[3]{a^3}$, ha $a > 0$; 4) $\sqrt[7]{a^7} + \sqrt[6]{a^6}$, ha $a < 0$!

16*. Egyszerűsítsd a kifejezéseket:

1) $\sqrt[4]{2ab^3} \cdot \sqrt[4]{16a^3b^5}$; 2) $\sqrt[6]{ab^3c} \cdot \sqrt[6]{a^5b^4c} \cdot \sqrt[6]{b^5c^4}$;

3) $\sqrt[8]{a^6\sqrt[5]{a^4}}$; 4) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{3a\sqrt[5]{2a^2}}}$!

17. Egyszerűsítsd a kifejezéseket:

1) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab}$; 2) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$;

3*) $\frac{\sqrt[3]{ab^2} - 2\sqrt[6]{ab^5} + b}{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt{ab}}$, ahol $a > 0, b > 0, a \neq b$; 4*) $\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{xy}}{\sqrt[3]{y} - \sqrt[6]{xy}}$!

18°. Oldd meg az egyenleteket:

1) $x^3 = 7$; 2) $x^6 = 3$; 3) $x^5 = -5$;

4) $x^8 = -13$; 5) $x^4 = 16$; 6) $x^3 = -64$!

19. Ábrázold a következő függvények grafikonjait:

1°) $y = \sqrt[4]{x}$; 2°) $y = \sqrt[5]{x}$; 3°) $y = \sqrt[7]{x}$; 4°) $y = \sqrt[6]{x}$;

5) $y = \sqrt[3]{|x|}$; 6) $y = -\sqrt[3]{x}$; 7) $y = \sqrt[4]{-x}$!

20. Oldd meg grafikusan az egyenleteket:

1) $\sqrt[3]{x} = 2 - x$; 2) $\sqrt{x} = 6 - x$; 3) $\sqrt[3]{x-2} = 4 - x$; 4) $\sqrt{-x} = x + 2$!

Ellenőrizd behelyettesítéssel, hogy x valóban gyöke az egyenletnek!

21*. Bizonyítsd be, hogy a 20. feladatban lévő egyenleteknek nincsenek más gyökei a grafikusan meghatározottaktól!

11. §. IRRACIONÁLIS EGYENLETEK

19. táblázat

Az irracionális egyenlet fogalma	
Azt az egyenletet, melyben a változó a gyök jele alatt van, *irracionális* egyenletnek nevezzük. Az irracionális egyenletet rendszerint racionális egyenletté történő átalakítással oldjuk meg.	
Az irracionális egyenlet megoldása	
1. Az egyenlet mindkét oldalát azonos kitevőjű hatványra emeljük	
Ha az egyenlet mindkét oldalát páratlan kitevőjű hatványra emeljük, akkor az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk (megengedett értékeinek a halmazán).	**Ha az egyenlet mindkét oldalát páros kitevőjű hatványra emeljük, akkor előfordulhat, hogy hamis gyökök jelennek meg, melyeket ellenőrzéssel zárunk ki.**
1. példa Oldjuk meg a $\sqrt[3]{x-1}=2$ egyenletet! ▶ $(\sqrt[3]{x-1})^3=2^3$, $x-1=8$, $x=9$. *Felelet:* 9. ◁	**2. példa** Oldjuk meg a $\sqrt{2x+3}=x$ egyenletet! ▶ $(\sqrt{2x+3})^2=x^2$, $x^2-2x-3=0$, $x_1=-1$, $x_2=3$. *Ellenőrzés.* Ha $x=-1$, akkor: $\sqrt{1}=-1$ hamis egyenlőség, tehát az $x=-1$ hamis gyök. Ha $x=3$, akkor: $\sqrt{9}=3$ igaz egyenlőség, tehát az $x=3$ gyöke az egyenletnek. *Felelet:* 3. ◁
2. Változócserét alkalmazunk	
Ha az egyenletben a változó ugyanolyan alakban többször is szerepel, akkor a megfelelő változót tartalmazó kifejezést egy betűvel (új változóval) helyettesítik.	
3. példa Oldjuk meg a $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=2$ egyenletet! ▶ $\sqrt[3]{x}=t$ változócserét alkalmazunk. Ekkor $\sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=t^2$. A következő egyenletet kapjuk: $t^2+t=2$, $t^2+t-2=0$, $t_1=1$, $t_2=-2$. Visszahelyettesítés után: $\sqrt[3]{x}=1$, ekkor $x=1$ vagy $\sqrt[3]{x}=-2$, innen $x=-8$. *Felelet:* 1; –8. ◁	

Magyarázat és indoklás

Irracionális egyenletnek azokat az egyenleteket nevezzük, melyekben a változók a gyökjel alatt találhatók. Például $\sqrt{x-2}=5$, $\sqrt[3]{x}+x=2$ irracionális egyenletek.

Az irracionális egyenleteket rendszerint az adott egyenlet racionális egyenletté történő átalakításával oldjuk meg. Általában ezt az irracionális egyenlet mindkét oldalának azonos kitevőjű hatványra emelésével érjük el (ezt a műveletet néha egymás után többször is el kell végezni).

Figyelembe kell venni a következőt:

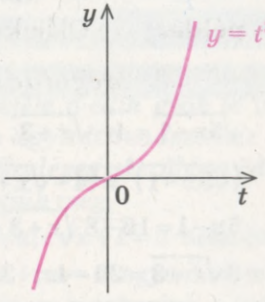
ha az egyenlet mindkét oldalát azonos páratlan kitevőjű hatványra emeljük, akkor az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk (megengedett értékeinek a halmazán).

Például a $\sqrt[3]{x+7}=3$ egyenlet (1)

ekvivalens a $\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^3=3^3$ egyenlettel, (2)

vagyis az $x + 7 = 27$ egyenlettel. Innen $x = 20$.

Ahhoz, hogy az (1) és (2) egyenletek ekvivalenciáját megmagyarázzuk, elegendő azt figyelembe venni, hogy az $A = B$ és az $A^3 = B^3$ egyenlőségek csak egyszerre lehetnek igazak, mivel az $y = t^3$ függvény növekvő (grafikonja a 84. ábrán látható), és mindegyik függvényértéknek egyetlen t argumentumérték felel meg. Tehát az (1) egyenlet mindegyik gyöke (amelyek ezt az egyenlőséget igaz egyenlőséggé alakítják) a (2) egyenletnek is gyöke, és fordítva, a (2) egyenlet mindegyik gyöke az (1) egyenletnek is gyöke. Ami azt jelenti, hogy az (1) és (2) egyenletek ekvivalensek. Hasonlóképpen bizonyítható a megfelelő egyenletek ekvivalenciája abban az esetben is, amikor az egyenletek mindkét oldalát tetszőleges páratlan kitevőjű hatványra kell emelnünk.



84. ábra

Ha az irracionális egyenlet megoldása során az egyenlet mindkét oldalát azonos páros kitevőjű hatványra emeljük, akkor egyenlet-következményt kapunk – ekkor az első egyenlet mindegyik gyöke a másodiknak is megoldása, de a második egyenletnek lehetnek olyan gyökei is, amelyek nem elégítik ki az elsőt. Az ilyen gyököket az eredeti egyenlet *hamis gyökeinek* nevezzük. **Ellenőrzéssel tisztáznunk kell, hogy a kapott számok megoldásai-e az adott egyenletnek.**

Például a

$$\sqrt{x} = 2 - x \tag{3}$$

egyenlet megoldásakor négyzetre emeljük mindkét oldalát, és a következő egyenletet kapjuk:

$$(\sqrt{x})^2 = (2-x)^2. \tag{4}$$

Figyelembe véve, hogy $(\sqrt{x})^2 = x$, kapjuk, hogy $x = 4 - 4x + x^2$, vagyis $x^2 - 5x + 4 = 0$. Innen $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Elvégezzük az ellenőrzést. Ha $x = 1$, akkor a (3) egyenlet igaz egyenlőséggé alakul át: $\sqrt{1} = 2 - 1$, $1 = 1$. Tehát $x = 1$ gyöke a (3) egyenletnek.

Ha $x = 4$, akkor hamis egyenlőséget kapunk: $\sqrt{4} = 2 - 4$; $2 \neq -2$. Tehát az $x = 4$ hamis gyöke a (3) egyenletnek. Vagyis a feleletbe csak az $x = 1$-t írjuk fel.

A hamis gyök megjelenése azzal magyarázható, hogy az $A^2 = B^2$ egyenlőséget az $A = B$ egyenlőség négyzetre emelésével és az $A = -B$ négyzetre emelésével is megkapható. Tehát az $A^2 = B^2$ egyenlőség teljesüléséből még nem következik az $A = B$ egyenlőség teljesülése. Másképp fogalmazva, a (4) egyenlet gyökei nem feltétlenül gyökei a (3) egyenletnek is (viszont a (3) egyenlet mindegyik gyöke a (4) egyenletnek is megoldása, mivel az $A = B$ teljesülésekor feltétlenül teljesülni fog az $A^2 = B^2$ egyenlőség is).

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Oldjuk meg a $\sqrt{x+3} + \sqrt{5x-1} = 4$ egyenletet!

Megoldás	*Magyarázat*
▶ $\sqrt{5x-1} = 4 - \sqrt{x+3}$, $(\sqrt{5x-1})^2 = (4 - \sqrt{x+3})^2$, $5x - 1 = 16 - 8\sqrt{x+3} + x + 3$, $8\sqrt{x+3} = 20 - 4x$; $2\sqrt{x+3} = 5 - x$, $(2\sqrt{x+3})^2 = (5-x)^2$, $4(x+3) = 25 - 10x + x^2$, $x^2 - 14x + 13 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 13$.	Az egyik gyökös kifejezést elkülönítjük, vagyis az egyenlet egyik oldalán hagyjuk, majd négyzetre emeljük az egyenlet mindkét oldalát. Ezzel megszabadulunk az egyik gyöktől. Ezután újra elkülönítjük a gyökös kifejezést, és újra négyzetre emeljük az egyenlet mindkét oldalát. Ezzel egy másodfokú egyenlethez jutunk. Mivel négyzetre emeléskor hamis gyököt is kaphatunk, ezért a végén ellenőrizni kell a megoldásokat.

Ellenőrzés: $x = 1$ gyöke az egyenletnek $(\sqrt{4} + \sqrt{4} = 4, 4 = 4)$; $x = 13$ hamis gyök, mert $(\sqrt{16} + \sqrt{64} \neq 4)$.

Felelet: 1. ◁

2. példa. Oldjuk meg a $\frac{8}{\sqrt{6-x}} - \sqrt{6-x} = 2$ egyenletet!

Megoldás

▶ Legyen $\sqrt{6-x} = t$, ahol $t > 0$.

Azt kapjuk, hogy $\frac{8}{t} - t = 2$.

Ekkor $t^2 + 2t - 8 = 0$.

Innen $t_1 = 2$, $t_2 = -4$.

$t_1 = 2$ kielégíti a $t > 0$ feltételt;

$t_2 = -4$ nem elégíti ki a $t > 0$ feltételt.

Visszahelyettesítés után:

$$\sqrt{6-x} = 2,$$
$$6 - x = 4,$$
$$x = 2.$$

Felelet: 2. ◁

Magyarázat

Mivel az adott egyenletben a változók egy és ugyanabban az alakban fordulnak elő $(\sqrt{6-x})$, ezért célszerű ezt a kifejezést egy új változóra cserélni $(\sqrt{6-x} = t)$.

Ha a $t > 0$ kikötést alkalmazzuk (a számtani gyök definíciója alapján $\sqrt{6-x} \geqslant 0$, és a nevező nem lehet 0), akkor a helyettesítés, illetve az ekvivalens átalakítások eredményeként egy másodfokú egyenletet kapunk.

A $t > 0$ kikötés nélkül is eljárhattunk volna, de akkor az átalakítások után egyenlet-következményt kapunk, és ebben az esetben a megoldást le kell ellenőrizni.

3*. példa. Oldjuk meg a $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$ egyenletet!

Megoldás

▶ Legyen $\begin{cases} \sqrt[3]{x-2} = u, \\ \sqrt{x+1} = v. \end{cases}$ Ekkor $\begin{cases} x-2 = u^3, \\ x+1 = v^2. \end{cases}$

A következő rendszert kapjuk:

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^3 - v^2 = -3. \end{cases}$$

Az első egyenletből kifejezzük a $v = 3 - u$ és behelyettesítjük a második egyenletbe.

$$u^3 - (3-u)^2 = -3,$$
$$u^3 - (9 - 6u + u^2) = -3,$$
$$u^3 - u^2 + 6u - 6 = 0,$$
$$u^2(u-1) + 6(u-1) = 0,$$
$$(u-1)(u^2+6) = 0.$$

Figyelembe véve, hogy $u^2 + 6 \neq 0$, megkapjuk, hogy $u = 1$. Ekkor $v = 2$.

Magyarázat

Azokat az irracionális egyenleteket, melyekben többféle n-edik gyök is van, egy racionális egyenletrendszerhez vezetjük vissza. Ezt legegyszerűbben változócserével tehetjük meg.

A $\sqrt[3]{x-2} = u$, $\sqrt{x+1} = v$ helyettesítésekkel egy $u + v = 3$ egyenlethez jutunk. Ahhoz, hogy megkapjuk a másik egyenletet, az n-edik gyök definíciója alapján felírjuk, hogy $\begin{cases} x-2 = u^3, \\ x+1 = v^2. \end{cases}$ Kivonjuk az első egyenletből a másodikat (hogy megszabaduljunk az x változótól), és megkapjuk az u és v változók közötti második összefüggést: $u^3 - v^2 = -3$.

A következő rendszert kapjuk:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}=1,\\ \sqrt{x+1}=2.\end{cases}$$

Az első egyenletből $x = 3$, ami kielégíti a második egyenletet is.

Felelet: 3. ◁

A kapott egyenletrendszert behelyettesítő módszerrel oldjuk meg.

A visszahelyettesítés során tisztázni kell, hogy létezik-e az x-nek olyan értéke, amely kielégíti mindkét változócserét.

Irracionális egyenletet is tartalmazó egyenletrendszerek megoldása során tradicionális módszereket alkalmaznak: a behelyettesítési módszert és a változócserét. Figyelembe kell venni, hogy a *változócsere* (*és a visszahelyettesítés*) *ekvivalens átalakítások* (természetesen akkor, ha a változócserével nem szűkül az adott egyenlet vagy rendszer megengedett érékeinek a halmaza). Ha a változócserével kapott egyenletek további megoldásakor egyenlet-következményeket alkalmazunk, akkor hamis gyökök is megjelenhetnek, ezért a kapott megoldásokat ellenőrizni kell.

4*. példa. Oldjuk meg a $\begin{cases}\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3\end{cases}$ egyenletrendszert!

Megoldás

▶ A $\sqrt[4]{x}=u$ és a $\sqrt[4]{y}=v$ helyettesítés a

$$\begin{cases}u+v=3,\\ u^2-v^2=3\end{cases}$$

egyenletrendszert adja.

A egyenletrendszer első egyenletéből adódik:

$$u=3-v.$$

Ekkor a második egyenletből kapjuk, hogy

$$(3-v)^2-v^2=3.$$

Innen $v = 1$, akkor $u = 2$.

A visszahelyettesítés során adódik:

$\sqrt[4]{y}=1$, tehát, $y = 1$;

$\sqrt[4]{x}=2$, tehát, $x = 16$.

Felelet: (16; 1). ◁

Magyarázat

Ha bevezetjük a $\sqrt[4]{x}=u$ és a $\sqrt[4]{y}=v$ új változókat, akkor $\sqrt{x}=u^2$ és $\sqrt{y}=v^2$. Akkor az adott egyenletrendszer egy könnyen megoldható algebrai rendszerrel lesz ekvivalens, és a visszahelyettesítés után már egy egyszerű irracionális egyenletet kapunk.

Figyelembe véve, hogy a behelyettesítés és a visszahelyettesítés ekvivalens egyenletrendszereket hoz létre, ezért a kapott rendszerek megoldásai egybeesnek az eredeti egyenletrendszer megoldásaival

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x}=2,\\ \sqrt[4]{y}=1,\end{cases} \text{ vagyis } \begin{cases}x=16,\\ y=1.\end{cases}$$

Ellenőrző kérdések

1. Nevezd meg az irracionális egyenletek megoldásának legfontosabb módszereit! Hozz fel példákat a megfelelő módszerek alkalmazására!
2. Magyarázd meg, miért éppen változócserét célszerű alkalmazni az
$$\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[5]{x}-4=0,\quad \sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-2=0$$
egyenletek megoldása során. Milyen új változókat vezettünk be az egyes egyenletekben?
3. Ha az egyenlet mindkét oldalát páratlan kitevőjű hatványra emeljük, akkor mindig az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk. Miért?
4. Ha az egyenlet mindkét oldalát páros kitevőjű hatványra emeljük, akkor megjelenhetnek hamis gyökök is. Magyarázd meg, hogy miért! Hogyan zárják ki a hamis gyököket?

Gyakorlatok

Oldd meg az **(1–6.)** egyenleteket!

1. 1) $\sqrt{x-2}=1$; 2) $\sqrt{x-1}=-3$; 3) $\sqrt[3]{x-1}=-3$;
4) $\sqrt[3]{x^2+125}=5$; 5) $\sqrt[4]{2x-9}=3$.

2. 1) $\sqrt{x+1}=x-5$; 2) $\sqrt{3x-2}+x=4$; 3°) $\sqrt[3]{x-x^3}=-x$; 4) $\sqrt[3]{x^3+x}-x=0$.

3. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5}=3$; 2) $\sqrt{2x-20}+\sqrt{x+15}=5$;
3) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$; 4) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$.

4. 1) $\sqrt[3]{x^3-2x+6}=x$; 2) $\sqrt[3]{x-x^3+5}=-x$;
3) $\sqrt{3-\sqrt[3]{x+10}}=2$; 4) $\sqrt[3]{2+\sqrt{x^2+3x-4}}=2$.

5. 1) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=4$; 2) $\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x-2}=3$;
3) $3\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[8]{x+1}=4$; 4) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt[4]{x^2-1}=2$.

6*. 1) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$.

Oldd meg a **(7–8.)** egyenletrendszereket!

7. 1) $\begin{cases}3\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6,\\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=7,\\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ 2x-y=7;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=7,\\ \sqrt{x}\sqrt{y}=4.\end{cases}$

8*. 1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=2,\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{x+3y+6}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2.\end{cases}$

12. §. A HATVÁNY FOGALMÁNAK ÁLTALÁNOSÍTÁSA. A HATVÁNYFÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAI ÉS GRAFIKONJA

12.1. A hatvány fogalmának általánosítása

20. táblázat

1. Természetes és egész kitevőjű hatvány	
$a^1 = a$	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-szer}}$ $a \in \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{N}\ (n \geqslant 2)$
$a^0 = 1$ $a \neq 0$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a \neq 0, n \in \boldsymbol{N}$
2. Törtkitevőjű hatvány	
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $a \geqslant 0$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a > 0, n \in \boldsymbol{N}\ (n \geqslant 2), m \in \boldsymbol{Z}$
3. A hatvány tulajdonságai	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Magyarázat és indoklás

1. Számotokra már ismert a természetes és az egész kitevőjű hatvány fogalma. Felidézzük meghatározásukat és tulajdonságaikat.

Ha n természetes szám nagyobb, mint 1, akkor bármely valós a számra igaz az $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-szer}}$ kifejezés, vagyis a^n hatvány azt az n tényezős szorzatot jelenti, melyek minden tényezője a-val egyenlő.

Ha $n = 1$, akkor úgy tekintik, hogy $a^1 = a$.

Ha $a \neq 0$, akkor $a^0 = 1$ és $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, ahol n természetes szám.

Például $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Szintén ismeritek már a hatvány legfontosabb tulajdonságait:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\quad a^m : a^n = a^{m-n};\quad (a^m)^n = a^{mn};\quad (ab)^n = a^n b^n;\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Emlékeztetünk még egy hasznos tulajdonságra is

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}.$$

Általánosítjuk a hatvány fogalmát a $3^{\frac{2}{7}}$; $6^{0,2}$; $5^{-\frac{1}{3}}$ és ehhez hasonló kifejezésekre, vagyis *a racionális kitevőjű hatványokra* is. Olyan meghatározást célszerű adni, hogy a racionális kitevőjű hatványokra is érvényesek maradjanak az egész kitevőjű hatványok tulajdonságai.

Például, ha azt akarjuk, hogy teljesüljön az $(a^p)^q = a^{pq}$ tulajdonság, akkor teljesülni kell az $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$ egyenlőségnek. Azonban az n-edik gyök meghatározása alapján az utóbbi egyenlőség azt jelenti, hogy $a^{\frac{m}{n}}$ az a^m szám n-edik gyöke. Ez a következő meghatározáshoz vezet.

Az $a > 0$ szám $r = \frac{m}{n}$ racionális kitevőjű hatványának az $\sqrt[n]{a^m}$ számot nevezzük, ahol m egész, az n pedig természetes szám ($n > 1$).

A meghatározás alapján, ha $r > 0$

$$\boxed{0^r = 0}.$$

Például a racionális kitevőjű hatvány definíciója alapján:

$$3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2} = \sqrt[7]{9}; \quad 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}; \quad 2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}; \quad 0^{\frac{2}{5}} = 0.$$

Megjegyzés. Az $a^{\frac{m}{n}}$ (ahol $n > 1$) racionális kitevőjű hatvány $a < 0$ esetén nincs értelmezve.

Ez azzal magyarázható, hogy az r racionális szám különbözőképpen megadható: $r = \frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$, ahol k bármilyen természetes szám.

Ha $a > 0$, akkor a gyök alaptulajdonságának, és a racionális kitevőjű hatvány meghatározásának alkalmazásával azt kapjuk, hogy: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{nk}}$.

Ha $a < 0$, akkor ez a tulajdonság nem áll fenn. Ha például $r = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, akkor teljesülni kell a következő egyenlőségnek: $a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{6}}$. De $a = -1$ esetén adódik: $a^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$; $a^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1 \neq -1$, vagyis az a negatív értékére: $a^{\frac{1}{3}} \neq a^{\frac{2}{6}}$. Ezért az $a^{\frac{m}{n}}$ (ahol m egész, n pedig egytől különböző természetes szám) hatvány negatív a értékekre nincs értelmezve.

Bebizonyítjuk, hogy a racionális kitevőjű hatvány tulajdonságai megegyeznek az egész kitevőjű hatvány tulajdonságaival (különbség csak annyi, hogy a következő tulajdonságok csak a pozitív alapú hatványra igazak).

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;

2) $a^r : a^s = a^{r-s}$;

3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

4) $(ab)^r = a^r b^r$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

E tulajdonságok bizonyításához elegendő a racionális kitevőjű hatvány meghatározásának, és a 10. §-ban bizonyított n-edik gyök tulajdonságainak alkalmazása.

● Legyen $r = \frac{m}{n}$ és $s = \frac{p}{q}$, ahol n és q 1-nél nagyobb természetes számok, az m és n pedig egész számok.
Ekkor, ha $a > 0$ és $b > 0$, akkor:

1) $a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{r+s}$;

2) $a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{r-s}$;

3) $(a^r)^s = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s = \sqrt[n]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{n}} = a^{\frac{m}{n} \cdot s} = a^{rs}$;

4) $(ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^r b^r$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^r}{b^r}$. ○

Az irracionális kitevőjű hatvány fogalma. Leírjuk általánosan, hogyan lehet meghatározni az a^α hatványt, ha α irracionális szám, és amikor az $a > 1$. Például megmagyarázzuk azt, hogyan lehet értelmezni a $2^{\sqrt{3}}$ kifejezést.

A $\sqrt{3}$ megadható nem periodikus végtelen tizedes törtként: $\sqrt{3} = 1{,}7320508075\ldots$. Megvizsgáljuk $\sqrt{3}$ számot kétoldalú közelítéssel[1]:

[1] A kétoldali közelítés azon alapszik, hogy az adott hatványalap esetén kisebb kitevőhöz kisebb hatványérték tartozik.

$$1 < \sqrt{3} < 2;$$
$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8;$$
$$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74;$$
$$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733;$$
$$1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321;$$
$$1{,}73205 < \sqrt{3} < 1{,}73206;$$
$$1{,}732050 < \sqrt{3} < 1{,}732051;$$
$$\ldots$$

Könnyen beláthatjuk, hogyha $r < \sqrt{3} < s$ (ahol r és s racionális szám), akkor $2^{\sqrt{3}}$ a 2^r és a 2^s között fog elhelyezkedni, mégpedig $2^r < 2^{\sqrt{3}} < 2^s$. Meghatározzuk számológép segítségével a 2^r és a 2^s értékeit, úgy választva meg az r és s értékeit mint $\sqrt{3}$ alsó és felső megfelelő közelítése. A következő összefüggéseket kapjuk:

$$2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2;$$
$$2^{1,7} \approx 3{,}2490096 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8} \approx 3{,}4822022;$$
$$2^{1,73} \approx 3{,}3172782 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74} \approx 3{,}3403517;$$
$$2^{1,732} \approx 3{,}3218801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,733} \approx 3{,}3241834;$$
$$2^{1,7320} \approx 3{,}3218801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,7321} \approx 3{,}3221104;$$
$$2^{1,73205} \approx 3{,}3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,73206} \approx 3{,}3220182;$$
$$2^{1,732050} \approx 3{,}3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,732051} \approx 3{,}3219975.$$
$$\ldots$$

Látható, hogy minél jobban közelítjük két oldalról a kitevőt racionális számokkal, a 2^r és a 2^s értékei között egyre kisebb a különbség, és egy és ugyanazon számhoz 3,32199... fognak tartani. Ezt a számot tekintjük a $2^{\sqrt{3}}$ hatvány értékének. Tehát $2^{\sqrt{3}} = 3{,}32199\ldots$.

A $2^{\sqrt{3}}$ számológéppel meghatározott értéke: $2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997$.

Bebizonyítható, hogyha kiválasztunk egy racionális r számot, amely alulról közelíti az irracionális α számot, és egy másik s racionális számot, amely felülről közelíti ugyanezt az irracionális α számot, akkor bármilyen $a > 1$ értékre létezik egyetlen egy olyan y szám, amely nagyobb, mint az a^r és kisebb, mint a^s. Ez az y szám a meghatározás alapján, az a^α.

Hasonlóan definiálják az α irracionális kitevőjű $0 < a < 1$ alapú hatványt is, azzal a különbséggel, hogy amikor $0 < a < 1$ esetén $r < \alpha < s$, úgy tekintik, hogy $a^s < a^\alpha < a^r$. Továbbá a racionális kitevőjű hatványokhoz hasonlóan a definíció alapján úgy tekintik, hogy $\mathbf{1}^\alpha = \mathbf{1}$ bármilyen α-ra és $\mathbf{0}^\alpha = \mathbf{0}$ bármely $\alpha > 0$-ra.

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Írjuk fel a kifejezést racionális kitevőjű hatványként!

1) $\sqrt[3]{7^5}$; 2) $\sqrt[4]{5^{-3}}$; 3) $\sqrt[7]{a^2}$, ha $a \geqslant 0$; 4*) $\sqrt[7]{a^2}$.

Megoldás

1) ▶ $\sqrt[3]{7^5} = 7^{\frac{5}{3}}$; ◁

2) ▶ $\sqrt[4]{5^{-3}} = 5^{-\frac{3}{4}}$; ◁

3) ▶ ha $a \geqslant 0$ $\sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}$; ◁

4) ▶ $\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[7]{|a|^2} = |a|^{\frac{2}{7}}$. ◁

Magyarázat

A racionális kitevőjű hatvány definíciója alapján, ha $a \geqslant 0$, akkor

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

A 3. feladatban figyelembe vesszük, hogy az $a^{\frac{2}{7}}$ kifejezés értelmezhető az $a = 0$ esetére is.

A 4. feladatban $a < 0$ esetén nem alkalmazhatjuk az (1) képletet. De ha figyelembe vesszük, hogy $a^2 = |a|^2$, akkor az (1) képletet az $|a|$ hatványalapra már alkalmazhatjuk, mivel $|a| \geqslant 0$.

2. példa. Számítsuk ki: 1) $81^{\frac{3}{4}}$; 2) $128^{-\frac{2}{7}}$; 3*) $(-8)^{\frac{1}{3}}$!

Megoldás

1) ▶ $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$; ◁

2) ▶ $128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = \left(\sqrt[7]{128}\right)^{-2} =$

$= 2^{-2} = \frac{1}{4}$; ◁

3*) ▶ $(-8)^{\frac{1}{3}}$ nem létezik, mivel az $a^{\frac{1}{3}}$ hatvány csak az $a \geqslant 0$ esetén értelmezhető. ◁

Magyarázat

A racionális kitevőjű hatvány definíciója alapján: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, ha $a > 0$, és a 3. feladat megoldásakor figyelembe vesszük, hogy az $a^{\frac{m}{n}}$ kifejezés $a < 0$ esetén nincs értelmezve.

3. példa. Számítsuk ki:

1) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$; 2*) $\dfrac{x+27}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9}$.

Megoldás

1) ▶ $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} =$

Magyarázat

Mivel az adott példák tartalmazzák az $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, kifejezéseket, ezért

$$= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}};$$ ◁

2*) ▶ $\frac{x+27}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9} = \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3^3}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9} =$

$$= \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} + 3\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9\right)}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9} = x^{\frac{1}{3}} + 3.$$ ◁

$a \geqslant 0, b \geqslant 0, x \geqslant 0$. Akkor az 1. feladatban az a és b nemnegatív számok felírhatók egy kifejezés négyzeteként: $a = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$, $b = \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2$, majd alkalmazni lehet a négyzetek különbsége azonosságot: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. A 2. feladatban a nemnegatív x szám felírható egy kifejezés köbeként: $x = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$, majd alkalmazni kell a köbök összegének képletét:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

4. példa. Oldjuk meg az egyenleteket!

1) $\sqrt[3]{x^2} = 1$; 2*) $x^{\frac{2}{3}} = 1$.

Megoldás

1) ▶ $\sqrt[3]{x^2} = 1$. Megengedett értékek halmaza: $x \in \boldsymbol{R}$,

$x^2 = 1$,

$x = \pm 1$.

Felelet: ± 1. ◁

2*) ▶ $x^{\frac{2}{3}} = 1$. Megengedett értékek halmaza: $x \geqslant 0$,

$x^2 = 1$,

$x = \pm 1$.

Figyelembe véve a megengedett értékek halmazát, az $x = 1$ eredményt kapjuk.

Felelet: 1. ◁

Magyarázat

Az $\sqrt[3]{x^2} = 1$ egyenlet megengedett értékeinek a halmaza az összes valós szám, és az $x^{\frac{2}{3}} = 1$ egyenletben csak az $x \geqslant 0$.

Az egyenlet mindkét oldalának a köbre emelése során egy olyan egyenletet kapunk, amely az értelmezési tartományán ekvivalens az eredetivel.

Tehát az első egyenletet kielégíti minden meghatározott gyök, a másodikat pedig csak a nemnegatívak.

(Az 1. feladatban szintén figyelembe vesszük azt, hogy $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 = x^2$, a 2. feladatban pedig azt, hogy $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3 = x^{\frac{2}{3} \cdot 3} = x^2$.)

Ellenőrző kérdések

1. Mi a természetes kitevőjű hatvány meghatározása? Mondj példát természetes kitevőjű hatványra!
2. Definiáld az egész kitevőjű hatvány fogalmát! Hozz fel példákat az ilyen hatványok kiszámítására! Az a mely értékére létezik az a^0 és az a^{-n} kifejezés, ha $n \in \boldsymbol{N}$?

3. Definiáld az $r = \frac{m}{n}$ racionális kitevőjű hatvány fogalmát, ahol m egész szám, n pedig egytől különböző természetes szám! Hozz fel példákat az ilyen hatványok kiszámítására! Az a mely értékei mellett létezik az $a^{\frac{m}{n}}$ kifejezés értéke? Add meg az $a^{\frac{2}{5}}$ és $a^{-\frac{2}{5}}$ kifejezések megengedett értékeinek a halmazát!
4. Sorold fel a racionális kitevőjű hatvány tulajdonságait! Hozz fel példákat ezek alkalmazására!
5*. Igazold a racionális kitevőjű hatvány tulajdonságait!
6*. Példákon szemléltesd, hogyan lehet bevezetni az irracionális kitevőjű hatvány fogalmát!

Gyakorlatok

1°. Írd le a hatványt gyökjel alatti számként:

1) $2^{\frac{1}{2}}$; 2) $3^{-\frac{2}{5}}$; 3) $5^{0,25}$; 4) $4^{-\frac{3}{7}}$; 5) $2^{1,5}$; 6) $7^{-\frac{2}{3}}$!

2. Add meg racionális hatványként:

1°) $\sqrt[6]{3^5}$; 2°) $\sqrt[5]{4}$; 3°) $\sqrt{7^{-9}}$;

4) $\sqrt[9]{a^{-2}}$, ha $a > 0$; 5) $\sqrt[4]{2b}$, ha $b \geqslant 0$; 6*) $\sqrt[11]{c^4}$!

3°. Van-e értelme a kifejezésnek:

1) $(-3)^{\frac{1}{2}}$; 2) $(-5)^{-2}$; 3) $4^{\frac{2}{7}}$; 4) 0^{-5}?

4. Határozd meg a kifejezés megengedett értékeinek halmazát:

1) $x^{\frac{1}{5}}$; 2) x^{-3}; 3) $(x-1)^{-\frac{2}{3}}$;

4) $(x+3)^{\frac{3}{7}}$; 5) $(x^2-1)^0$; 6) $x^3 - 5$!

5. Határozd meg a számkifejezés értékét:

1) $243^{0,4}$; 2) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; 3) $16^{\frac{5}{4}}$; 4) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$;

5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 81^{\frac{1}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$; 6) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} - 2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}}$;

7) $\left(\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-3}\right) : 49^{-\frac{1}{2}}$!

6. Bontsd tényezőkre:

1) $(ax)^{\frac{1}{3}} + (ay)^{\frac{1}{3}}$; 2) $a - a^{\frac{1}{2}}$; 3) $3 + 3^{\frac{1}{2}}$; 4) $a + b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$!

7. Egyszerűsítsd a törteket:

1) $\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$; 2) $\frac{p^{\frac{1}{2}}-5}{p-25}$; 3) $\frac{c+c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}+d}{c^{\frac{3}{2}}-d^{\frac{3}{2}}}$; 4) $\frac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$!

Egyszerűsítsd a **(8–9.)** kifejezéseket!

8. 1) $\left(1+c^{\frac{1}{2}}\right)^2-2c^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;

3) $\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 4) $\left(k^{\frac{1}{4}}+l^{\frac{1}{4}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}}+l^{\frac{1}{8}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}}-l^{\frac{1}{8}}\right)$.

9. 1) $\frac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}$; 2) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$; 3) $\frac{z-8}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}$; 4) $\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

10. Oldd meg az egyenleteket:

1) $x^{\frac{3}{5}}=1$; 2) $x^{\frac{1}{7}}=2$; 3) $x^{\frac{2}{5}}=2$; 4) $\sqrt[5]{x^2}=2$!

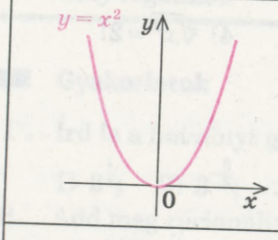
12.2. Hatványfüggvény. Tulajdonságai és grafikonja

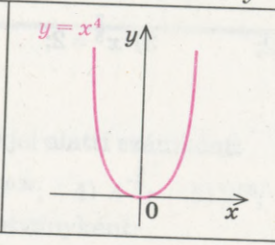
Definíció. **Az $y = x^\alpha$ alakú függvényt, ahol α tetszőleges valós szám, *hatványfüggvénynek* nevezzük.**

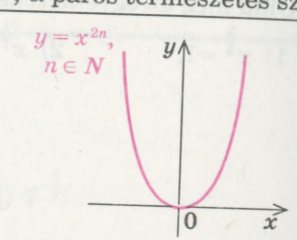
Az $y = x^\alpha$ (ha $\alpha \neq 0$) függvény

Grafikon

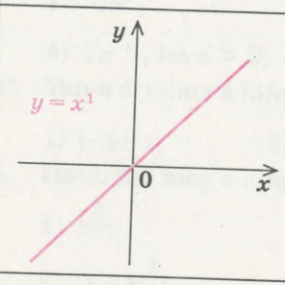
1. $y = x^\alpha$, α páros természetes szám

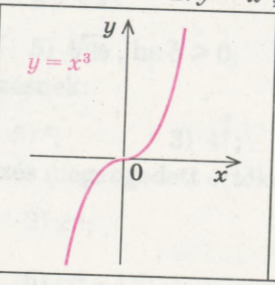


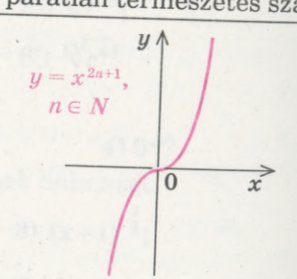




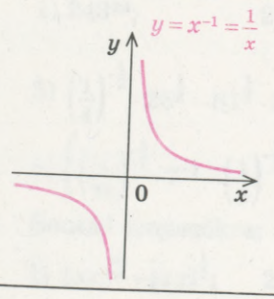
2. $y = x^\alpha$, α páratlan természetes szám

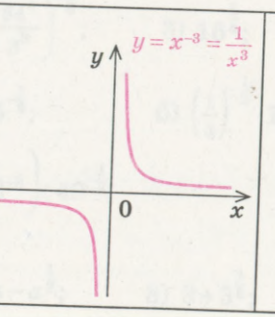


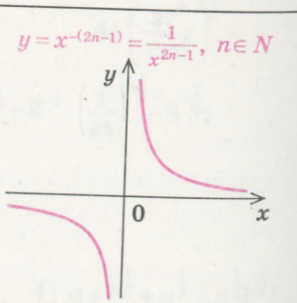




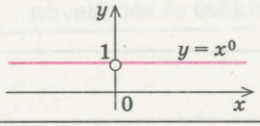
3. $y = x^\alpha$, α páratlan negatív szám







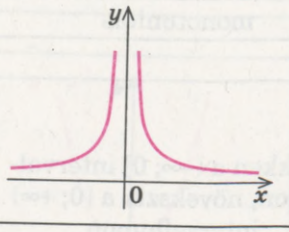
21. táblázat

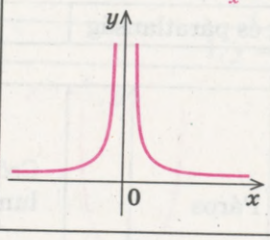
Különleges eset ($\alpha = 0$)			
Ha $\alpha = 0$, akkor $y = x^{\alpha} = x^0 = 1$ (ha $x \neq 0$)			
grafikonja és tulajdonságai			
Tulajdonságok			
$D(y)$	$E(y)$	párosság és páratlanság	monotonitás
($y = x^{2n}$, $n \in N$)			
R	$[0; +\infty)$	Páros	Csökken a $(-\infty; 0]$ intervallumon, növekszik a $[0; +\infty)$ intervallumon
($y = x$ és $y = x^{2n+1}$, $n \in N$)			
R	R	Páratlan	Növekvő
($y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, $n \in N$)			
$x \neq 0$	$y \neq 0$	Páratlan	Csökken a $(-\infty; 0)$ és a $(0; +\infty)$ intervallumok mindegyikén

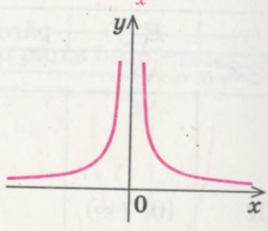
Az $y = x^\alpha$ (ha $\alpha \neq 0$) függvény

Grafikon

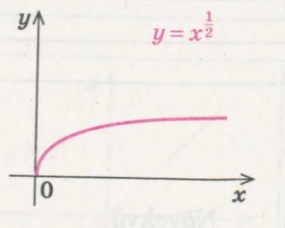
4. $y = x^\alpha$, α negatív páros szám

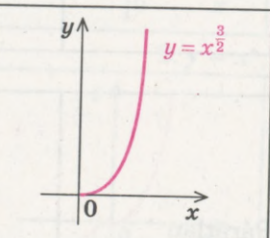


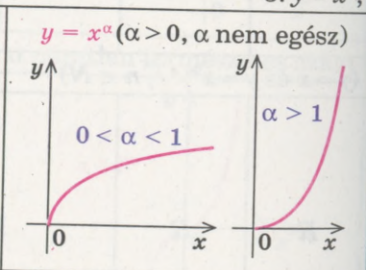




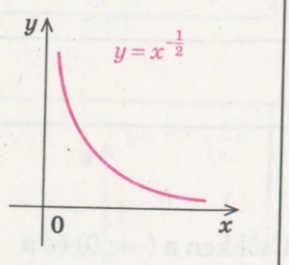
5. $y = x^\alpha$,

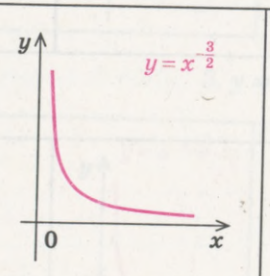


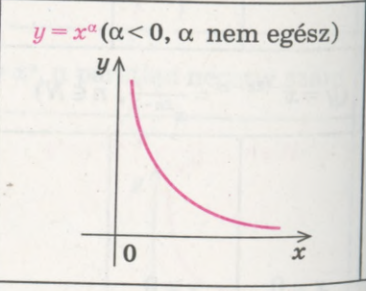




6. $y = x^\alpha$,







A 21. táblázat folytatása

grafikonja és tulajdonsága			
Tulajdonságok			
$D(y)$	$E(y)$	párosság és páratlanság	növekedés és csökkenés
$(y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}},\ n \in N)$			
$x \neq 0$	$(0; +\infty)$	Páros	Növekszik a $(-\infty; 0)$ intervallumon, csökken a $(0; +\infty)$ intervallumon
α pozitív nem egész szám			
$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Se nem páros, se nem páratlan	Növekvő
α negatív nem egész szám			
$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	Se nem páros, se nem páratlan	Csökkenő

Magyarázat és indoklás

Hatványfüggvénynek nevezzük az $y = x^\alpha$ alakú függvényt, ahol α tetszőleges valós szám.

A hatványfüggvénynek egyes fajtáival már a 7–9. osztályos algebrában megismerkedtetek. Ilyenek például az $y = x^1 = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ függvények. Bármilyen természetes α értékre a függvény grafikonja és tulajdonságai hasonlóak az $y = x^\alpha$ függvény ismert grafikonjaihoz és tulajdonságaihoz.

A hatványfüggvény tulajdonságainak megfogalmazásakor kiemeljük azokat a jellemzőket, melyeket az 1. fejezetben alkalmaztunk: 1) értelmezési tartomány; 2) értékkészlet; 3) párosság vagy páratlanság; 4) a koordinátatengelyekkel való metszéspontok; 5) előjeltartási intervallumok (előjelvizsgálat); 6) növekedési és fogyási intervallumok; 7) a függvény legnagyobb és legkisebb értékei (szélsőértékek).

1. Az $y = x^\alpha$ függvény (α páros természetes szám). Ha α páros természetes szám, akkor az $y = x^{2n}$, $n \in \boldsymbol{N}$ függvény és az $y = x^2$ függvény tulajdonságai és grafikonja teljesen hasonlók.

Valóban, az $y = x^{2n}$ függvény *értelmezési tartománya* $\boldsymbol{D}(y) = \boldsymbol{R}$, mivel a függvény értékei bármely x értékre meghatározható.

A függvény *páros*: ha $f(x) = x^{2n}$, akkor $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$. Tehát az $y = x^{2n}$ függvény grafikonja szimmetrikus az Oy tengelyre.

Mivel $x = 0$ esetén $y = 0$, ezért az $y = x^{2n}$ függvény grafikonja mindig áthalad a koordináta-rendszer kezdőpontján.

A $[0; +\infty)$ *intervallumon a függvény növekvő.*

Valóban, nemnegatív $x_2 > x_1$ ($x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$) értékekre azt kapjuk, hogy $x_2^{2n} > x_1^{2n}$, mivel ha a nemnegatív tagokból álló igaz egyenlőség mindkét oldalát páros hatványra emeljük (eközben megtartjuk az egyenlőtlenség jelét), akkor igaz egyenlőséget kapunk.○

A $(-\infty; 0]$ *intervallumon a függvény csökkenő.*

Valóban, a nem pozitív x_1 és x_2 ($x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$) értékekre, ha $x_2 > x_1$ akkor $-x_2 < -x_1$ (és most a $(-x_1 \geqslant 0, -x_2 \geqslant 0$). Ekkor $(-x_2)^{2n} < (-x_1)^{2n}$, tehát $x_2^{2n} < x_1^{2n}$, vagyis $f(x_2) < f(x_1)$.○

Ahhoz, hogy meghatározzuk az $y = x^{2n}$, $n \in \boldsymbol{N}$ függvény értékkészletét, felállítjuk az $x^{2n} = a$ egyenletet. Ennek csak $a \geqslant 0$ esetén van megoldása (ekkor $x = \pm\sqrt[2n]{a}$). Az összes ilyen szám fogja alkotni az értékkészletet. Tehát az adott függvény értékkészlete: $y \geqslant 0$, azaz $\boldsymbol{E}(y) = [0; +\infty)$. A függvény *legkisebb értéke* nullával egyenlő ($y = 0$, ha $x = 0$). *A függvénynek legnagyobb értéke nem létezik.*

Megjegyezzük még, hogy $x = 1$ esetén az y értéke: $y = 1^{2n} = 1$.

Figyelembe véve az $y = x^{2n}$, $n \in \boldsymbol{N}$ függvény tulajdonságait, megkapjuk a grafikonját (85. ábra).

2. Az $y = x^{\alpha}$ függvény (α páratlan természetes szám). Ha α páratlan természetes szám ($\alpha = 2n - 1$, $n \in \boldsymbol{N}$), akkor az $y = x^{2n-1}$, $n \in \boldsymbol{N}$ függvény és az $y = x^3$ függvény tulajdonságai teljesen hasonlók.

Valóban, az $y = x^{2n-1}$, $n \in \boldsymbol{N}$ függvény *értelmezési tartománya* a $\boldsymbol{D}(y) = \boldsymbol{R}$, mivel a függvény értéke az x bármely értékére meghatározható.

A függvény *páratlan*: ha $f(x) = x^{2n-1}$, akkor $f(-x) = (-x)^{2n-1} = -x^{2n-1} = -f(x)$. Tehát a függvény grafikonja szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára.

Mivel $x = 0$ esetén $y = 0$, ezért az $y = x^{2n-1}$ függvény grafikonja mindig átmegy a koordináta-rendszer kezdőpontján.

Az egész értelmezési tartományon a függvény növekvő.

Valóban, ha $x_2 > x_1$, akkor az $x_2^{2n-1} > x_1^{2n-1}$, mivel ha az igaz egyenlőtlenséget páratlan kitevőjű hatványra emeljük (az egyenlőtlenség jelének megtartásával), akkor igaz egyenlőséget kapunk. ○

Az $y = x^{2n-1}$, $n \in \boldsymbol{N}$ függvény értékkészletének meghatározásához felállítjuk az $x^{2n-1} = a$ egyenletet. Az egyenletnek bármely $a \in \boldsymbol{R}$ esetén van megoldása (ha $n = 1$, akkor az $x = a$-t kapjuk, és ha $n \neq 1$, $n \in \boldsymbol{N}$, akkor $x = \sqrt[2n-1]{a}$). Tehát a függvény értékkészlete: $y \in \boldsymbol{R}$, vagyis $\boldsymbol{E}(y) = \boldsymbol{R} = (-\infty; +\infty)$.

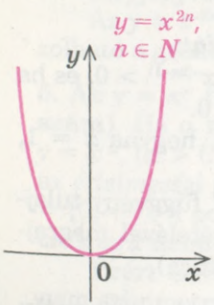
Ezért a függvénynek nincsenek szélsőértékei.

Előjeltartási intervallumok: ha $x > 0$, akkor $y = x^{2n-1} > 0$,
ha $x < 0$, akkor $y = x^{2n-1} < 0$.

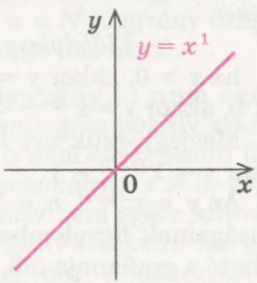
Még azt kell megjegyezni, ha $x = 1$, akkor az $y = 1^{2n-1} = 1$.

Az algebra és a mértan tananyagából már ismert, hogy az $y = x^1 = x$ grafikonja egy olyan egyenes, amely áthalad a koordináta-rendszer kezdőpontján (86. ábra). Az α egyéb páratlan értékeinél az $y = x^{2n-1}$, $n \in \boldsymbol{N}$ függvény grafikonja az $y = x^3$ (87. ábra) függvény grafikonjához fog hasonlítani.

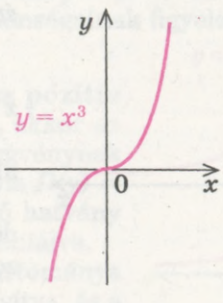
3. Az $y = x^{\alpha}$ függvény (α páratlan negatív szám). Ha az α páratlan negatív szám, akkor az $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in \boldsymbol{N}$ függvény, illetve az $y = \frac{1}{x}$ függvény tulajdonságai és grafikonja teljesen hasonlók.

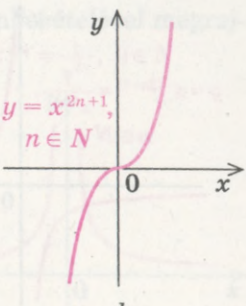


85. ábra



86. ábra





a b

87. ábra

Valóban, az $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$ függvény értelmezési tartománya: $x \neq 0$, vagyis

$\boldsymbol{D}(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, mivel a függvényérték az $x = 0$ kivételével bármely x-re meghatározható.

A függvény *páratlan*: $x \neq 0$ esetén, ha $f(x) = x^{-(2n-1)}$, akkor

$$f(-x) = (-x)^{-(2n-1)} = -x^{-(2n-1)} = -f(x).$$

Tehát a függvény grafikonja szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára.

Mivel $x \neq 0$ és $y \neq 0$ $\left(y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}} \neq 0\right)$, ezért az $y = x^{-(2n-1)}$ *függvény grafikonja nem metszi a koordinátatengelyeket.*

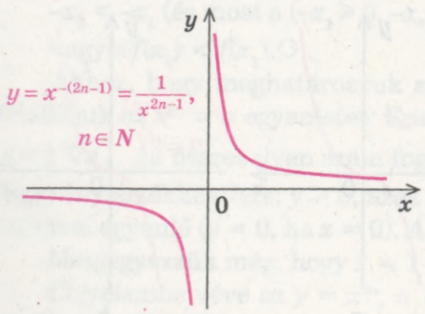
A $(0; +\infty)$ *intervallumon a függvény csökkenő.*

● Valóban, a pozitív $x_2 > x_1$ $(x_1 > 0, x_2 > 0)$ esetén adódik $x_2^{2n-1} > x_1^{2n-1}$, de ekkor $\frac{1}{x_2^{2n-1}} < \frac{1}{x_1^{2n-1}}$, tehát $x_2^{-(2n-1)} < x_1^{-(2n-1)}$. ○

A $(-\infty; 0)$ *intervallumon a függvény szintén csökkenő.* Ez abból következik, hogy a grafikon szimmetrikus a koordináta-rendszer kezdőpontjára.

● A tulajdonság analitikus magyarázata az előzőekhez hasonló: ha $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ és $x_2 > x_1$, akkor $-x_2 < -x_1$ (és ekkor $-x_1 > 0$, $-x_2 > 0$). Ekkor a fenti levezetés alapján $(-x_2)^{-(2n-1)} > (-x_1)^{-(2n-1)}$, tehát $-x_2^{-(2n-1)} > -x_1^{-(2n-1)}$. Innen következik, hogy $x_2^{-(2n-1)} < x_1^{-(2n-1)}$. ○

Ahhoz, hogy meghatározzuk az $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in \boldsymbol{N}$ függvény *értékkészletét*, felállítjuk az $x^{-(2n-1)} = a$, vagyis az $\frac{1}{x^{2n-1}} = a$ egyenletet. Az egyenletnek minden $a \neq 0$ esetén vannak megoldásai (akkor $x = \sqrt[2n-1]{\frac{1}{a}}$, ha $n \neq 1$ és $x = \frac{1}{a}$, ha $n = 1$). Tehát a függvény értékkészlete: az $y \neq 0$ kivételével valamennyi szám, vagyis $\boldsymbol{E}(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.



88. ábra

Ezért a függvénynek nincsenek szélsőértékei.

Előjelvizsgálat:

ha $x > 0$, akkor $y = x^{-(2n-1)} > 0$, és ha $x < 0$, akkor $y = x^{-(2n-1)} < 0$.

Megjegyezzük azt is, hogyha $x = 1$, akkor $y = 1^{-(2n-1)} = 1$.

Az $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in \boldsymbol{N}$ függvény tulajdonságainak figyelembevételével megrajzolható a grafikonja (88. ábra).

4. Az $y = x^{\alpha}$ függvény (α páros negatív szám). Ha α páros negatív szám, akkor az

$y = x^{-2n}$, $n \in \boldsymbol{N}$ függvény és az $y = \frac{1}{x^2}$ függvény tulajdonságai és grafikonja teljesen hasonlók.

Valóban, az $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$ függvény *értelmezési tartománya*: $x \neq 0$, vagyis $\boldsymbol{D}(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, mivel a függvényérték az $x = 0$ kivételével bármely x-re meghatározható.

A függvény *páros* $x \neq 0$ esetén, ha $f(x) = x^{-2n}$, akkor $f(-x) = (-x)^{-2n} = x^{-2n} = f(x)$. Tehát a függvény grafikonja szimmetrikus az Oy tengelyre.

Mivel $x \neq 0$ esetén $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}} > 0$, ezért az $y = x^{-2n}$ függvény *grafikonja nem metszi a koordinátatengelyeket.*

A $(0; +\infty)$ *intervallumon a függvény csökkenő.*

● Valóban, a pozitív $x_2 > x_1$ $(x_1 > 0, x_2 > 0)$ esetén $x_2^{2n} > x_1^{2n}$, de ekkor $\frac{1}{x_2^{2n}} < \frac{1}{x_1^{2n}}$, tehát $x_2^{-2n} > x_1^{-2n}$. ○

A $(-\infty; 0)$ *intervallumon a függvény növekvő.*

● Ez abból következik, hogy a grafikon szimmetrikus az Oy tengelyre. A tulajdonság analitikus magyarázata az előzőekhez hasonló: ha $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ és $x_2 > x_1$, akkor $-x_2 < -x_1$ (és ekkor $-x_1 > 0$, $-x_2 > 0$). Ekkor a fenti levezetés alapján $(-x_2)^{-2n} > (-x_1)^{-2n}$, tehát $x_2^{-2n} < x_1^{-2n}$. ○

Ahhoz, hogy meghatározzuk az $y = x^{-2n}$, $n \in \boldsymbol{N}$ függvény értékkészletét, felállítjuk az $x^{-2n} = a$, vagyis $\frac{1}{x^{2n}} = a$ egyenletet. Az egyenletnek minden $a > 0$ esetén vannak megoldásai (akkor $x = \pm\sqrt[2n]{\frac{1}{a}}$). Az összes ilyen szám alkotja a függvény értékkészletét. Tehát a *függvény értékkészlete*: $y > 0$, vagyis $\boldsymbol{E}(y) = (0; +\infty)$.

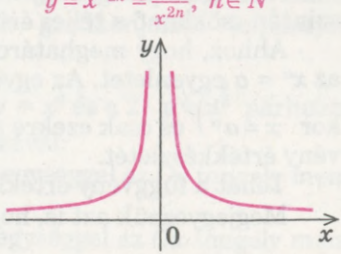
Ezért a függvénynek nincsenek szélsőértékei.

Megjegyezzük azt is, hogy $x = 1$ esetén $y = 1^{-2n} = 1$.

Az $y = x^{-2n}$, $n \in \boldsymbol{N}$ függvény tulajdonságainak figyelembevételével megrajzolható a grafikonja (89. ábra).

5. Az $y = x^{\alpha}$ függvény (α nem egész pozitív szám). Ha α nem egész pozitív szám, akkor az $y = x^{\alpha}$, ($\alpha > 0$, α nem egész szám) függvénynek az *értelmezési tartománya*: $x \geqslant 0$, vagyis $\boldsymbol{D}(y) = [0; +\infty)$, a pozitív nem egész kitevőjű hatvány csak az x nemnegatív értékeire van definiálva.

Ezért a függvény értelmezési tartománya nem szimmetrikus a 0 ponthoz viszonyítva, és a függvény *se nem páros, se nem páratlan.*



89. ábra

Mivel $x = 0$ esetén $y = 0$, ezért az $y = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$ *függvény grafikonja átmegy a koordináta-rendszer kezdőpontján.*

Ha $x > 0$, akkor a függvényérték: $y = x^\alpha > 0$.

Igazolható, hogy az $y = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$ *függvény növekvő a teljes értelmezési tartományán.*

Ahhoz, hogy meghatározzuk az $y = x^\alpha$ függvény értékkészletét, felállítjuk az $x^\alpha = a$ egyenletet. Az egyenletnek $a \geqslant 0$ esetén vannak megoldásai (ekkor $x = a^{\frac{1}{\alpha}}$) és csak ezekre az a értékekre. Az összes ilyen szám alkotja a függvény értékkészletét. Tehát a függvény értékkészlete: $y \geqslant 0$, vagyis $\boldsymbol{E}(y) = [0; +\infty)$.

Megjegyezzük azt is, hogyha $x = 1$, akkor $y = 1^\alpha = 1$.

Az $y = x^\alpha$ $(\alpha > 0$, α nem egész) függvény grafikonjának ábrázolásakor figyelembe kell azt is venni, hogyha $0 < \alpha < 1$, akkor a grafikonjának az alakja hasonló az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonjához (90. ábra)[1], és $\alpha > 1$ esetén a grafikon hasonló az $y = x^2$ grafikonjának jobb oldali ágához (91. ábra).

6. Az $y = x^\alpha$ függvény (α negatív nem egész szám). Ha α negatív nem egész szám, akkor az $y = x^\alpha$ $(\alpha < 0$, ahol α nem egész szám) függvénynek az értelmezési tartománya: $x > 0$ $(\boldsymbol{D}(y) = (0; +\infty))$, a negatív nem egész kitevőjű hatvány csak az x pozitív értékeire van definiálva.

Ezért a függvény értelmezési tartománya nem szimmetrikus a 0 pontra, és a függvény *se nem páros, se nem páratlan.*

Figyelembe véve, hogy $x > 0$ esetén a függvényérték $y = x^\alpha > 0$ (vagyis $x \neq 0$ és $y \neq 0$), azt kapjuk, hogy az $y = x^\alpha$ $(\alpha < 0)$ *függvény grafikonja nem metszi a koordinátatengelyeket.*

A $(0; +\infty)$ *intervallumon a függvény csökkenő*, vagyis pozitív x-re $(x_1 > 0$, $x_2 > 0)$ $x_2^\alpha < x_1^\alpha$ esetén egyenlőséget kapjuk.

Igazoljuk az állítást arra az esetre, ha az α negatív racionális nem egész szám $\left(\alpha = -\frac{m}{n}\right.$ nem egész szám, $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$). A pozitív x-re $(x_1 > 0, x_2 > 0)$ $x_2 > x_1$ esetén, figyelembe véve az $y = x^\alpha$ függvény vizsgálatának eredményeit, negatív és egész α értékekre az $x_2^{-m} < x_1^{-m}$ egyenlőtlenséget kapjuk. Figyelembe véve, hogy $y = \sqrt[n]{t}$ függvény pozitív t esetén növekvő, azt kapjuk, hogy $\sqrt[n]{x_2^{-m}} < \sqrt[n]{x_1^{-m}}$, tehát $x_2^{-\frac{m}{n}} < x_1^{-\frac{m}{n}}$. ○

Az is igazolható, hogy α negatív irracionális szám esetén az $y = x^\alpha$ függvény szintén csökkenő a teljes értelmezési tartományán (vagyis az $x > 0$ esetén).

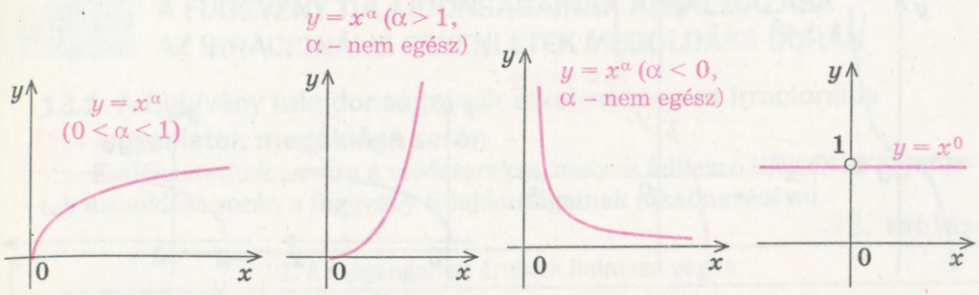
Ahhoz, hogy meghatározzuk az $y = x^\alpha$ függvény értékkészletét, felállítjuk az $x^\alpha = a$ egyenletet. Az egyenletnek bármely $a > 0$ esetén van megoldása (ekkor $x = a^{\frac{1}{\alpha}}$) és csak ezekre az a értékekre. Az összes ilyen szám alkotja a függvény értékkészletét.

Tehát a függvény értékkészlete: $y > 0$, vagyis $\boldsymbol{E}(y) = (0; +\infty)$.

Megjegyezzük azt is, hogyha $x = 1$, akkor $y = 1^\alpha = 1$.

---

[1] Erről részletesebben a 11. osztályban tanulunk.



90. ábra 91. ábra 92. ábra 93. ábra

Az $y = x^\alpha$ ($\alpha < 0$) függvény tulajdonságainak figyelembevételével megkapjuk a grafikonját (92. ábra)

Különleges eset. Ha $\alpha = 0$, akkor $x \neq 0$ esetén (mivel a 0^0 nincs értelmezve) az $y = x^\alpha = x^0 = 1$ függvény grafikonja az $y = 1$ egyenes, amelyhez a (0; 1) pont nem tartozik hozzá (93. ábra).

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát!

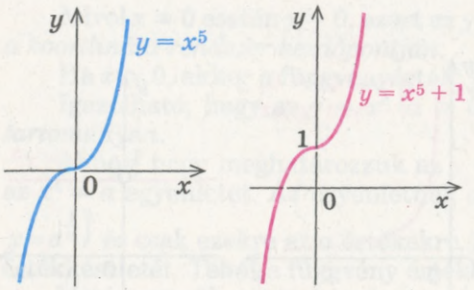
1) $y = (x-3)^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = (x+1)^{-\frac{1}{2}}$.

Megoldás	*Magyarázat*
1) ▶ $x - 3 \geqslant 0$, vagyis $x \geqslant 3$, tehát $D(y) = [3; +\infty)$. ◁	Figyelembe kell venni, hogy az $a^{\frac{1}{3}}$ kifejezés csak $a \geqslant 0$ esetén van értelmezve, az $a^{-\frac{1}{2}}$ kifejezés pedig csak az $a > 0$ esetén.
2) ▶ $x + 1 > 0$, vagyis $x > -1$, tehát $D(y) = (-1; +\infty)$. ◁	

2. példa. Ábrázoljuk a következő függvények grafikonjait:

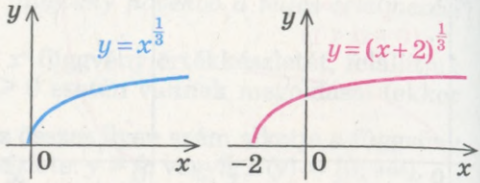
1) $y = x^5 + 1$; 2) $y = (x+2)^{\frac{1}{3}}$.!

Megoldás	*Magyarázat*
1) ▶ Először megrajzoljuk az $y = x^5$ függvény grafikonját (94. *a* ábra), majd párhuzamosan eltoljuk az *Oy* tengely mentén + 1 egységgel (94. *b* ábra). ◁	Az adott függvényeket az alábbi függvények grafikonjaiból kaphatjuk meg: az 1) $y = x^5$ és a 2) $y = x^{\frac{1}{3}}$ párhuzamos eltolásával: 1) +1 egységgel az *Oy* tengely mentén; 2) –2 egységgel az *Ox* tengely mentén.
2) ▶ Először megrajzoljuk az $y = x^{\frac{1}{3}}$ függvény grafikonját (95. *a* ábra), majd párhuzamosan eltoljuk az *Ox* tengely mentén –2 egységgel (95. *b* ábra). ◁	



a *b*

94. ábra



a *b*

95. ábra

Ellenőrző kérdések

1. A megfelelő függvények grafikonjainak alkalmazásával jellemezd az $y = x^\alpha$ függvény tulajdonságait, ha: 1) α páros természetes szám; 2) α páratlan természetes szám; 3) α negatív páratlan szám; 4) α negatív páros szám; 5) α negatív nem egész szám; 6) α pozitív nem egész szám!
2*. Magyarázd meg a hatványfüggvény tulajdonságait az 1. kérdés mindegyik esetére!

Gyakorlatok

1. Határozd meg a függvények értelmezési tartományát:

1°) $y = x^7$; 2°) $y = x^{-3}$; 3°) $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$;

4°) $y = x^{-\frac{2}{7}}$; 5) $y = (x^2 - x)^{\frac{5}{3}}$; 6) $y = (x^2 - x + 1)^{-\frac{9}{2}}$!

2. Ábrázold a függvények grafikonjait:

1°) $y = x^4$; 2°) $y = x^7$; 3) $y = x^{-3}$; 4) $y = x^{-4}$; 5) $y = x^{\frac{1}{4}}$;

6) $y = x^{\frac{5}{4}}$; 7) $y = (x+1)^4$; 8*) $y = x^{\frac{1}{5}} - 3$; 9*) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; 10*) $y = |x^5 - 1|$!

3. Készítsd el és hasonlítsd össze a függvények grafikonjait:

1) $y = \sqrt[3]{x}$ és $y = x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = \sqrt[4]{x}$ és $y = x^{\frac{1}{4}}$!

4. Oldd meg grafikusan a következő egyenleteket:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 6 - x$; 2) $x^{-\frac{1}{3}} = x^2$; 3) $x^{\frac{5}{2}} = 2 - x$; 4) $x^{-\frac{1}{4}} = 2x - 1$!

Ellenőrizd behelyettesítéssel, hogy x valóban gyöke az egyenletnek!

5*. Bizonyítsd be, hogy a 4. feladat egyenleteinek meghatározott gyökein kívül nincsenek más megoldásai!

13. §. A FÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAINAK ALKALMAZÁSA AZ IRRACIONÁLIS EGYENLETEK MEGOLDÁSA SORÁN

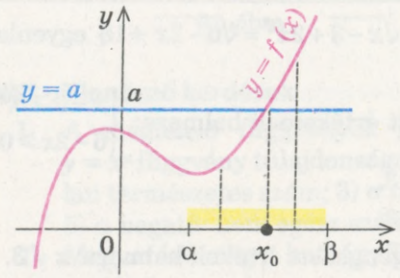
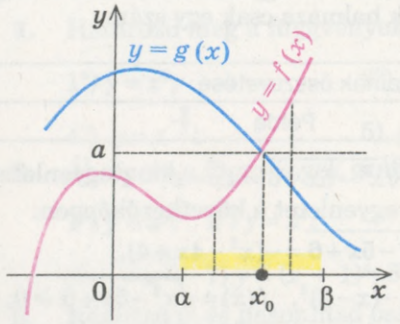
13.1. A függvény tulajdonságainak alkalmazása az irracionális egyenletek megoldása során

Emlékeztetünk azokra a módszerekre, melyek felhasználhatók az egyenletek megoldása során a függvény tulajdonságainak alkalmazásával.

22. táblázat

1. A megengedett értékek halmaza véges	
Útmutatás	Példa
Ha az egyenlet (egyenlőtlenség vagy rendszer) megengedett értékeinek halmaza véges számú elemekből áll, akkor a megoldáshoz elegendő ellenőrizni mindegyik értéket.	Oldjuk meg az $\sqrt{x-3}+2x^2=\sqrt[4]{6-2x}+18$ egyenletet! ▶ Megengedett értékeinek halmaza: $\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\6-2x\geqslant 0.\end{cases}$ Akkor $\begin{cases}x\geqslant 3,\\x\leqslant 3.\end{cases}$ Tehát a megengedett értékek halmaza: $x=3$. *Ellenőrzés.* $x=3$ $\left(\sqrt{0}+18=\sqrt[4]{0}+18;18=18\right)$ gyöke az egyenletnek. Más gyöke nem lehet az egyenletnek, mert a megengedett értékek halmaza csak egy szám. *Felelet:* 3. ◁
2. Az egyenlet bal és jobb oldalainak összevetése	
Útmutatás	Példa
$\begin{array}{\|c\|}\hline f(x)=g(x)\\\hline f(x)\geqslant a,\\\hline g(x)\leqslant a\\\hline\end{array}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=a,\\g(x)=a\end{cases}$ **Ha az $f(x)=g(x)$ egyenlet megoldása során kiderül, hogy $f(x)\geqslant a$ és $g(x)\leqslant a$, akkor az egyenlet bal és a jobb oldalai csak abban az esetben lehetnek egyenlők, ha az $f(x)$ és a $g(x)$ egyidejűleg egyenlők a-val.**	Oldjuk meg az $\sqrt{x^2-5x+6}=4x-x^2-4$ egyenletet! ▶ Írjuk fel az egyenletet a következőképpen: $\sqrt{x^2-5x+6}=-(x^2-4x+4),$ $\sqrt{x^2-5x+6}=-(x-2)^2,\ f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}\geqslant 0,$ $g(x)=-(x-2)^2\leqslant 0.$ Tehát az adott egyenlet ekvivalens a következő rendszerrel: $\begin{cases}\sqrt{x^2-5x+6}=0,\\-(x-2)^2=0.\end{cases}$ A második egyenletből adódik, hogy $x=2$, ami kielégíti az első egyenletet is. *Felelet:* 2. ◁

A 22. táblázat folytatása

3. A függvény monotonitásának alkalmazása	
Az egyenlet megoldásának sémája	
1. Kikeressük az egyenlet egy vagy néhány gyökét. 2. *Bebizonyítjuk, hogy az egyenletnek nem lehetnek más gyökei* (felhasználjuk az egyenlet gyökeiről szóló tételt vagy az egyenlet bal és a jobb oldalának az összevetését).	
	Tétel az egyenlet gyökeiről 1. **Ha az $f(x) = a$ egyenletben az $f(x)$ függvény növekvő (csökkenő) egy bizonyos intervallumon, akkor ennek az egyenletnek nem lehet egynél több gyöke az adott intervallumon.** **Példa** Az $\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}=3$ egyenletnek az $x = 1$ $(\sqrt{1}+2\cdot\sqrt[3]{1}=3$, vagyis $3 = 3)$ az egyetlen gyöke, mivel az $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$ függvény növekvő (az egész értelmezési tartományán $x \geqslant 0$), mint két növekvő függvény összege.
	2. **Ha az $f(x) = g(x)$ egyenletben az $f(x)$ függvény növekvő egy bizonyos intervallumon, ugyanakkor a $g(x)$ függvény csökkenő ugyanezen az intervallumon (vagy fordítva), akkor ennek az egyenletnek nem lehet egynél több gyöke az adott intervallumon.** **Példa** A $\sqrt{x}=6-x$ egyenletnek az $x=4$ $(\sqrt{4}=6-4,\ 2=2)$ az egyetlen gyöke, mivel az $f(x)=\sqrt{x}$ növekvő (ha $x \geqslant 0$), a $g(x) = 6 - x$ függvény pedig csökkenő.

Magyarázat és indoklás

1. A megengedett értékek halmaza végességének alkalmazása az irracionális egyenletek megoldása során. Az irracionális egyenletek megoldásának eddig megismert módszerei: a) az egyenletek ekvivalens átalakítása; 2) vagy olyan egyenlet-következmények kialakítása, amelyek segítségével az eredeti egyenlet racionális egyenletté alakítható. Néha azonban előfordul, hogy a kapott racionális egyenletnek nagyon bonyolult a megoldása. Például a 21.

táblázat 1. pontjában található $\sqrt{x-3}+2x^2=\sqrt[4]{6-2x}+18$ egyenlet a következőképpen alakítható át racionális egyenletté: az egyenlőség egyik oldalán elkülönítjük a $\sqrt[4]{6-2x}$ kifejezést, majd negyedik hatványra emeljük az egyenlet mindkét oldalát; ezután a $\sqrt{x-3}$, kifejezést különítjük el az egyik oldalon, és mindkét oldalát négyzetre emeljük. Végül egy 16-odfokú egyenletet kapunk. Ezekben az esetekben olyan ismert módszereket alkalmazunk, amelyekben az egyenletmegoldás a függvények tulajdonságainak alkalmazásával történik. A vizsgált egyenlet megengedett értékeinek halmaza a következő feltételekből határozható meg: $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 6-2x\geqslant 0. \end{cases}$ Innen az következik, hogy az egyenlet megengedett értékeinek halmaza egyetlen, $x = 3$ értékből áll. Mivel az egyenlet bármelyik gyökének hozzá kell tartoznia a megengedett értékek halmazához, ezért elegendő ellenőrizni azt, hogy azok a számok, melyek a megengedett értékek halmazát alkotják, gyökei-e az adott egyenletnek. Az ellenőrzés igazolja, hogy $x = 3$ gyöke az egyenletnek. Más gyöke nem lehet, mivel a megengedett értékek halmaza csak az $x = 3$ számból áll.

Megjegyezzük, **hogyha a megengedett értékek halmaza üres halmaz (egyetlen eleme sincs)**, akkor ellenőrzés nélkül megadhatjuk a feleletet, hogy **az egyenletnek nincsenek gyökei**. Ha például meg kell oldani az $\sqrt{x-3}=\sqrt[6]{2-x}+5x$ egyenletet, akkor itt az egyenlet megengedett értékeinek halmaza a következő rendszerrel adható meg: $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 2-x\geqslant 0, \end{cases}$ vagyis $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$ melynek nincs megoldása. Tehát az adott egyenlet megengedett értékeinek halmaza egyetlenegy elemet sem tartalmaz, ezért az egyenletnek nincsenek gyökei.

2. Az egyenlet bal és jobb oldalának összevetése. Azokban az esetekben, amikor az irracionális egyenlet megoldása egy bonyolult racionális egyenlethez vezet (vagy egyáltalán nem alakítható racionális egyenletté), akkor érdemes összevetni az egyenlet bal, illetve jobb oldalán álló függvények értékeit.

Tekintsük a

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x+1}=1 \qquad (1)$$

egyenletet. Először meghatározzuk megengedett értékeinek halmazát: $x \geqslant 0$, majd ekvivalens átalakításokkal $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=1-\sqrt[8]{x+1}$ alakra hozzuk. Az utóbbi egyenlet bal oldalán álló függvény az egész értelmezési tartományán: $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\geqslant 0$; a jobb oldalán álló függvény az egész értelmezési tartományán: $g(x)=1-\sqrt[8]{x+1}\leqslant 0$, mivel $x \geqslant 0$ esetén $\sqrt[8]{x+1}\geqslant 1$). A bal és a jobb oldal egyenlősége csak abban az esetben lehetséges, ha egyidejűleg mind a kettő nullával egyenlő. Tehát az (1) egyenlet ekvivalens a következő rendszerrel:

$$\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{cases} \text{ vagyis } \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=0, \\ 1-\sqrt[8]{x+1}=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Először megoldjuk a rendszer első egyenletét. Vegyük figyelembe, hogy $\sqrt{x} \geqslant 0$ és $\sqrt[4]{x} \geqslant 0$. **Két nemnegatív függvény összege akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha mind a két összeadandó nullával egyenlő.** Tehát a $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=0$ egyenlet ekvivalens a $\begin{cases}\sqrt{x}=0,\\ \sqrt[4]{x}=0,\end{cases}$ egyenletrendszerrel, melynek egyetlen megoldása van, az $x = 0$.

Ez a megoldás kielégíti a (2) rendszer második egyenletét is (valóban: $1-\sqrt[8]{0+1}=0$, $0 = 0$), tehát a (2) rendszernek szintén csak egy megoldása van, az $x = 0$. Ily módon az (1) egyenletnek is egyetlen megoldása van, az $x = 0$.

3. A függvény monotonitásának alkalmazása. Létezik még egy megoldási módszere azoknak az irracionális egyenleteknek, melyek csak bonyolult racionális egyenletekké alakíthatók: ez a megfelelő függvények növekedésének vagy fogyásának alkalmazása. Leggyakrabban ezt a következő séma alkalmazásával valósítjuk meg:

1) *kikeressük az egyenlet egy vagy néhány megoldását*;
2) *bebizonyítjuk, hogy az egyenletnek nem lehetnek más gyökei.*

A megfelelő tulajdonságok magyarázata az 1. fejezet 3. 2. pontjában található. Az irracionális egyenletek e módszerrel történő megoldására a 22. táblázatban találunk mintapéldát.

Gyakorlatok

Oldd meg az **(1–4.)** egyenleteket és az **(5.)** egyenletrendszert a megfelelő függvénytulajdonságok alkalmazásával!

1. 1) $\sqrt[6]{x^2-1}+x^2=\sqrt[4]{2-2x^2}+x+2$;

2) $2x+\sqrt{x^2-5x+6}=x^2+\sqrt[8]{10x-2x^2-12}-3$.

2. 1) $\sqrt[4]{16+x^2}=2-\sqrt{x^3+x}$;

2) $1+|x-\sqrt{x}|=\sqrt[6]{1-|x|}$;

3) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=1-x-x^2$;

4) $\sqrt[4]{x-2}+\frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}=2-|x-3|$.

3. 1) $\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x^2-1}+\sqrt[6]{x^3-1}=0$;

2) $|\sqrt{x}-2|+|\sqrt{y}-5|+\sqrt[4]{xy-100}=0$.

4. 1) $\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x}=3$;

2) $\sqrt[4]{x+12}+\sqrt[3]{x-3}=3$;

3) $2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x+2}=6-\sqrt[4]{8x}$;

4) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}=\frac{2}{x}$.

5. 1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=\sqrt{y}+\sqrt[3]{y},\\ 2\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=2;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^3-\sqrt[3]{y}=y^3-\sqrt[3]{x},\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4.\end{cases}$

13.2. Példák az irracionális egyenletek más módszerekkel történő megoldására

Ha az irracionális egyenletek megoldása során egyenlet-következményeket alkalmazunk (mint a 11. §-ban), akkor a megoldásokat mindenképpen ellen-

őrizni kell. De azokban az esetekben, amikor a megoldás során nem racionális számokat kapunk, akkor a kapott megoldások visszahelyettesítése az eredeti egyenletbe elég bonyolult és munkaigényes feladat. Az ilyen egyenleteknél érdemes minden lépésnél ekvivalens átalakításokat alkalmazni. Eközben tartsuk szem előtt, hogy az egyenlet vagy az egyenlőtlenség (3.1. pont) minden ekvivalens átalakítása csak a megengedett értékek halmazán hajtható végre, ezért az irracionális egyenletek ekvivalens átalakításakor figyelembe kell vennünk az adott egyenlet megengedett értékeinek halmazát is. Ezekben az esetekben az alábbi gondolatmenet szerint járunk el: *minden gyök esetén az adott egyenlet bal és jobb oldalának az előjelei is megegyeznek*, mivel ha az egyenlet gyökeit visszahelyettesítjük az eredeti egyenletbe, akkor igaz egyenlőséget kapunk. Az utóbbi gondolatmenet alkalmazásával gyakran kapunk plusz kikötést az adott egyenlet gyökeire, és ilyenkor az ekvivalens átalakításokat nem a teljes megengedett értékek halmazán kell végrehajtani, hanem csak egy bizonyos részén.

1. példa. Oldjuk meg a $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}=1$ egyenletet!

Megoldás

▶ A megengedett értékek halmaza:

$$\begin{cases} 2x+1 \geqslant 0, \\ x+1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x \geqslant -\frac{1}{2}$.

A megengedett értékek halmazán az adott egyenlet ekvivalens a következő egyenlettel:

$$\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+1},$$

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2,$$

$$2x+1=1+2\sqrt{x+1}+x+1,$$

$$x-1=2\sqrt{x+1}. \qquad (1)$$

Az (1) egyenlet mindegyik gyökére teljesül az

$$x-1 \geqslant 0 \text{ kikötés.} \qquad (2)$$

E kikötés alapján az (1) egyenlet ekvivalens a következő egyenlettel:

$$(x-1)^2=\left(2\sqrt{x+1}\right)^2,$$

$$x^2-2x+1=4(x+1),$$

$$x^2-6x-3=0.$$

Ekkor $x=3\pm 2\sqrt{3}$.

Magyarázat

Végrehajtjuk az adott egyenlet ekvivalens átalakítását.

Tekintve, hogy minden ekvivalens átalakítást az adott egyenlet megengedett értékeinek halmazán hajtunk végre, ezért a megengedett értékek halmazát rögzítjük.

A $\left(-\sqrt{x+1}\right)$ kifejezést ellenkező előjellel átvisszük az egyenlet bal oldaláról a jobb oldalára. Ekkor az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk.

Mivel a $\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+1}$ egyenlet mindkét része nemnegatív, ezért ha négyzetre emeljük mindkét oldalát, akkor az adott egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk, amely ekvivalens az (1) egyenlettel.

Mindegyik gyök az (1) egyenletet igaz számegyenlőséggé alakítja. Az egyenlőség jobb oldala nemnegatív szám $\left(2\sqrt{x+1} \geqslant 0\right)$, ezért a bal oldal értéke is nemnegatív szám, vagyis $x-1 \geqslant 0$ minden gyökre nézve.

$x_1 = 3 + 2\sqrt{3}$ a megengedett értékek halmazához tartozik és kielégíti a (2) kikötést is, tehát az adott egyenlet gyöke lesz;

$x_2 = 3 - 2\sqrt{3}$ a megengedett értékek halmazához tartozik, de nem elégíti ki a (2) kikötést, tehát nem gyöke az adott egyenletnek.

Felelet: $3 + 2\sqrt{2}$. ◁

Akkor a (2) kikötés alapján az (1) egyenlet mindkét oldala nemnegatív, ezért ha mindkét oldalát négyzetre emeljük, akkor ekvivalens egyenletet kapunk.

De miután meghatároztuk az egyenlet gyökeit, nem csak azt kell leellenőrizni, hogy a megengedett értékek halmazához tartoznak-e ezek a gyökök, hanem ellenőrizni kell a (2) kikötés teljesülését is. Ehhez az ellenőrzéshez elegendő a gyökök közelítő értékeit venni $x_1 \approx 6{,}4$ és $x_2 \approx -0{,}4$.

2. példa. Oldjuk meg az $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x+2$ egyenletet!

Magyarázat

A $\sqrt{x-1} = t$ helyettesítéssel könnyű belátnunk, hogy mindegyik kifejezés, amely a külső gyök alatt áll, egy kéttagú kifejezés négyzete.

A $\sqrt{a^2} = |a|$ képlet felhasználásával egy abszolútértékes egyenletet kapunk, amelynek megoldása a következő lépések alkalmazásával történik:

1) *meghatározzuk a megengedett értékek halmazát;*
2) *meghatározzuk a gyök alatti függvények zérushelyeit;*
3) *megjelöljük a zérushelyeket a megengedett értékek halmazán, majd ez alapján intervallumokra osztjuk;*
4) *meghatározzuk mindegyik intervallumban az egyenlet gyökeit.*

Megoldás

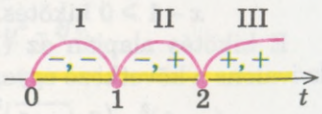
▶ Legyen $\sqrt{x-1} = t$, ahol $t \geqslant 0$. Ekkor $x - 1 = t^2$; $x = t^2 + 1$.

Megkapjuk a $\sqrt{t^2+4-4t} + \sqrt{t^2+1-2t} = t^2+3$ egyenletet,

melyet így is felírhatunk: $\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-1)^2} = t^2+3$. Innen

$$|t-2| + |t-1| = t^2 + 3. \qquad (1)$$

1) Az (1) egyenlet megengedett értékeinek halmaza: $t \in \boldsymbol{R}$, de a feladat feltétele szerint megoldani csak a $t \geqslant 0$ esetére kell.
2) Az abszolútérték jelei alatt a zérushelyek: $t = 2$ és $t = 1$.
3) A zérushelyek a $t \geqslant 0$ tartományt három részre osztják, melyek mindegyikében az abszolútértékes-függvények előjelei állandók (96. ábra).



96. ábra

I. intervallum. Ha $t \in [0; 1]$, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$-(t-2) - (t-1) = t^2 + 3.$$

Ekkor a $t^2 + 2t = 0$, innen $t = 0$ vagy $t = -2$, de csak a $t = 0$ tartozik a $[0; 1]$ intervallumhoz.

II. intervallum. Ha $t \in [1; 2]$, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$-(t-2) + (t-1) = t^2 + 3.$$

Ez egyenértékű a $t^2 = -2$ egyenlettel, melynek nincsenek gyökei. Tehát az $[1; 2]$ intervallumban nincs megoldása az egyenletnek.

III. intervallum. Ha $t \in [2; +\infty)$, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$(t-2) + (t-1) = t^2 + 3.$$

Ez egyenértékű a $t^2 - 2t + 6 = 0$ egyenlettel, melynek nincsenek gyökei. Tehát a $[2; +\infty)$ intervallumban nincs megoldása az egyenletnek.

Egyesítve a kapott eredményeket, levonhatjuk a következtetést, hogy az (1) egyenletnek csak egy megoldása van, ez a $t = 0$.

A visszahelyettesítés után a $\sqrt{x-1} = 0$ egyenletet kaptuk, melyből $x = 1$.

Felelet: 1. ◁

3. példa. Oldjuk meg az $\sqrt[3]{(x-6)^2} - 3\sqrt[3]{(x-6)(2x+3)} + 2\sqrt[3]{(2x+3)^2} = 0$ egyenletet!

Megoldás

▶ Mivel $x = 6$ nem gyöke az adott egyenletnek, ezért az egyenlet mindkét oldalát a $\sqrt[3]{(x-6)^2} \neq 0$ kifejezéssel osztva az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk.

$$1 - 3\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}} + 2\sqrt[3]{\left(\frac{2x+3}{x-6}\right)^2} = 0.$$

A $t = \sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}$ helyettesítés után a $2t^2 - 3t + 1 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei:

$$t_1 = 1, \; t_2 = \frac{1}{2}.$$

A visszahelyettesítés után azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}} = 1 \text{ vagy } \sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2x+3}{x-6} = 1 \text{ vagy } \frac{2x+3}{x-6} = \frac{1}{8},$$

$$x = -9 \text{ vagy } x = -2.$$

Felelet: -9; -2. ◁

Magyarázat

A $\sqrt[3]{x-6} = u$, $\sqrt[3]{2x+3} = v$ helyettesítések végrehajtása után az $u^2 - 3uv + 2v^2 = 0$ egyenletet kapjuk, melynek *minden tagja másodfokú*[1]. Az ilyen egyenleteket *homogén* egyenleteknek nevezzük, és úgy oldjuk meg, hogy *az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk az egyik változó legmagasabb hatványával*. Elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát u^2-tel (vagyis $\sqrt[3]{(x-6)^2}$-tel).

Hogy a változót tartalmazó kifejezéssel történő osztás során ne történjen gyökvesztés, ahhoz a változó azon értékeit, melyeknél a kifejezés nulla, külön esetként kell vizsgálni. Az adott esetben az $x = 6$-ot kell behelyettesíteni az adott egyenletbe (ezt szóban is megtehetjük, a megoldáshoz csak a kapott eredményt írjuk fel).

E megoldási módszer alkalmazásakor, nem kell feltétlen bevezetni az u és v változókat: elegendő megjegyezni, hogy az adott egyenlet homogén, elosztva mindkét oldalát a $\sqrt[3]{(x-6)^2}$-tel, majd bevezetni egy új t változót.

[1] A homogén egyenletek meghatározásában nem fordítanak figyelmet a 0-ra, melynek nincs hatványkitevője.

Ellenőrző kérdések

1. Magyarázd meg, milyen kikötéseket kell tenni az x változóra, hogy ekvivalens átalakításokkal oldhassuk meg a $\sqrt{x-2}=x-6$ egyenletet!
2. Hozz fel példákat homogén irracionális egyenletekre! Állíts össze tervet az egyenlet megoldására!

Gyakorlatok

1. Oldd meg az irracionális egyenleteket ekvivalens átalakítások alkalmazásával:

1) $\sqrt{3x-2}=5-x$;
2) $\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=1$;
3) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$;
4) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$!

Oldd meg a **(2–5.)** egyenleteket!

2. 1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x+1$; 2) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$.

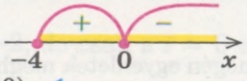
3. 1) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$; 2) $x^2+x\sqrt{x+1}-2(x+1)=0$.

4. 1) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}=\sqrt[4]{x^2-3x+2}$; 2) $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$.

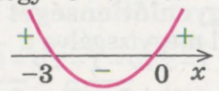
5. 1) $\frac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\frac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{3}$.

14. §. IRRACIONÁLIS EGYENLŐTLENSÉGEK

23. táblázat

Útmutatás	Példa
1. Intervallum-módszer (az $f(x) \gtrless 0$ alakú egyenlőtlenségekre)	
1) Meghatározzuk az egyenlőtlenség megengedett értékeinek a halmazát. **2) Meghatározzuk az $f(x)$ függvény zérushelyeit ($f(x)=0$).** **3) Megjelöljük a zérushelyeket a megengedett értékek halmazán és megállapítjuk mindegyik kapott intervallumban a függvény előjeleit.** **4) Az egyenlőtlenség jelének figyelembevételével felírjuk a feleletet.**	Oldjuk meg a $\sqrt{x+4}>x+2$ egyenlőtlenséget. ▶ Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a $\sqrt{x+4}-x-2>0$ egyenlőtlenséggel. Végezzük el a következő helyettesítést: $f(x)=\sqrt{x+4}-x-2$. A megengedett értékek halmaza: $x+4\geqslant 0$, vagyis $x\geqslant -4$. Az $f(x)$ zérushelyei: $\sqrt{x+4}-x-2=0$, $\sqrt{x+4}=x+2$, $x+4=x^2+4x+4$, $x^2+3x=0$, $x_1=0$ gyöke az egyenletnek, az $x_2=-3$ pedig hamis gyöke az egyenletnek. Megjelöljük a zérushelyeket a megengedett értékek halmazán, és meghatározzuk az $f(x)$ függvény előjeleit mindegyik intervallumban.  *Felelet:* $[-4;\ 0)$. ◁

A 23. táblázat folytatása

2. Ekvivalens átalakítások	
1) Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát páratlan kitevőjű hatványra emeljük (az egyenlőtlenség irányát megtartva), akkor az adott egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk (az adott egyenlet megengedett értékeinek a halmazán).	Oldjuk meg a $\sqrt[3]{x+2}<-1$ egyenlőtlenséget. ▶ A megengedett értékek halmaza: $x \in \boldsymbol{R}$. Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a $\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3<(-1)^3$, $x+2<-1$, $x<-3$ egyenlőtlenségekkel. *Felelet:* $(-\infty; -3)$. ◁
2) Ha az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, akkor mindkét oldalát páros kitevőjű hatványra emelve (az egyenlőtlenség irányát megtartva) az adott egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk (az adott egyenlet megengedett értékeinek a halmazán).	Oldjuk meg a $\sqrt[4]{2x-6}<1$ egyenlőtlenséget. ▶ A megengedett értékek halmaza: $2x-6\geqslant 0$, vagyis $x\geqslant 3$. Az adott egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, tehát a megengedett értékeinek a halmazán ekvivalens a következő egyenlőtlenségekkel: $\left(\sqrt[4]{2x-6}\right)^4<1^4$, $2x-6<1$, $x<\frac{7}{2}$. Figyelembe véve a megengedett értékeinek halmazát $3\leqslant x<\frac{7}{2}$. *Felelet:* $\left[3; \frac{7}{2}\right)$. ◁
3) Ha az adott egyenlőtlenség valamelyik része mind pozitív mind negatív értéket is felvehet, akkor, mielőtt mindkét oldalát páros kitevőjű hatványra emelnénk, ezeket az eseteket külön kell vizsgálni. Például: $\sqrt[2k]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geqslant 0,\\ f(x)>g^{2k}(x)\end{cases}$ vagy $\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)<0.\end{cases}$ $\sqrt[2k]{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g^{2k}(x)\end{cases}$	Oldjuk meg a $\sqrt{x+4}>x+2$ egyenlőtlenséget. ▶ Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a következő rendszerek összességével: $\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ \left(\sqrt{x+4}\right)^2>(x+2)^2\end{cases}$ vagy $\begin{cases}x+4\geqslant 0,\\ x+2<0.\end{cases}$ Akkor $\begin{cases}x\geqslant -2,\\ x^2+3x<0\end{cases}$ vagy $\begin{cases}x\geqslant -4,\\ x<-2.\end{cases}$ Megoldva az $x^2+3x<0$ egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy $-3<x<0$.  Az $x\geqslant -2$ egyenlőtlenség figyelembevételével megkapjuk az első rendszer megoldását: $-2\leqslant x<0$. A második rendszer megoldása: $-4\leqslant x<-2$. A feleletet e két megoldás egyesítésével kapjuk meg. *Felelet:* $[-4; 0)$. ◁

Magyarázat és indoklás

1. Az irracionális egyenlőtlenségek megoldása intervallum-módszerrel. Az egyenlőtlenségek intervallum-módszerrel történő megoldásának általános sémáját a 4. §. 1. fejezetében ismertettük. Példák – az irracionális egyenlőtlenségek megoldásának intervallum-módszerrel történő alkalmazására – a 23. táblázatban találhatók.

2. Az irracionális egyenlőtlenségek megoldása ekvivalens átalakításokkal. Az irracionális egyenlőtlenségek megoldása során a leggyakrabban alkalmazott ekvivalens átalakítás: az egyenlőtlenség mindkét oldalának ugyanarra a hatványkitevőre történő emelése. Az átalakítás során racionális egyenletet kapunk. Eközben a következő tulajdonságokat kell figyelembe venni.

1) Az egyenlőtlenség mindkét oldalának páratlan kitevőjű hatványra emelésekor a következő tulajdonságot alkalmazzuk: *az $A > B$ és az $A^{2k+1} > B^{2k+1}$ számegyenlőtlenségek vagy egyidejűleg teljesülnek, vagy egyidejűleg nem teljesülnek.*
Ekkor az
$$f(x) > g(x) \tag{1}$$
egyenlőtlenség mindegyik megoldása (amely igaz számegyenlőtlenséggé alakítja ezt az egyenlőtlenséget) egyúttal az
$$f^{2k+1}(x) > g^{2k+1}(x) \tag{2}$$
egyenlőtlenségnek is megoldása, és viszont, a (2) egyenlőtlenség mindegyik megoldása az (1) egyenlőtlenségnek is megoldása, vagyis az (1) és (2) egyenlőtlenségek ekvivalensek. Tehát **az egyenlőtlenség mindkét oldalának páratlan kitevőjű hatványra emelése során** (az egyenlőtlenség irányát megtartva) **az adott egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk (az adott egyenlőtlenség megengedett értékeinek a halmazán).**
Például,
$$\sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x)$$

2) Hasonlóképpen, *ha az A és B számok nemnegatívak ($A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$), akkor az $A > B$ és az $A^{2k} > B^{2k}$ számegyenlőtlenségek ugyanígy vagy egyidejűleg teljesülnek, vagy egyidejűleg nem teljesülnek.* Az előző gondolatmenetet megismételve kapjuk: **ha az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, akkor ezeket páros kitevőjű hatványra emelve (megtartva az egyenlőtlenség jelét), az adott egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk (a megengedett értékek halmazán).**
Például megvizsgálva a
$$\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \tag{3}$$
egyenlőtlenséget a megengedett értékeinek a halmazán, könnyen belátjuk, hogy a (3) egyenlőtlenség minden megoldásánál a bal oldala nemnegatív (a $\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant 0$) számtani gyök) és a (3) egyenlőtlenség csak a
$$g(x) > 0 \tag{4}$$
feltétel mellett teljesülhet.

A (4) feltétel teljesülése esetén a (3) egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, és $2k$ páros kitevőjű hatványra emelve az $f(x) < g^{2k}(x)$ egyenlőtlenséget kapjuk (természetesen az adott egyenlőtlenség megengedett értékei halmazának, illetve (4) feltétel figyelembevételével). Tehát

$$\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x) \end{cases}$$

3) Ha ekvivalens átalakításokkal szeretnénk megoldani a

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \tag{5}$$

egyenlőtlenséget az alaphalmazán, ahol az $f(x) \geqslant 0$, akkor az egyenlőtlenség jobb oldalára nézve két esetet kell megvizsgálni: a) $g(x) < 0$; b) $g(x) \geqslant 0$.

a) $g(x) < 0$ esetén az (5) egyenlőtlenség minden olyan x-re teljesül, amely az alaphalmazhoz tartozik, vagyis ha $f(x) \geqslant 0$.

b) $g(x) \geqslant 0$ esetén az (5) egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, és páros $2k$-adik kitevőjű hatványra emelés során az adott egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk:

$$f(x) > g^{2k}(x). \tag{6}$$

Figyeljük meg, hogy a (6) egyenlőtlenség mindegyik megoldása esetén az alaphalmazra vonatkozó $f(x) \geqslant 0$ korlátozás automatikusan teljesül; tehát $g(x) \geqslant 0$ esetén elég felírni a (6) egyenlőtlenséget.

A kapott eredményeket egyesítve a következő megállapításokra jutunk:

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}!$$

Magyarázat

Egyenlőtlenségünket $f(x) > 0$ alakra hozzuk, majd megoldjuk intervallummódszerrel.

Az $f(x)$ függvény zérushelyeinek meghatározásához egyenlet-következményeket alkalmazunk. A hamis gyökök kizárását a megoldás ellenőrzésével érjük el.

Megoldás

▶ Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} > 0$ egyenlőtlenséggel. Használjuk az $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1}$ jelölést.

1. A megengedett értékek halmaza: $\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0, \\ 2x-1 \geqslant 0. \end{cases}$ Ekkor $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 1, \\ x \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$ vagyis $x \geqslant 1$.

2. Az $f(x)$ függvény zérushelyei: $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=0$. Ekkor:

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1},\ (\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})^2=(\sqrt{2x-1})^2,$$

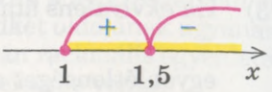
$$x+3-2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1}+x-1=2x-1,\ 2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1}=3.$$

Emeljük négyzetre az utolsó egyenlet mindkét oldalát:

$$4(x+3)(x-1)=9,\ 4x^2+8x-21=0,$$

$x_1=\frac{3}{2}=1{,}5$ gyöke az egyenletnek, $x_2=-\frac{7}{2}$ hamis gyök.

3. Az 1,5 ponttal a megengedett értékek halmazát két intervallumra osztjuk és meghatározzuk mindegyik intervallumban az $f(x)$ függvény előjeleit (97. ábra).



97. ábra

Felelet: [1; 1,5). ◁

2. példa. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget: $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}>x-2$!

I. módszer (intervallum-módszer)

Magyarázat

Egyenlőtlenségünket $f(x)>0$ alakra hozzuk, majd megoldjuk intervallum-módszerrel. Az egyenlőtlenség alaphalmazának meghatározásához intervallum-módszerrel megoldjuk az $\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0$ egyenlőtlenséget (megengedett értékek halmaza: $x\neq 0$; $\frac{x^3+8}{x}=0$, ha $x=-2$).

Az $f(x)$ függvény zérushelyeinek meghatározásánál egyenlet-következményeket alkalmazunk.

Jóllehet az $f(x)$ függvénynek nincsenek zérushelyei, de a intervallum-módszer itt is alkalmazható. Csak ilyenkor az $f(x)$ függvény előjeltartási intervallumai megegyeznek a függvény értelmezési tartományát alkotó intervallumokkal.

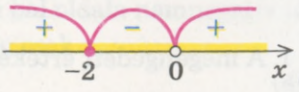
Megoldás

▶ Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2>0. \qquad (1)$$

Használjuk az $f(x)=\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2$ jelölést.

1. Megengedett értékek halmaza: $\begin{cases}\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0,\\ x\neq 0.\end{cases}$ Megoldjuk intervallum-módszerrel az $\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0$ egyenlőtlenséget (98. ábra).



98. ábra

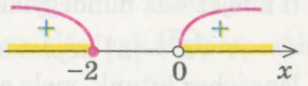
Megkaptuk: $x\in(-\infty;-2]\cup(0;+\infty)$.

2. Az $f(x)$ függvény zérushelyei $f(x)$: $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} - x + 2 = 0$. Ekkor:

$$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} = x-2, \quad \frac{x^3+8}{x} = x^2 - 4x + 4, \quad x^3 + 8 = x^3 - 4x^2 + 4x,$$

$4x^2 - 4x + 8 = 0$ egyenletnek nincsenek gyökei ($D < 0$).

3. Az (1) egyenlőtlenség alaphalmaza két intervallumra oszlik fel, melyekben az $f(x)$ függvény előjelei a 99. ábrán láthatók.



99. ábra

Felelet: $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$. ◁

II. módszer (ekvivalens átalakítások módszere)

Magyarázat

Az egyenlőtlenség megoldásához a következő ekvivalens átalakítást alkalmazzuk:

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Ahhoz, hogy megoldjuk az $\frac{x^3+8}{x} \geqslant 0$ közbülső egyenlőtlenséget, azt a kikötést tesszük, hogy a tört nemnegatív.

Végül a kapott eredmények egyesítésével megkapjuk a feleletet.

Megoldás

▶ $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ \frac{x^3+8}{x} > (x-2)^2, \end{cases}$ vagy $\begin{cases} \frac{x^3+8}{x} \geqslant 0, \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ \frac{x^3+8}{x} > x^2 - 4x + 4, \end{cases}$

vagy $\begin{cases} \frac{x^3+8}{x} \geqslant 0, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ \frac{4x^2-4x+8}{x} > 0, \end{cases}$ vagy $\begin{cases} x^3+8 \geqslant 0 \\ x > 0, \\ x < 2, \end{cases}$ vagy $\begin{cases} x^3+8 \leqslant 0, \\ x < 0, \\ x < 2. \end{cases}$

Figyelembe véve, hogy a $4x^2 - 4x + 8 > 0$ egyenlőtlenség bármilyen x-re igaz ($D < 0$ és $a = 4 > 0$), azt kapjuk, hogy a legutolsó három egyenlőtlenségrendszer összessége ekvivalens a következővel: $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x > 0 \end{cases}$ vagy $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x > 0, \\ x < 2, \end{cases}$ vagy

$\begin{cases} x \leqslant -2, \\ x < 0, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 2$ vagy $0 < x < 2$ vagy $x \leqslant -2 \Leftrightarrow x \leqslant -2$ vagy $x > 0$.

Felelet: $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$. ◁

M e g j e g y z é s . A megoldás felírásakor az ekvivalens átalakítás jelét $\Leftrightarrow$ elhagyhatjuk. A megoldás kezdetén elegendő a következő megállapítást tenni: „Az egyenlőtlenség megoldásakor csak ekvivalens átalakításokat hajtunk végre."

3. példa. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{3x+9-4\sqrt{3x+5}}+\sqrt{3x+14-6\sqrt{3x+5}}\leqslant 1! \qquad (1)$$

Magyarázat

A $\sqrt{3x+5}=t$ helyettesítés után könnyű észrevenni, hogy a külső gyök alatti kifejezések mindegyike egy kéttagú kifejezés négyzete.

A $\sqrt{a^2}=|a|$ képlet alkalmazása után egy olyan abszolútértékes egyenlőtlenséghez jutunk, mely a következő lépések alkalmazásával oldható meg:

1) *meghatározzuk a megengedett értékek halmazát;*

2) *meghatározzuk mindegyik abszolútérték alatti függvény zérushelyeit;*

3) *megjelöljük a zérushelyeket a megengedett értékek halmazán és intervallumokra osztjuk ezt a halmazt;*

4) *meghatározzuk az egyenlőtlenség megoldásait mindegyik intervallumon.*

Megoldás

▶ Legyen $\sqrt{3x+5}=t$, ahol $t\geqslant 0$. Ekkor $3x+5=t^2$, $3x=t^2-5$.

A $\sqrt{t^2+4-4t}+\sqrt{t^2+9-6t}\leqslant 1$ egyenlőtlenséghez jutunk, amely így is felírható:

$\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}\leqslant 1$. Innen azt kapjuk, hogy

$$|t-2|+|t-3|\leqslant 1. \qquad (2)$$

1. A (2) egyenlőtlenség megengedett értékeinek a halmaza: $t\in \boldsymbol{R}$, de a feladat feltétele szerint az egyenlőtlenséget csak $t\geqslant 0$-ra kell megoldani.
2. Az abszolútérték alatti kifejezések zérushelyei: $t=2$ és $t=3$.
3. A zérushelyek a $t\geqslant 0$ tartományt három olyan intervallumra osztják, melyekben az abszolútérték alatt álló függvények előjelei állandók lesznek (100. ábra).

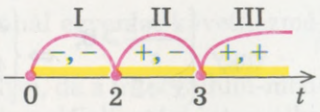


Рис. 100

I. intervallum. $t\in[0;2]$ esetén a következő egyenlőtlenséggel lesz dolgunk: $-(t-2)-(t-3)\leqslant 1$, amelyből a $t\geqslant 2$ egyenlőtlenséget kapjuk, de a $[0;2]$ intervallumhoz csak a $t=2$ tartozik.

II. intervallum. $t\in[2;3]$ esetén a következő egyenlőtlenséggel lesz dolgunk: $(t-2)-(t-3)\leqslant 1$, amelyből a $0\cdot t\leqslant 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, amely a t bármely értékére teljesül. Tehát a $[2;3]$ intervallumon az egyenlőtlenség minden t értékre fennáll ($2\leqslant t\leqslant 3$).

III. intervallum. $t\in[3;+\infty)$ esetén a következő egyenlőtlenséggel lesz dolgunk: $(t-2)+(t-3)\leqslant 1$, amelyből a $t\leqslant 3$ egyenlőtlenséget kapjuk, de a $[3;+\infty)$ intervallumhoz csak a $t=3$ tartozik.

Az eredmények egyesítése után arra a következtetésre jutunk, hogy a (2) egyenlőtlenség megoldásai a t azon értékei, melyekre igaz a $2\leqslant t\leqslant 3$ kettős egyenlőtlenség.

A visszahelyettesítés után $2\leqslant\sqrt{3x+5}\leqslant 3$, melyből $4\leqslant 3x+5\leqslant 9$.

Ekkor $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$.

Felelet: $\left[-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right]$. ◁

Ellenőrző kérdések

1. Nevezd meg az irracionális egyenlőtlenségek megoldásának legfontosabb módszereit!
2. Nevezd meg az irracionális egyenlőtlenségek megoldásának legfontosabb lépéseit!
3. Igazold, hogy az átalakítások ekvivalensek voltak:

   1) $\sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x)$;

   2) $\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x); \end{cases}$

   3) $\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases}$ vagy $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0! \end{cases}$

Gyakorlatok

Oldd meg az **(1– 8.)** egyenlőtlenségeket!

1. 1) $\sqrt{x^2-3x-18} < 4-x$; 2) $\sqrt{x^2-3x} < 5-x$.

2. 1) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leqslant x^2-9$; 2) $(x-1)\sqrt{x^2+1} \leqslant x^2-1$.

3. 1) $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \leqslant \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$; 2) $\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+8} \leqslant \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2x+1}$.

4. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5} \geqslant 3$; 2) $\sqrt{2x-20}+\sqrt{x+15} \geqslant 5$.

5. 1) $\frac{14}{3-\sqrt{x}} \geqslant \sqrt{x}+5$; 2) $\frac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-6} > 0$.

6. 1) $\sqrt{\frac{x^3+27}{x}} > x-3$; 2) $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$.

7*. 1) $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}}+\sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}} \leqslant 2$;

2) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} > 1$.

8*. 1) $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\sqrt{x}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right) \leqslant 0$;

2) $\left(\sqrt{x^2-5x+6}+2\right)\sqrt{x}-\frac{1}{x}\left(\sqrt{10x-2x^2-12}+2\right) \geqslant 0$.

15. §. A PARAMÉTERES IRRACIONÁLIS EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA

Egyenletek és egyenlőtlenségek gyökeinek meghatározására visszavezethető paraméteres feladatok az alábbi útmutatás szerint oldhatók meg: *bármilyen paraméteres egyenletet vagy egyenlőtlenséget egészen addig kell közönséges egyenletként vagy egyenlőtlenségként megoldani, ameddig mindegyik átalakítást, amelyeket a megoldás során alkalmazunk, egyértelműen végre lehet hajtani. Ha valamely átalakítás végrehajtása nem egyértelmű, akkor a megoldást különböző esetekre külön kell elvégezni, és mindegyikben a feleletet a paraméteren keresztül kell egyértelműen felírni.*

A paraméteres egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásának menetét gyakran célszerű ábrákon illusztrálni, hogy könnyen megkülönböztető legyen az a lépés, amelyben nem egyértelmű az adott átalakítás, vagy az, hogy hány esetre kell felosztani a megoldás menetét, vagy miben különbözik az egyik eset a másiktól.

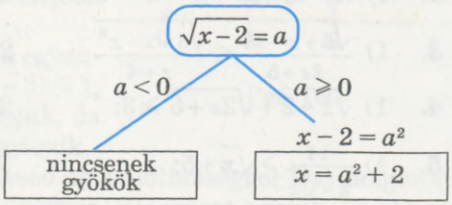
A paraméteres egyenleteket és egyenlőtlenségeket leggyakrabban ekvivalens átalakítások alkalmazásával oldjuk meg, de néha alkalmazzuk a függvények tulajdonságait, az intervallum-módszert, valamint egyenlet-következményeket is.

1. példa. Oldjuk meg a $\sqrt{x-2}=a$ egyenletet!

Magyarázat

Nem tudunk egyértelmű választ adni arra a kérdésre, hogy vannak-e gyökei az adott egyenletnek, ezért már az első lépésnél két esetet kell megkülönböztetnünk:

1) $a < 0$ esetén nincsenek gyökei;
2) $a \geqslant 0$ esetén vannak gyökei (lásd a rajzot).



Ha $a \geqslant 0$, akkor a legegyszerűbb irracionális egyenletet kapjuk, melynek mindkét oldala nemnegatív. Mindkét oldal négyzetre emelése után az adott egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk. Az adott egyenlet megengedett értékeinek a halmazát nem kell felírni, automatikusan figyelembe vesszük, mivel a kapott egyenlet minden gyökére igaz: $x - 2 = a^2 \geqslant 0$.

Megoldás

▶ 1) Ha $a < 0$, akkor az egyenletnek nincsenek gyökei.
2) Ha $a \geqslant 0$, akkor $x - 2 = a^2$. Adódik $x = a^2 + 2$.

Felelet: 1) ha $a < 0$, akkor az egyenletnek nincsenek gyökei;
2) ha $a \geqslant 0$, akkor $x = a^2 + 2$. ◁

2. példa. Oldjuk meg a $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-1}=3$ egyenletet!

Megoldás[1]

▶ $\sqrt{x+a}=3-\sqrt{x-1}.$ (1)

Az (1) egyenlet mindegyik gyökére teljesülnie kell:

$$3-\sqrt{x-1}\geqslant 0. \quad (2)$$

Akkor az (1) egyenlet ekvivalens a következő egyenlettel:

$$x+a=\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2, \quad (3)$$

$$x+a=9-6\sqrt{x-1}+x-1,$$

$$\sqrt{x-1}=\frac{8-a}{6}. \quad (4)$$

A (4) egyenlet mindegyik gyökére igaz:

$$\frac{8-a}{6}\geqslant 0. \quad (5)$$

Ekkor a (4) egyenlet ekvivalens a következő egyenlettel:

$$x-1=\left(\frac{8-a}{6}\right)^2. \quad (6)$$

Tehát $x=\left(\frac{8-a}{6}\right)^2+1.$

Figyelembe véve a (2) és (5) kikötéseket:

$$3-\sqrt{x-1}=3-\sqrt{\left(\frac{8-a}{6}\right)^2}=3-\left|\frac{8-a}{6}\right|.$$

Az (5) feltételből következik $\frac{8-a}{6}\geqslant 0$, ekkor $\left|\frac{8-a}{6}\right|=\frac{8-a}{6}$. Tehát a (2) és (5) feltételek figyelembevételével a

$$\begin{cases}3-\frac{8-a}{6}\geqslant 0,\\ \frac{8-a}{6}\geqslant 0\end{cases}$$

rendszerhez jutunk,

vagyis $\begin{cases}a\geqslant -10,\\ a\leqslant 8,\end{cases}$ ekkor $-10\leqslant a\leqslant 8.$

Magyarázat

Az adott egyenlet megoldásakor ekvivalens átalakításokat alkalmazunk. Ehhez figyelembe kell venni a megengedett értékeinek a halmazát:

$$\begin{cases}x+a\geqslant 0, & (7)\\ x-1\geqslant 0. & (8)\end{cases}$$

Ha az egyenlet egyik oldaláról az egyik tagot ellenkező előjellel átviszszük a másik oldalára, akkor az adott (1) egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk.

Az (1) egyenlet mindegyik gyökével igaz számegyenlőséggé alakul. Mivel bal oldala nemnegatív, ezért jobb oldalának is nemnegatívnak kell lennie. Az (1) egyenletet a továbbiakban már nem az eredeti egyenlet megengedett értékeinek halmazára vonatkoztatva oldjuk meg, hanem csak azon a részén, amely a (2) feltétellel van megadva.

E feltétel alapján az (1) egyenlet mindkét oldala nemnegatív lesz, tehát mindkét oldalát négyzetre emelve a (3) ekvivalens egyenlethez jutunk (majd ekvivalens átalakítások után a (4) egyenlethez).

A (3) egyenlet mindegyik gyökével az egyenlet jobb oldala nemnegatív értékűvé válik, tehát a bal oldali rész is nemnegatív lesz: $x + a \geqslant 0$. De ekkor a (7) feltétel az adott egyenlet megengedett értékeinek halmazán automatikusan figyelembe lesz véve, és nem kell felírni a megoldáshoz.

A (4) egyenlet mindegyik gyökénél az egyenlet bal oldala nemnegatív lesz, tehát a jobb oldalnak is nemnegatívnak kell lennie. Ezért a továbbiakban a (4) egyenlet már nem az egész megengedett

[1] A 2–6. példák megoldása során azokat a kikötéseket foglaltuk keretbe, melyeket figyelembe kell venni az adott egyenlet vagy egyenlőtlenség ekvivalens átalakításakor.

Felelet:

1) ha $-10 \leqslant a \leqslant 8$, akkor $x = \left(\frac{8-a}{6}\right)^2 + 1$;

2) ha $a < -10$ vagy $a > 8$, akkor az egyenletnek nincsenek gyökei. ◁

értékek halmazán oldható meg, hanem csak az (5) feltétellel megadott részén. Ekkor a (4) egyenlet mindkét oldala nemnegatív lesz, és mindkét oldalának négyzetre emelése után a (6) egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk.

A (6) egyenlet mindegyik gyökénél a jobb oldala nemnegatív, tehát a bal oldalnak is nemnegatívnak kell lennie: $x - 1 \geqslant 0$. Ekkor a (8) feltétellel a megengedett értékek halmaza automatikusan figyelembe van véve, és ezért a megengedett értékek halmazát nem kell felírni a megoldás során.

3. példa. Oldjuk meg a $\sqrt{a+\sqrt{a+x}} = x$ egyenletet!

Megoldás

▶ Az adott egyenlet mindegyik gyökére igaz, hogy $x \geqslant 0$. (1)

Ekkor az adott egyenlet ekvivalens a következő egyenletekkel:

$$a+\sqrt{a+x} = x^2, \quad (2)$$

$$\sqrt{a+x} = x^2 - a. \quad (3)$$

A (3) egyenlet mindegyik gyökére igaz $x^2 - a \geqslant 0$. (4)

Ekkor a (3) egyenlet ekvivalens lesz a következő egyenletekkel:

$$a + x = (x^2 - a)^2, \quad (5)$$

$$a + x = x^4 - 2ax^2 + a^2. \quad (6)$$

Tekintsük úgy a (6)-ot, mint a-ra nézve másodfokú egyenlet

$$a^2 - (2x^2 + 1)\,a + x^4 - x = 0.$$

$$\boldsymbol{D} = (2x^2 + 1)^2 - 4\,(x^4 - x) =$$

$$= 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

Ekkor $a = \frac{(2x^2+1) \pm (2x+1)}{2}$.

Tehát, $a = x^2 + x + 1$ vagy $a = x^2 - x$.

Innen $x^2 - a + x + 1 = 0$ (7)

vagy $x^2 - a = x$. (8)

Figyelembe véve az (1) és (4) feltételeket, megkapjuk, hogy $(x^2 - a) + x + 1 \geqslant 1$, tehát a (7) egyenletnek nincsenek gyökei.

Magyarázat

A 2. példához hasonlóan az adott egyenlet megengedett értékeinek a halmazát $\begin{cases} a+\sqrt{a+x} \geqslant 0, \\ a+x \geqslant 0 \end{cases}$ automatikusan figyelembe vesszük, amikor áttérünk a (2), illetve (5) egyenletekhez (ezeknek az egyenleteknek mindegyik gyökére), tehát nem kell felírni a megoldás során.

Az adott egyenlet ekvivalens átalakításainak (amelyek során a (2)–(3)–(5)–(6) egyenletekhez jutunk) okfejtései megegyeznek a 2. példa *Magyarázatá*-ban találhatóhoz.

A (6) egyenlet elemzése során megállapíthatjuk, hogy x-re nézve elég nehéz megoldani, ezért egy olyan eljárást alkalmazunk, melyet „Keress másodfokú háromtagú kifejezést" módszerének is nevezhetünk. Azaz: *tekintsük úgy az adott egyenletet, mint valamely változóra (vagy függvényre) másodfokú egyenletet.* Ebben az esetben ezt az egyenletet az a paraméterre nézve tekintjük másodfokúnak (ez a módszer csak akkor fog hatékonyan működni, ha a kapott másodfokú polinom diszkriminánsa teljes négyzet lesz, mint a vizsgált példában).

Ha a (8) egyenlet gyökeire teljesül az (1) feltétel ($x \geqslant 0$), akkor automatikusan teljesülni fog a (4) ($x^2 - a \geqslant 0$) feltétel is.

A (8) egyenletből kapjuk:

$$x^2 - x - a = 0.$$

Ennek az egyenletnek akkor lesznek gyökei, ha $D = 1 + 4a \geqslant 0$, vagyis $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

Ekkor $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

Az x_1-re az $x \geqslant 0$ feltétel teljesül, vagyis az x_1 az adott egyenlet gyöke lesz, ha $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

Figyelembe véve az $x \geqslant 0$ feltételt az x_2-re is:

$$\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \geqslant 0, \quad \sqrt{1+4a} \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant 1 + 4a \leqslant 1, \quad -\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0.$$

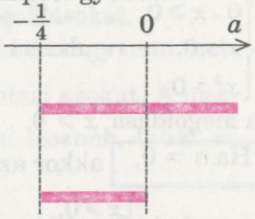
Felelet: 1) ha $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$, akkor

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2};$$

2) ha $a > 0$, akkor $x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$;

3) ha $a < -\frac{1}{4}$, akkor az egyenletnek nincsenek gyökei. ◁

A felelet felírása előtt hasznos ábrázolni az összes kapott gyököt.



Ebből a rajzból látható, hogy az $a > 0$ esetén a feleletbe csak egy eredményt kell felírni (x_1), ha $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$ 0, akkor két képletet (x_1 és x_2), ha $a < -\frac{1}{4}$, akkor az egyenletnek nincsenek gyökei.

4. példa. Oldjuk meg az $x + 4a > 5\sqrt{ax}$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

▶ ▶Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a következő rendszerrel

$$\begin{cases} ax \geqslant 0, \\ x + 4a > 0, \\ (x+4a)^2 > 25ax. \end{cases} \quad (1)$$

Magyarázat

Mivel ekvivalens átalakításokat alkalmazunk, ezért figyelembe vesszük az adott egyenlőtlenség megengedett értékeinek halmazát ($ax \geqslant 0$), valamint azt, hogyha az egyenlőtlenség jobb oldala nemnegatív, akkor a bal oldalnak pozitívnak kell lennie ($x + 4a > 0$)

Ha $a = 0$, akkor a

$$\begin{cases} 0 \cdot x \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 > 0 \end{cases}$$

rendszert kapjuk, melynek a megoldása: $x > 0$.

Ha $a > 0$, akkor az

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x > -4a, \\ x^2 - 17ax + 16a^2 > 0 \end{cases} \quad (2)$$

egyenletrendszerhez jutunk.
Megoldjuk külön az
$x^2 - 17ax + 16a^2 > 0$ egyenlőtlenséget.
Mivel az $x^2 - 17ax + 16a^2 = 0$ esetén $x = a$ és $x = 16a$, ezért ha $a > 0$, akkor azt kapjuk, hogy $x < a$ vagy $x > 16a$.
Ekkor a (2) rendszer megoldásai:
$0 \leqslant x < a$ vagy $x > 16a$.

Ha $a < 0$, akkor a következő rendszert kapjuk

$$\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x > -4a, \\ x^2 - 17ax + 16a^2 > 0. \end{cases} \quad (3)$$

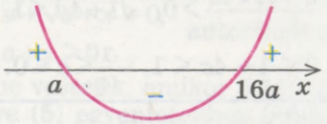
A (3) rendszernek nincs megoldása, mivel $a < 0$ esetén az első és a második egyenlőtlenségnek nincsenek közös megoldásai.
Felelet: ha $a = 0$, akkor $x > 0$;
ha $a > 0$, akkor $x \in [0; a) \cup (16a; +\infty)$;
ha $a < 0$, akkor nincsenek megoldásai. ◁

valamennyi x-re. Ebből a feltételből (a megengedett értékek halmazára nézve) következik, hogy az adott egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, tehát az egyenlőtlenség mindkét oldalának négyzetre emelésekor ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.

Megkapjuk az (1) rendszert.

Az $ax \geqslant 0$ egyenlőtlenség megoldásához három esetet kell megvizsgálnunk: $a = 0$ (a-val nem oszthatunk); $a > 0$ (az egyenlőtlenség iránya nem változik, ha elosztjuk a-val); $a < 0$ (az egyenlőtlenség iránya megváltozik).

Ha $a > 0$, akkor $-4a < 0$, ezért a (2) rendszer első két egyenlőtlenségének közös megoldása az $x \geqslant 0$. Az $x^2 - 17ax + 16a^2 > 0$ egyenlőtlenség megoldásához grafikus ábrázolást alkalmazunk:



Ha $a < 0$, akkor $-4a > 0$, ezért a (3) rendszer első két egyenlőtlenségének nem lesznek közös megoldásai, tehát az egész (3) rendszernek nincs megoldása.

5. példa. Oldjuk meg a $\sqrt{x-a} > x+1$ egyenlőtlenséget!

Magyarázat

Először a következő ekvivalens átalakításokat alkalmazzuk:

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Ha a kapott rendszerben az a paraméter csupán első hatványon szerepel, akkor ilyenkor célszerű kifejezni a paramétert a változón keresztül, vagyis a paramétert e változó függvényének tekinteni és grafikusan megoldani az egyenlőtlenséget (az xOa koordináta-rendszerben). Megjegyezzük, hogy az egyenlőtlenség-halma-

zok megoldásainak ábrázolásakor célszerű olyan két koordináta-rendszert alkalmazni, melyekben az Ox tengelyek egy egyenes mentén helyezkednek el, és mindegyiken szaggatott vonalakkal kiemelni a megfelelő megoldásokat.

Az a paraméter különböző értékeinél az $a = \text{const}$ egyenes vagy nem metszi a kiemelt területet (ha $a \geqslant -\frac{3}{4}$), vagy szakaszokban metszi azokat. A metszéspontok abszcisszái az (1) és (2) rendszerek megoldásai lesznek, tehát az adott egyenlőtlenség megoldásai.

Megoldás

▶ Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a következő egyenlőtlenség-halmazokkal:

$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ x-a > (x+1)^2 \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} x-a \geqslant 0, \\ x+1 < 0. \end{cases}$$

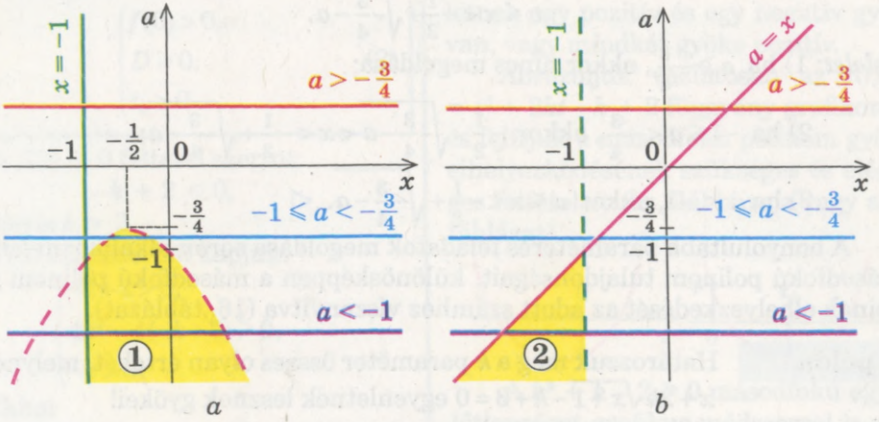
Ekkor

$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ a < -x^2 - x - 1 \end{cases} \tag{1}$$

vagy

$$\begin{cases} a \leqslant x, \\ x < -1. \end{cases} \tag{2}$$

Grafikusan ábrázoljuk az (1) és (2) rendszerek megoldásait az xOa koordináta-rendszerben (a 101. *a*, *b* ábra megfelelően színezett ① és ② részei).



101. ábra

Az ábráról leolvasható, hogy: ha $a \geqslant -\frac{3}{4}$, akkor nincsenek megoldások (nincsenek színezett pontok); ha $-1 \leqslant a < -\frac{3}{4}$, akkor az $a = \text{const}$ egyenes

csak az ① kiemelt részt metszi. Miközben a kapott intervallumot balról és jobbról az $a = -x^2 - x - 1$ parabola ágai határolják. De a felelethez nekünk az x-et az a-n keresztül kell felírni. Ezért az $x^2 + x + a + 1 = 0$ egyenletből meghatározzuk az x értékét:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a - 1}.$$

Könnyű belátnunk, hogy $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a} > -\frac{1}{2}$, vagyis $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$ a parabola jobb oldali ága, és az $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$ a bal oldali ága.

Tehát a felelet ebben az esetben a következő lesz:

$$-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4} - a} < x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a};$$

ha $a < -1$, akkor az $a = \text{const}$ egyenes metszi a kijelölt ① és ② tartományokat. Az ① tartomány x-re vonatkozó intervalluma balról az $x = -1$ egyenessel van határolva, jobbról pedig a parabola jobb oldali ágával, vagyis $-1 \leqslant x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$. A ② tartomány az x-re vonatkozó intervalluma balról az $x = a$ egyenessel van határolva, jobbról pedig az $x = -1$ egyenessel, vagyis $a \leqslant x < -1$. Egyesítve ezeket az intervallumokat a következőképpen lehet rövidebben felírni:

$$a \leqslant x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}.$$

Felelet: 1) ha $a \geqslant -\frac{3}{4}$, akkor nincs megoldása;

2) ha $-1 \leqslant a < -\frac{3}{4}$, akkor $-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4} - a} < x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$;

3) ha $a < -1$, akkor $a \leqslant x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$. ◁

A bonyolultabb paraméteres feladatok megoldása során alkalmazni lehet a másodfokú polinom tulajdonságait, különösképpen a másodfokú polinom gyökeinek elhelyezkedését az adott számhoz viszonyítva (16. táblázat).

6. példa. Határozzuk meg a k paraméter összes olyan értékét, melynél az $x + 2k\sqrt{x+1} - k + 3 = 0$ egyenletnek lesznek gyökei!

Megoldás	*Magyarázat*
▶ A $\sqrt{x+1} = t$, ahol $t \geqslant 0$ (ekkor $x = t^2 - 1$) helyettesítéssel a következő egyenlethez jutunk $t^2 + 2kt - k + 2 = 0.$ (1)	Ha az irracionális egyenlet csak egy gyököt tartalmaz, akkor néha az ilyen egyenletet racionálissá alakíthatjuk, gyökének új változóval történő cseréjé-

Az eredeti egyenletnek akkor és csakis akkor lesznek gyökei, ha az (1) egyenletnek legalább egy nemnegatív gyöke lesz ($t \geqslant 0$). A $t = 0$ esetet külön vizsgáljuk.

Ha $t = 0$, akkor az (1) egyenletből azt kapjuk, hogy $k = 2$. Tehát $k = 2$ esetén az (1) egyenletnek a megoldása $t = 0$. Ekkor az eredeti egyenletnek az $x = -1$ lesz a gyöke, vagyis a $k = 2$ kielégíti a feladat feltételét.

Használjuk az $f(t) = t^2 + 2kt - k + 2$ jelölést.

Az (1) egyenletnek a következő két eset közül legalább egy pozitív gyöke lesz:
1) az egyik gyök pozitív, a másik pedig negatív, ehhez szükséges és elégséges az $f(0) < 0$ feltétel teljesülése;
2) mindkét gyök pozitív, ehhez szükséges és elégséges a következő feltételrendszer teljesülése:

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ t_0 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Az $f(0) < 0$ feltétel szerint:

$$-k + 2 < 0,$$

vagyis $k > 2$.

A (2) rendszerből kapjuk:

$$\begin{cases} -k + 2 > 0, \\ 4k^2 - 4(-k+2) \geqslant 0, \\ -k > 0. \end{cases}$$

Ekkor

$$\begin{cases} k < 2, \\ k^2 + k - 2 \geqslant 0, \\ k < 0. \end{cases} \quad \begin{cases} k < 2, \\ k \leqslant -2 \text{ vagy } k \geqslant 1, \\ k < 0. \end{cases}$$

Tehát, $k \leqslant -2$.

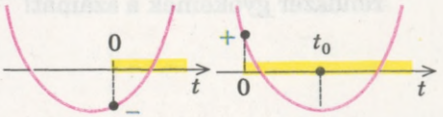
Felelet: $k \leqslant -2$ vagy $k \geqslant 2$. ◁

vel. Mivel a helyettesítés ekvivalens átalakítás (a visszahelyettesítéssel együtt), ezért az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk, és az eredeti egyenlet vizsgálata helyett a kapott egyenlet vizsgálható.

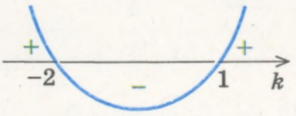
Figyelembe kell venni, hogy *változócserénél a feladatban további kérdések merülnek fel.* Jelen esetben az (1) egyenlethez feltett kérdés a következővel egészül ki: határozzuk meg a k paraméter összes értékét, melynél az egyenletnek legalább egy nemnegatív gyöke lesz (ekkor a visszahelyettesítés után feltétlenül megkapjuk az adott egyenlet gyökeit).

Ez a következő háromból csak egy esetben fordulhat elő: vagy az (1) egyenlet gyökei közül egy nullával lesz egyenlő (ezt az esetet könnyen ellenőrizhetjük a $t = 0$ visszahelyettesítéssel az (1) egyenletbe), vagy az (1) egyenletnek egy pozitív és egy negatív gyöke van, vagy mindkét gyöke pozitív.

Ábrázoljuk vázlatosan az $f(t) = t^2 + 2kt - k + 2$ függvény grafikonját, és felírjuk a másodfokú polinom gyökei elhelyezkedésének szükséges és elégséges feltételeit (az alábbi rajz vagy a 16. táblázat).



A $k^2 + k - 2 \geqslant 0$ másodfokú egyenlőtlenséget grafikus módszerrel is megoldhatjuk.



A végén egyesíteni kell mindegyik kapott eredményt. Természetesen a feladat megoldása során eljárhattunk volna úgy is mint a 2. példában, majd ezután adni meg a feladat kérdésére a választ, de ez a módszer sokkal több számítást igényelt volna.

Gyakorlatok

1. Oldd meg az egyenleteket:
   1) $\sqrt{x-a}=2$; 2) $\sqrt{x+2a}=a$; 3) $\sqrt{x+6}-m=\sqrt{x-3}$;
   4) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$!
2. Oldd meg az egyenlőtlenségeket:
   1) $\frac{(x-1)\sqrt{a-x}}{2-x}\geqslant 0$; 2) $x+2a>\sqrt{3ax+4a^2}$; 3) $\sqrt{4x+a}>x$;
   4) $\sqrt{x-a}\geqslant 2x+1$; 5) $\sqrt{a^2-x^2}>2-x$!
3. Határozd meg az a paraméter összes olyan értékét, melynél a $3\sqrt{x+2}=2x+a$ egyenletnek lesz gyöke!
4. Határozd meg az a paraméter összes olyan értékét, melynél a $(\sqrt{x}-a)\left(x-\frac{4}{x}\right)=0$ egyenletnek csak egy gyöke lesz!
5. Határozd meg az a paraméter összes olyan értékét, melynél a $\sqrt{2-ax}+2=x$ egyenletnek csak egy valós gyöke lesz!
6. Az a paraméter értékétől függően határozd meg az $\begin{cases}y=a+\sqrt{x},\\2x+y-1=0\end{cases}$ egyenletrendszer gyökeinek a számát!

KIEGÉSZÍTŐ GYAKORLATOK A 2. FEJEZETHEZ

1. Gyöktelenítsd a tört nevezőjét:

1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$!

2. Számítsd ki:

1) $\sqrt{(\sqrt{5}-2{,}5)^2}-\sqrt[3]{(1{,}5-\sqrt{5})^3}-1$; 2) $\frac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{2}-1{,}5)^2}-\sqrt[3]{((1-\sqrt{2})^3)^2}+0{,}75$; 4) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{20}}{2\sqrt{5}+\sqrt{24}}\cdot(11+2\sqrt{30})$!

Hozd egyszerűbb alakra a **(3–5.)** kifejezéseket!

3. 1) $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$; 2) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

3) $\frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$; 4) $\left(\frac{\sqrt{c}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}-\frac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}\right)$!

4. 1) $\left(\sqrt{k}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+1}{\sqrt{k}+1}\right)^{-1}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}$;

2) $\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

3) $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})\right)\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}+1\right)$;

4) $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^3}-\sqrt{a^2b}-\sqrt{b^3}}{\sqrt[4]{b^3}+\sqrt[4]{a^4b}-\sqrt[4]{ab^4}-\sqrt[4]{a^3}}$.

5. 1) $\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}$;

2) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right):\frac{(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$;

3) $\left(\frac{2x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{3x}\right)^{-1}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}-\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)$;

4) $\left(\frac{1-c^{-2}}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{c^2}+\frac{c^{-2}-c}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1+\frac{2}{c^2}\right)^{-2}$.

Oldd meg a **(6–10.)** egyenleteket!

6. 1) $\left(\sqrt{x^2-7x+10}\right)^2=2x^2-9x+7$;
2) $x^2+\sqrt{x^2-1}-\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=0$;
3) $\sqrt{(x+1)(2x+3)}=x+3$;
4) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3}=x+3$.

7. 1) $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x$;
2) $\sqrt{2x^2+3x}+\sqrt{2x^2-3x-5}=6x+5$;
3) $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{2x+2}$;
4) $\sqrt{x^2-7x+1}=\sqrt{2x^2-15x+8}$.

8. 1) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$;
2) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{5x+2}$;
3) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;
4) $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+18-8\sqrt{x+2}}=1$.

9. 1) $\sqrt[3]{2x-8}+\sqrt[3]{x-8}=2$;
2) $\sqrt[3]{8x+4}+\sqrt[3]{8x-4}=2$;
3) $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5-x}=2$;
4) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

10. 1) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$;
2) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0$;
3) $\sqrt{2-x^2}=|x|-1$;
4) $\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{10x+5}=2$.

Oldd meg a **(11–12.)** egyenletrendszereket!

11. 1) $\begin{cases}\sqrt{x+y}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2;\end{cases}$
2) $\begin{cases}\sqrt{x+3y+1}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6;\end{cases}$
3) $\begin{cases}\dfrac{7}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3},\\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{13}{6};\end{cases}$
4) $\begin{cases}\dfrac{5}{\sqrt{x-9}}+\dfrac{4}{\sqrt{y+9}}=\dfrac{31}{20},\\ \dfrac{3}{\sqrt{x-9}}+\dfrac{2}{\sqrt{y+9}}=\dfrac{7}{20}.\end{cases}$

12. 1) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2x-1}}+4\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+y}}=5,\\ x=y+1;\end{cases}$
2) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{10}{3},\\ xy-2x-2y=2;\end{cases}$
3) $\begin{cases}\sqrt{2x+y-1}-\sqrt{x+y}=1,\\ 3x+2y=4;\end{cases}$
4) $\begin{cases}\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3,\\ 2x+y=7.\end{cases}$

Oldd meg a **(13–21.)** egyenlőtlenségeket!

13. 1) $\sqrt{3x^2+13}\geqslant 1-2x$;
2) $\sqrt{x^2+x}>1-2x$;
3) $\sqrt{3x-x^2}<4-x$;
4) $\sqrt{x^2-x-2}<2x+6$.

14. 1) $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$;
2) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$;
3) $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$;
4) $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$.

15. 1) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\leqslant 2$; 2) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-4\sqrt{x-1}}\geqslant 3$;
3) $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$; 4) $\sqrt{x+6}>\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+1}$.

16. 1) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}}>\frac{1}{x}-\frac{1}{4}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$;
3) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0$; 4) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\geqslant 0$.

17. 1) $(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$; 2) $(x-3)\sqrt{x^2+1}\leqslant x^2-9$;
3) $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\geqslant\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$; 4) $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11}\geqslant\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$.

18. 1) $\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}<1$; 2) $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geqslant 2$;
3) $\sqrt{x+5}<1+\sqrt{-x-3}+\sqrt{(x+5)(-x-3)}$;
4) $\sqrt{(x-5)(-x+7)}+1>\sqrt{-x+7}-\sqrt{x-5}$).

19. 1) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$; 2) $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}$;
3) $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$.

20. 1) $\frac{(1-x)\sqrt{1-x}+(1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{4-4x^2+2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}\geqslant 1$; 2) $\frac{x\sqrt{x}+(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2-2(x^2-x)\sqrt{x-x^2}}}>1$;
3) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}-1}\geqslant 0$; 4) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{2}{1-\sqrt{1+x}}\leqslant 0$.

21. 1) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{1}{\sqrt{x}+2}\leqslant\frac{a}{\sqrt{x}}$ $(a>0)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\geqslant\frac{a}{\sqrt{x}}$.

22. Oldd meg a $\sqrt{1-x^2}\geqslant\frac{4}{3}(x-a)$ egyenlőtlenséget, ha $a=0$, és győződj meg arról, hogy a megoldások halmaza egy szakasz lesz! Az a mely értékeinél lesz a megoldások halmaza egy $\frac{9}{5}$ hosszúságú szakasz?

23. Az a paraméter mely értékeinél fogja az $a+\sqrt{x^2+ax}\geqslant x$ egyenlőtlenség megoldásainak halmaza metszeni a $[-1;\,0]$ intervallumot?

24. Az a paraméter mely értékeinél fogja az $x+\sqrt{x^2-2ax}>1$ egyenlőtlenség megoldásainak halmaza tartalmazni az $\left[\frac{1}{4};1\right]$ intervallumot?

MATEMATIKATÖRTÉNETI ADALÉKOK

A *hatvány* fogalma még a távoli időkbe nyúlik vissza. Megmaradtak az ókori babiloniak (i. e. 1700?) által készített agyagtáblák, amelyek a négyzetek és köbök valamint ezek fordított értékeit tartalmazták. Az ezeken található feladatok nagyon sok megoldása az egyenlő tényezők szorzatára vezetődik vissza. A *szám négyzete* kifejezés a négyzet területének kiszámítása során keletkezett, a *szám köbe* a kocka térfogata kiszámításának következtében. A mai jelöléseket (például: a^4, a^5) a XVII. században R. Descartes (1596–1650) vezette be.

A törtkitevőjű hatványt és annak legegyszerűbb tulajdonságait a XIV. században N. Oresme (kb. 1323–1382) francia matematikus már alkalmazta. Ismeretes, hogy N. Chuquet (1445?– 1500?) már a negatív kitevőjű hatványt és a nulla hatványkitevőt is vizsgálta.

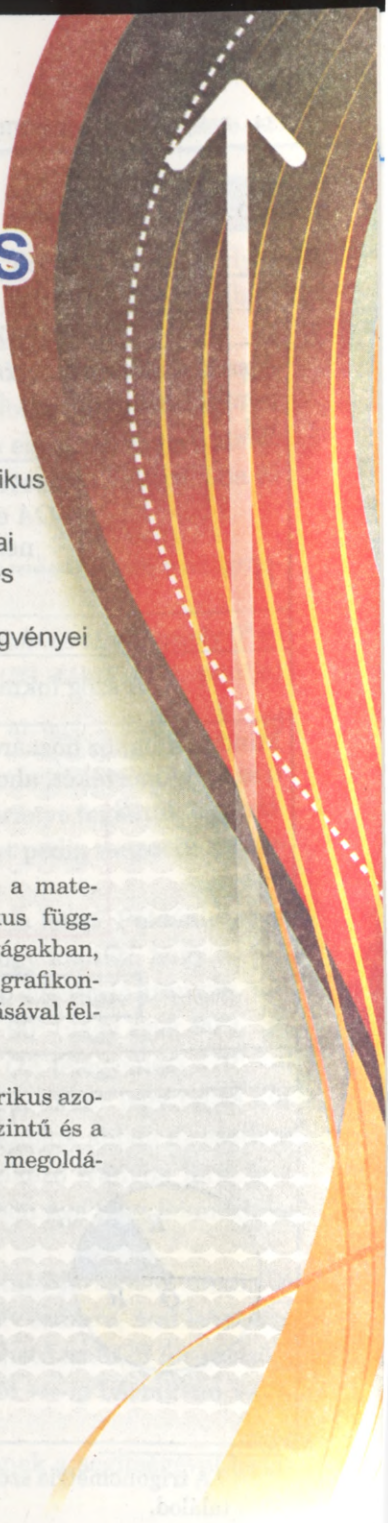
S. Stevin az $a^{\frac{1}{n}}$ jelölés helyett az $\sqrt[n]{a}$ használatát ajánlotta. De rendszeresen csak I. Newton (1643–1727) alkalmazta a törtkitevőjű és a negatív kitevőjű hatványokat.

M. Stifel (1487–1567) német matematikus definiálta az $a^0 = 1$, ha $a \neq 0$ kifejezést, és vezette be a *hatványkitevő* elnevezést (németül *exponent*). A német *potenzieren* azt jelenti, hogy a *hatványra emelni*.

Az *exponenten* kifejezés annak a görög szónak a pontatlan fordításából ered, melyet *Alexandriai Diophantus* (kb. III. sz.) használt a nemnegatív szám négyzetének jelölésére.

A *radikál* és a *gyök* kifejezések a XII. sz.-ban kerültek bevezetésre, melyek a latin *radix* szóból erednek és két értelme is van: *oldal* és *gyök*. A görög matematikusok „gyökvonás" kifejezés helyett azt mondták „határozzuk meg a négyzet oldalát, ha ismerjük a mértékét (területét)". A $\surd$ szimbólum a gyök jelölésére először 1525-ben jelent meg. A mai jelölést Descartes alkalmazta, aki az eddig használatos jelet egy vízszintes vonallal bővítette. Newton már a gyökkitevőket így jelölte: $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$.

3. fejezet
TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK



KÖTELEZŐ TANANYAG

16. §. A szögek radián mértéke
17. §. Szög- és számargumentumú trigonometrikus függvények
18. §. Trigonometrikus függvények tulajdonságai
19. §. Trigonometrikus függvények grafikonjai és tulajdonságai
20. §. Azonos argumentum trigonometrikus függvényei közötti összefüggések
21. §. Addíciós (összegezési) képletek és azok következményei

KIEGÉSZÍTŐ TANANYAG

22. §. Trigonometrikus azonosságok

A kötelező tananyagrészben megismerkedhettek a matematikában széleskörűen alkalmazott trigonometrikus függvényekkel, azok felhasználásával más tudományágakban, megtanuljátok ezen függvények főbb tulajdonságait, grafikonjaik ábrázolását, a megtanult tulajdonságok alkalmazásával feladatokat oldhattok meg.

A kiegészítő tananyagrészben további trigonometrikus azonosságokkal ismerkedhettek meg, melyek az emelt szintű és a középszintű érettségi feladatsorok nehezebb feladatai megoldásához szükségesek.

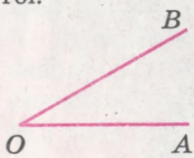
16. §. A SZÖGEK RADIÁNMÉRTÉKE

24. táblázat

1. A szög fogalma

a mértanban

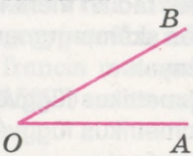
A *szög* a síknak az a része, melyet egy pontból kiinduló két félegyenes határol.



Az $AOB\angle$ szöget az OA és OB félegyenesek alkotják

a trigonometriában[1]

A *szög* a síknak az a része, melyet egy félegyenes kezdőpontja körüli forgatással súrol.

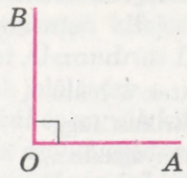


Az $AOB\angle$ szöget az OA félegyenes O pont körüli forgatása alkotta

2. Szögmérés

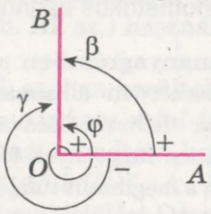
A szög fokmértéke ($1° = \frac{\pi}{180}$ az egyenesszög 180-ad része)

Minden szöghöz hozzárendelhetjük egy α szög fokmértékét, ahol $\alpha \in [0°; 180°]$.



$AOB\angle = 90°$

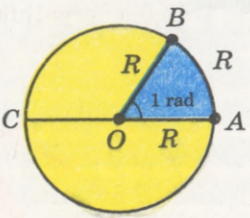
Minden szöghöz hozzárendelhetjük azt az α forgásszöget, amely megalkotta a szöget. A forgásszögnél $\alpha \in (-\infty; +\infty)$.



$AOB\angle = \beta = 90°$
$AOB\angle = \gamma = -270°$
$AOB\angle = \varphi =$
$= 90° + 360° = 450°$

A szögek ívmértéke

1 *radián* olyan középponti szög, melynek ívhossza egyenlő a körvonal sugarával.



$AOB\angle = 1$ radián. Ez azt jelenti, hogy $AB\cup = OA = R$

$AOC\angle = 180° = \pi$ (radián)

$AOC\angle$ — egyenesszög

1 radián $= \frac{180°}{\pi} \approx 57°$

$1° = \frac{\pi}{180}$ radián

[1] A trigonometria szó eredetét a 3. fejezet *Matematikatörténeti adalékok* című részében találod.

Magyarázat és indoklás

1. A szög fogalma. A mértanban a szög alatt olyan síkidomot értünk, melyet egy pontból kiinduló két félegyenes alkot. Például a 23. táblázat 1. pontjában ábrázolt AOB szöget az OA és az OB félegyenesek alkotják.

De szöget kapunk akkor is, ha egy félegyenest kezdőpontja körül elforgatunk. Például, ha az OA félegyenest az O pont körül elforgatjuk, akkor az OA félegyenes kezdeti helyzete és az OB félegyenes szintén egy AOB szöget alkot. Jegyezzük meg, hogy az OA félegyenest az óramutató járásával egy irányba és ellenkező irányba is elforgathatjuk.

2. Szögmérés. Az előbb megfogalmazott definícióknak megfelelően a szögmérést is kétféleképpen értelmezhetjük.

A mértanban minden szöghöz hozzárendelhetjük a *fokmértékét,* amely 0° és 180° közé eső mennyiség. Például az AOB derékszög (23. táblázat 2. pontja) fokmértéke $AOB\angle = 90°$ (emlékezzetek vissza, hogy 1° az egyenesszög $\frac{1}{180}$-ad része).

Forgásszögekre az óramutató járásával ellenkező irányt fogadták el **pozitív iránynak,** az óramutató járásával megegyező irányt pedig **negatív iránynak.**

Ezért a forgásszögek mértéke pozitív is és negatív is lehet. Például, ha az AOB szög OA és OB szárai egymásra merőlegesek, és úgy kaptuk, hogy az OA félegyenest forgattuk el 90°-ra az óramutató járásával ellenkező irányba, akkor a β szög fokmértéke (lásd a 23. ábra 2. pontját) +90° (vagy csak 90°). Ha viszont ugyanezt az AOB szöget úgy alkottuk, hogy az OA félegyenest 270°-kal forgattuk el az óramutató járásával megegyező irányba, akkor (egy teljes kör 360°) a γ szög fokmértéke –270°. De ugyanezt a szöget kapjuk abban az esetben is, ha az OA félegyenest az óramutató járásával ellenkező irányba forgatjuk el 90°-kal és még egy teljes fordulattal. Ebben az esetben a φ szög fokmértéke $90° + 360° = 450°$. Több teljes fordulatot is tehetünk.

Az OA félegyenes mindig elfordítható (az óramutató járásával ellenkező vagy megegyező irányba) bármilyen pozitív vagy negatív számra, ami lehet egy szög fokmértékének a mérőszáma, így mindig értelmezhető az AOB forgásszög. Ezért a forgásszögek fokmértékének mérőszáma $-\infty$-től $+\infty$-ig bármilyen valós szám lehet.

Szögmérésnél egységnyi szöget választanak, és ennek a segítségével határozzák meg a többi szög nagyságát.

Egységnyi szögnek választható bármely szögnagyság.

Emlékezzetek vissza, hogy az egyenesszög $\frac{1}{180}$-ad része a fok (1°).

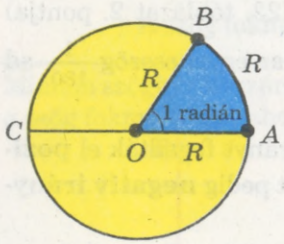
A technikában egységnyi szögnek a teljes fordulatot fogadták el (megjegyezzük, hogy 1° a teljesszög $\frac{1}{360}$-ad része).

A hajózás szögmértékegysége a hajózási vonás, amely a teljesszög $\frac{1}{32}$-e.

A matematikában és a fizikában szögek mérésére a fokmértéken kívül az *ívmértéket* is használják.

Vegyünk egy tetszőleges körvonalat.

1 *radián* olyan középponti szög mértéke, amelynek ívhossza a körvonal sugarával egyenlő.



102. ábra

Tehát, ha az AOB szög mértéke 1 radián (lásd a 102. ábrát), akkor $AB \cup = OA = R$.

Állapítsuk meg a fokmérték és az ívmérték közötti összefüggést.

Az AOC középponti szöghöz, ami egyenesszög, tehát 180° (102. ábra) egy félkörvonal tartozik, melynek hossza πR. 1 radiánhoz R hosszúságú ívhossz tartozik, ezért az egyenesszög ívmértéke $\frac{\pi R}{R} = \pi$. Tehát

$180° = \pi$ radián.

A kapott azonosságból következik, hogy

$1° = \frac{\pi}{180}$ radián,

1 radián $= \frac{180°}{\pi} \approx 57°$.

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Fejezzük ki radiánokban a fokokban megadott szögeket: 30°; 45°; 60°; 90°; 270°; 360°!

▶ Mivelhogy a 30°-os szög a 180°-os szög $\frac{1}{6}$, ezért a $180° = \pi$ (rad) egyenlőségből kapjuk, hogy $30° = \frac{\pi}{6}$ (rad).

Hasonlóképpen határozhatjuk meg a többi szög ívmértékét is.

Általános esetben $1° = \frac{\pi}{180}$ radián, ezért

$45° = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}$ (rad); $60° = \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3}$ (rad); $90° = \frac{\pi}{2}$ (rad);

$270° = \frac{3\pi}{2}$ (rad); $360° = 2\pi$ (rad). ◁

Figyelembe véve, hogy a fentebb meghatározott szögek ívmértékét a továbbiakban gyakran fogjuk használni, ezért táblázatba foglaltuk.

25. táblázat

Fokmérték	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Ívmérték	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Megjegyzés. Nagyon gyakran az ívmérték mértékegységét, a radiánt (vagy rövidítve *rad*) nem szokták kiírni. Például $90° = \frac{\pi}{2}$ radián helyett röviden csak annyit írnak, hogy $90° = \frac{\pi}{2}$.

2. példa. Fejezzük ki fokokban a radiánokban megadott szögeket: $\frac{\pi}{10}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; 5!

▶ Mivel $\frac{\pi}{10}$ a π ívmértékű szög $\frac{1}{10}$-e, ezért $\pi = 180°$ egyenlőségből kapjuk, hogy $\frac{\pi}{10} = 18°$. Hasonlóképpen határozhatjuk meg a $\frac{2\pi}{3}$ és $\frac{3\pi}{4}$ szögeket fokokban.

Általános esetben, mivel 1 radián $= \frac{180°}{\pi}$, ezért

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 120°$; $\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = 135°$; $5 = 5 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{900°}{\pi} \approx 286°$. ◁

Ellenőrző kérdések

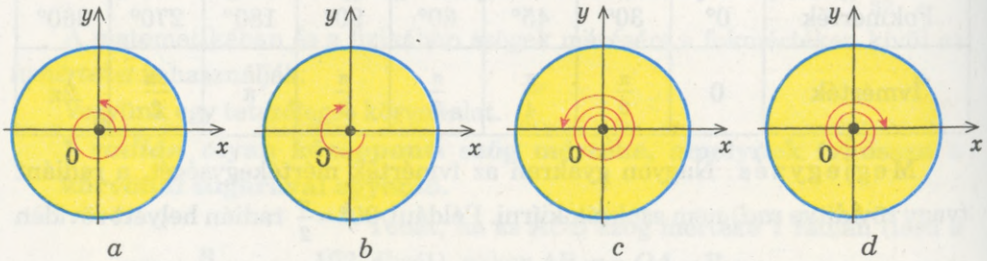
1. Magyarázd meg, hogyan keletkeztethető szög egy félegyenes kezdőpontja körüli elforgatásával! Hogyan mérjük ebben az esetben a szög nagyságát?
2. Hogyan értelmezhető egy 450°-os szög; –225°-os szög? Ábrázold ezeket a szögeket!
3. Hogyan értelmezhető az 1°-os szög?
4. Mi az 1 radián?
5. Hány fokos a π radián ívmértékű szög?
6. Példákon magyarázd meg, hogyan váltható át a fokokban megadott szög radiánba, és fordítva, a radiánban megadott szög fokokba!

Gyakorlatok

1°. Ábrázold azt a szöget, melyet az OA félegyenes súrol, ha az O pont körül elforgatjuk az alábbi szögekkel:

1) 270°; 2) –270°; 3) 720°; 4) –90°;
5) 225°; 6) –45°; 7) 540°; 8) –180°;
9) 360°; 10) –60°!

2°. Hány fokosak a 103. ábrán látható forgásszögek?



103. ábra

3. Váltsd át radiánba a következő fokokban megadott szögeket:

1°) 225°; 2°) 36°; 3) 100°;
4) –240°; 5) –22,5°; 6) –150°!

4. Váltsd át fokokba a következő radiánban megadott szögeket:

1) 3π; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $-\frac{2\pi}{5}$; 4) $\frac{7\pi}{6}$;
5) $-\frac{\pi}{18}$; 6) $\frac{11\pi}{6}$; 7) $-\frac{\pi}{8}$; 8) 3!

5. Számológéppel (vagy táblázattal) add meg az alábbi fokokban megadott szögeket radiánban:

1) 27°; 2) 132°; 3) 43°; 4) 114°!

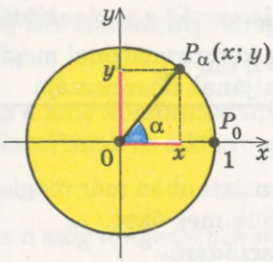
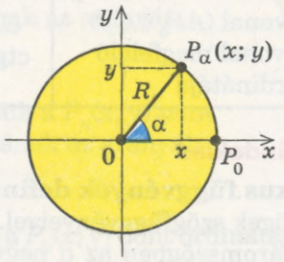
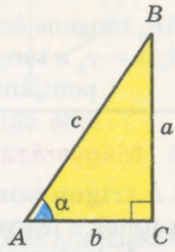
6. Számológéppel (vagy táblázattal) add meg az alábbi radiánban megadott szögeket fokokban:

1) 0,5585; 2) 0,8098; 3) 3,1416; 4) 4,4454!

17. §. SZÖG- ÉS SZÁMARGUMENTUMÚ TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

26. táblázat

1. A trigonometrikus függvények definíciói

egységnyi sugarú körvonalból ($R = 1$)	tetszőleges sugarú körvonalból (R – a körvonal sugara)	derékszögű háromszögből (hegyesszögekre)
		
$\sin\alpha = y$ — a P_α pont ordinátája	$\sin\alpha = \frac{y}{R}$	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$
$\cos\alpha = x$ — a P_α pont abszcisszája	$\cos\alpha = \frac{x}{R}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

2. A számargumentumú trigonometrikus függvények

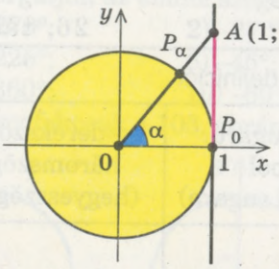
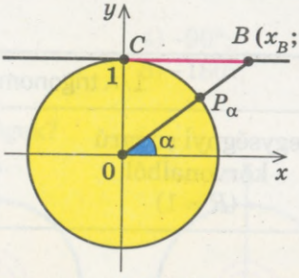
$\sin(\alpha\ \text{szám}) = \sin(\alpha,\ \text{a szög ívmértéke})$

$\cos(\alpha\ \text{szám}) = \cos(\alpha,\ \text{a szög ívmértéke})$

$\operatorname{tg}(\alpha\ \text{szám}) = \operatorname{tg}(\alpha,\ \text{a szög ívmértéke})$

$\operatorname{ctg}(\alpha\ \text{szám}) = \operatorname{ctg}(\alpha,\ \text{a szög ívmértéke})$

A 26. táblázat folytatása

3. A tangens és a cotangens értelmezése	
	
AP_0 tangens érintővonal ($AP_0 \parallel Oy$) $\text{tg}\alpha = y_A$ a tangensvonal megfelelő pontjának ordinátája	CB cotangens érintővonal ($CB \parallel Ox$) $\text{ctg}\alpha = x_B$ a kotangensvonal megfelelő pontjának abszcisszája

Magyarázat és indoklás

1. A trigonometrikus függvények definíciói. A mértanban már megismerkedtetek a hegyesszögek szögfüggvényeivel. Ismételjük meg őket.

A derékszögű háromszögben az α hegyesszög *szinuszának* nevezzük az α szöggel szembeni befogó és az átfogó arányát: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ (104. ábra).

A derékszögű háromszögben az α hegyesszög *koszinuszának* nevezzük az α szög melletti befogó és az átfogó arányát: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

A derékszögű háromszögben az α hegyesszög *tangensének* nevezzük az α szöggel szembeni és az α szög melletti befogó arányát: $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$.



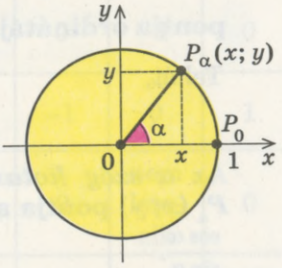
104. ábra

A derékszögű háromszögben az α hegyesszög *kotangensének* nevezzük a α szög melletti és az α szöggel szembeni befogó arányát: $\text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$.

Mértanból már igazoltátok, hogy a hegyesszög szinusza, koszinusza csak a szög nagyságától függ, és nem függ a derékszögű háromszög oldalhosszaitól, sem a háromszög síkbeli elhelyezkedésétől. Tehát a szinusz, a koszinusz (és így a tangens és a kotangens is) csak a szög függvényei, ezeket a függvényeket *trigonometrikus függvényeknek* nevezzük.

Úgyszintén mértanból már tanultátok, hogyan értelmezhetők a 0° és 180° közé eső szögek trigonometrikus függvényei. Ezeket a meghatározásokat alkalmazhatjuk bármilyen szögnagyságra. Ismételjük meg őket (igaz olyan α szögekre fogjuk alkalmazni, ahol α $-\infty$ és $+\infty$ közé esik).

Helyezzünk el egy R sugarú körvonalat úgy a koordináta-rendszerben, hogy a középpontja az origóban legyen. Jelöljük P_0-val a körvonal és az abszcisszatengely pozitív részének metszéspontját (105. ábra). Forgassuk el az OP_0 félegyenest az O pont körül. Egy α szöggel való elforgatásnál a P_0 pont képét jelöljük P_α (azt is mondhatjuk, hogy az origó körüli α ívmértékű szöggel való elforgatás az OP_0 sugarat az OP_α sugárba viszi át, a P_0 pontot a P_α pontba). Megemlítjük, ha $\alpha > 0$, akkor az OP_0 sugarat az óramutató járásával ellentétes irányba forgatjuk, ha $\alpha < 0$, akkor a vele megegyező irányba.



105. ábra

Jelöljük a P_α pont koordinátáit $(x; y)$-nal, akkor az α *szög szinuszának* nevezzük a $P_\alpha(x; y)$ pont ordinátájának és a körvonal sugarának az arányát:

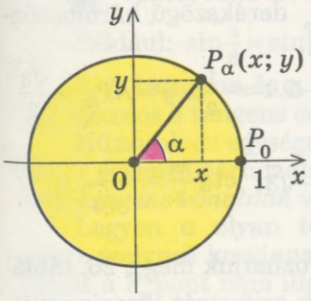
$$\sin\alpha = \frac{y}{R};$$

az α *szög koszinuszának* nevezzük a $P_\alpha(x; y)$ pont abszcisszájának és a körvonal sugarának az arányát:

$$\cos\alpha = \frac{x}{R};$$

az α *szög tangensének* nevezzük a $P_\alpha(x; y)$ pont ordinátájának és abszcisszájának az arányát: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ (természetesen ha $x \neq 0$);

az α *szög kotangensének* nevezzük a $P_\alpha(x; y)$ pont abszcisszájának és ordinátájának az arányát: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ (ha $y \neq 0$).



106. ábra

A hegyesszögek trigonometrikus függvényeihez hasonlóan $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ értékei csak a szögtől függenek és nem függenek az R[1]-től.

Azt a körvonalat, melynek a sugara 1 egység és a középpontja az origóban van, *egységsugarú körvonalnak* nevezzük.

Forgassuk el a P_0 (1; 0) pontot α szöggel. Jelöljük a képét $P_\alpha(x; y)$ (tehát az origó körüli α ívmértékű szöggel való elforgatás az OP_0 sugarat az OP_α sugárba viszi át) (106. ábra).

Az α *szög szinuszának* nevezzük az egységsugarú körvonal $P_\alpha(x; y)$ pontjának ordinátáját:

[1] Ez abból következik, hogy bármely két koncentrikus kör hasonló (a hasonlóság középpontja az origó, a k arányossági együttható pedig a sugarak aránya), tehát az ezekre a körvonalakra illeszkedő P_α pontok egymás képei. Tehát bármely körvonalban a trigonometrikus függvények definícióiban szereplő törtek számlálóját és nevezőjét is meg kell szorozni k-val, vagyis a tört értéke nem változik.

$\sin \alpha = y$.

Az α *szög koszinuszának* nevezzük az egységsugarú körvonal $P_\alpha(x; y)$ pontjának abszcisszáját:

$\cos \alpha = x$.

Az α *szög tangensének* nevezzük az egységsugarú körvonal $P_\alpha(x; y)$ pontja ordinátájának és abszcisszájának arányát: vagyis $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Tehát,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\text{ahol } \cos \alpha \neq 0).$$

Az α *szög kotangensének* nevezzük az egységsugarú körvonal $P_\alpha(x; y)$ pontja abszcisszájának és ordinátájának arányát: vagyis $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

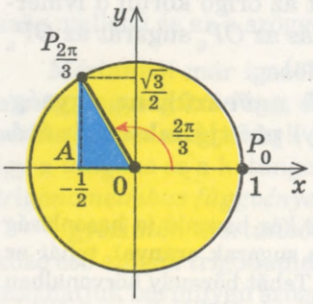
Tehát,

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\text{ahol } \sin \alpha \neq 0).$$

Példa. A definíció alapján határozd meg $\frac{2\pi}{3}$ radián ívmértékű szög szinusz, koszinusz tangens és kotangens értékét!

Vegyünk egy egységsugarú körvonalat (107. ábra). A $\frac{2\pi}{3}$ radiánnal való elforgatás az OP_0 sugarat az $OP_{\frac{2\pi}{3}}$ sugárba viszi át (a P_0 pont képe a $P_{\frac{2\pi}{3}}$ pont). A $P_{\frac{2\pi}{3}}$ pont koordinátáit meghatározhatjuk az $OAP_{\frac{2\pi}{3}}$ derékszögű háromszögből (hegyesszögei 60° és 30°, átfogója 1 egység): $x = -OA = -\frac{1}{2}$; $y = AP_{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tehát $\sin \frac{2\pi}{3} = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \frac{2\pi}{3} = x = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{2\pi}{3}} = -\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. ◁



107. ábra

Hasonlóképpen határozhatjuk meg a 26. táblázatban feltüntetett szögek szinuszát, koszinuszát, tangensét és kotangensét.

Megjegyezzük, hogy ezzel a módszerrel csak néhány szög trigonometrikus értékét tudjuk kiszámolni. Tetszőleges szög trigonometrikus értékét táblázatból vagy számológéppel tudjuk meghatározni.

27. táblázat

α	fokokban	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	radiánban	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nem létezik	0	nem létezik	0
$\operatorname{ctg}\alpha$		nem létezik	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nem létezik	0	nem létezik

2. Számargumentumú trigonometrikus függvények. Az előbbi definíciók lehetőséget adnak arra, hogy ne csak szögek trigonometrikus függvényeit értelmezzük, hanem számargumentumú trigonometrikus függvényeket is, ha α a szög ívmértéke. Vagyis

az α szám szinusza – azon szög szinusza, melynek ívmértéke α radián;

az α szám koszinusza – azon szög koszinusza, melynek ívmértéke α radián.

Például: $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right) = \sin 30° = \frac{1}{2}$ (lásd a 25. táblázat 2. pontját).

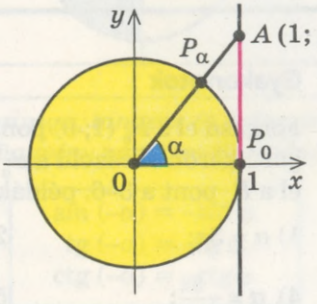
3. A tangens és a kotangens értelmezése. Néhány feladat megoldásánál hasznos a tangens és a kotangens értelmezését alkalmazni.

Húzzunk az egységsugarú körvonal P_0 pontjába AP_0 érintőt a körvonalhoz. Ez az egyenes párhuzamos az Oy tengellyel (108. ábra). Ezt a vonalat szokták még *tangens vonalnak* vagy *tangens érintőnek* is nevezni.

Legyen α olyan tetszőleges szám (vagy szög), melynek koszinusza nem nulla: $\cos\alpha \neq 0$. Tehát a P_α pont nem illeszkedik az Oy tengelyre és az OP_α félegyenes az A pontban metszi az érintőt.

Mivel az OP_α keresztülmegy az origón, így az egyenlete felírható $y = kx$ alakban. Erre az egyenesre illeszkedik a P_α pont, melynek koordinátái $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, tehát kielégítik az $y = kx$ egyenest, vagyis $\sin\alpha = k\cos\alpha$. Innét

$$k = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$



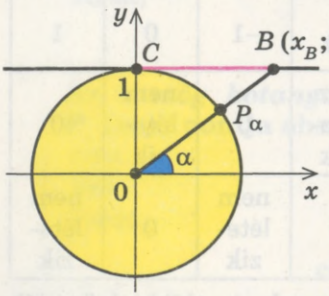
108. ábra

Tehát az OP_α egyenes egyenlete: $y = (\operatorname{tg} \alpha)\, x$.

Az AP_0 egyenes egyenlete: $x = 1$. Ahhoz, hogy meghatározzuk az A pont ordinátáját, elegendő az OP_α egyenes egyenletébe behelyettesíteni az $x = 1$ értéket. Azt kapjuk, hogy $y_A = \operatorname{tg} \alpha$.

Tehát

az α szög (szám) tangense – az egységsugarú körvonalhoz az (1; 0) pontba húzott érintő megfelelő pontjának az ordinátája.



109. ábra

Hasonlóképpen értelmezhetjük a kotangenst is. Húzzunk C (0; 1) koordinátájú ponton keresztül CB érintőt az egységsugarú körvonalhoz. Ez az egyenes (nevezik még kotangens érintőnek) párhuzamos az Ox tengellyel (109. ábra).

Ha α olyan tetszőleges szám (vagy szög), melynek szinusza nem nulla, tehát $\sin \alpha \neq 0$ (vagyis a P_α pont nem illeszkedik az Ox tengelyre), akkor az OP_α félegyenes egy B $(x_B; 1)$ pontban metszi az érintőt.

Az előbbi indokláshoz hasonlóan $x_B = \operatorname{ctg} \alpha$.

Vagyis

az α szög (szám) kotangense – az egységsugarú körvonalhoz a (0; 1) pontba húzott érintő megfelelő pontjának az abszcisszája.

Ellenőrző kérdések

1. Add meg, hogyan értelmezzük a derékszögű háromszögben a hegyesszög szögfüggvényeit!
2. Add meg tetszőleges szögre a trigonometrikus függvények definícióit:
   a) origó középpontú R sugarú körvonallal;
   b) egységsugarú körvonallal!
3. Hogyan értelmezzük az α szám szinuszát, koszinuszát, tangensét, kotangensét?

Gyakorlatok

1°. Forgasd el a P_0 (1; 0) pontot az origó körül a megadott szöggel és egységsugarú körön ábrázold a P_α képet! Milyen koordináta-negyedben helyezkedik el a P_α pont a 3–6. példák esetén?

1) $\alpha = 3\pi$; 2) $\alpha = -4\pi$; 3) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$;

4) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 5) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$; 6) $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

2. Határozd meg sin α, cos α, tg α és ctg α értékét, ha:

1) $\alpha = 3\pi$; 2) $\alpha = -4\pi$; 3) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$;

4) $\alpha = \frac{5\pi}{2}$; 5*) $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$; 6*) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$!

3°. A definíció alapján határozd meg sin α, cos α értékének előjelét, ha:

1) $\alpha = \frac{6\pi}{5}$; 2) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$; 3) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$;

4) $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$; 5) $\alpha = \frac{\pi}{10}$!

4*. A tangens érintő alapján határozd meg tg α értékének előjelét, ha:

1) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = \frac{11\pi}{6}$;

4) $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha = \frac{9\pi}{4}$!

5*. A definíció alapján határozd meg ctg α értékének előjelét, ha:

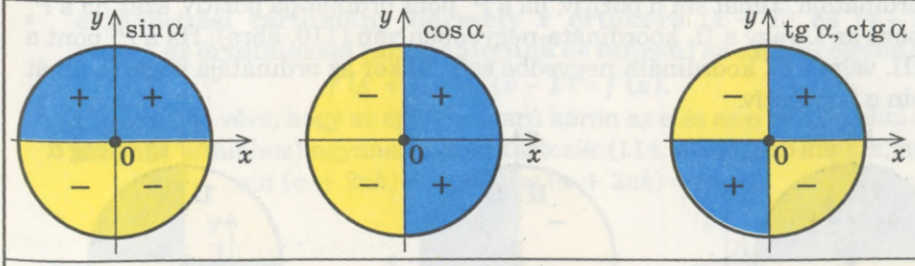
1) $\alpha = -\frac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = -\frac{11\pi}{6}$;

4) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha = -\frac{9\pi}{4}$!

18. §. TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

28. táblázat

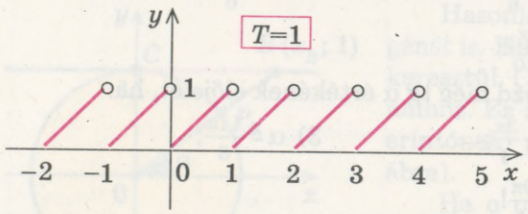
1. A trigonometrikus függvények előjelei



2. Paritás

A koszinusz függvény páros függvény	*A szinusz, tangens és kotangens függvény páratlan függvény*
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

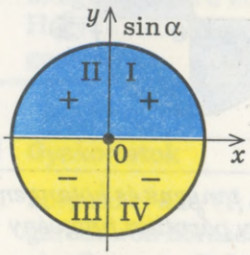
A 28. táblázat folytatása

<table>
<tr><th colspan="2">3. Periodicitás</th></tr>
<tr><td colspan="2">Az $f(x)$ függvény periodikus és T a periódusa, $T \neq 0$, ha az értelmezési tartomány bármely x értékére $(x + T)$ és $(x - T)$ is eleme az értelmezési tartománynak és teljesül az $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$ egyenlőség</td></tr>
<tr><td>$y = \{x\}$ az x szám törtrésze
 
</td><td>A függvény grafikonja T hosszúságú intervallumokon ismétlődik.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ha T egy függvény periódusa, akkor $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, \ldots, \pm kT$ szintén periódusa az adott függvénynek, ahol k természetes szám ($k \in N$).</td></tr>
<tr><td>$\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$</td><td>A sin x és cos x függvények 2π szerint periodikusak.</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$</td><td>A tg x és ctg x függvények π szerint periodikusak.</td></tr>
<tr><td colspan="2">A $T = 2\pi$ közös periódusa minden trigonometrikus függvénynek: a sin x, cos x, tg x és ctg x függvénynek is.</td></tr>
</table>

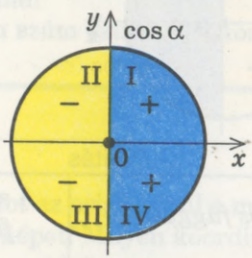
Magyarázat és indoklás

1. A trigonometrikus függvények előjeleit a meghatározásból könnyű megállapítani.

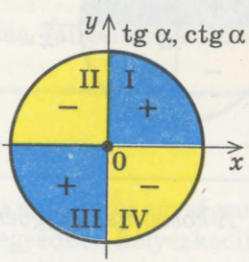
Például sin α az egységsugarú körvonal α szöghöz rendelt P_α pontjának ordinátája. Tehát sin α pozitív, ha a P_α pont ordinátája pozitív, azaz ha a P_α pont az I. vagy a II. koordináta-negyedben van (110. ábra). Ha a P_α pont a III. vagy a IV. koordináta-negyedbe esik, akkor az ordinátája negatív, tehát sin α is negatív.



110. ábra



111. ábra



112. ábra

Hasonlóképpen, figyelembe véve, hogy cos α az α szöghöz rendelt P_α pontjának abszcisszája, így cos $\alpha > 0$ az I. és IV. negyedben (P_α pont abszcisszája pozitív) és cos $\alpha < 0$ a II. és III. negyedben (P_α pont abszcisszája negatív) (111. ábra).

Mivel $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ és $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, ezért $\operatorname{tg}\alpha > 0$ és $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, ha $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ azonos előjelű, vagyis az I. és III. koordináta-negyedben; $\operatorname{tg}\alpha < 0$ és $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, ha $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ különböző előjelű, vagyis a II. és IV. negyedben (112. ábra). ○

2. Trigonometrikus függvények paritása

● Ahhoz, hogy a trigonometrikus függvények paritását vizsgáljuk, megjegyezzük, hogy az egységsugarú körvonal P_α és $P_{-\alpha}$ pontjai tükrösek az Ox tengelyre (113. ábra). Vagyis ezen pontok abszcisszái egyenlők, ordinátáik ellentett értékek. Tehát $\cos(-\alpha) = x_{P_{-\alpha}} = x_{P_\alpha} = \cos\alpha$,

$\sin(-\alpha) = y_{P_{-\alpha}} = -y_{P_\alpha} = -\sin\alpha$.

Ez azt jelenti, hogy a **$\cos x$ függvény páros függvény, a $\sin x$ függvény páratlan.**

Innen $\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Tehát a **$\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ függvény páratlan.**

A trigonometrikus függvények paritását alkalmazhatjuk negatív szögek (számok) trigonometrikus értékeinek meghatározásakor.

Például, ▶ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ◁

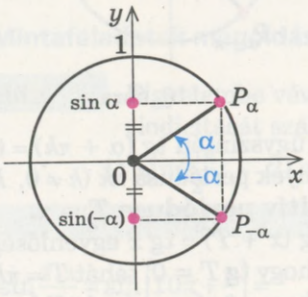
3. Trigonometrikus függvények periodicitása. A természetben nagyon sok folyamat és jelenség ismétlődik (például a Föld Nap körüli forgása, az inga mozgása). Az ilyen folyamatok leírásához periodikus függvényeket használnak.

Az $y = f(x)$ függvény *periodikus* és T a periódusa, $T \neq 0$, ha az értelmezési tartomány bármely x értékére $(x + T)$ és $(x - T)$ is eleme az értelmezési tartománynak és teljesül az alábbi egyenlőség

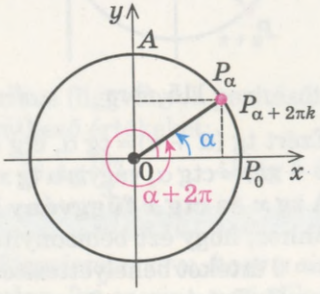
$$f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$

● Figyelembe véve, hogy az egységsugarú körön az α és az $\alpha + 2\pi k$, ahol $k \in \mathbf{Z}$ szöghöz (számhoz) ugyanaz a pont tartozik (114. ábra), azt kapjuk, hogy

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha.$$



113. ábra



114. ábra

Tehát a sin x és cos x függvények periodikusak, periódusuk $2\pi k$ ($k \neq 0$). Ha $k = 1$, akkor a sin x és cos x függvények periódusa $T = 2\pi$.

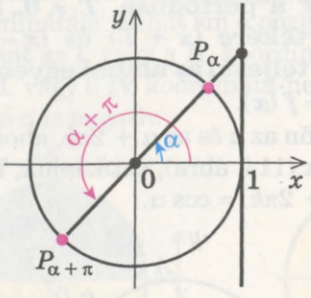
Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a függvényeknek ennél kisebb pozitív periódusa nem lehet. Annak igazolására, hogy a koszinuszfüggvény legkisebb pozitív periódusa $T = 2\pi$, tételezzük fel, hogy $T > 0$ szerint is periodikus a cos x függvény. Akkor viszont bármely x-re teljesül a cos $(x + T) = \cos x$ egyenlőség. $x = 0$ értékre kapjuk, hogy cos $T = 1$. Ez viszont azt jelenti, hogyha a P_0 pontot T szöggel elforgatjuk, akkor a P_0 pontba jutunk, tehát $T = 2\pi k$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. Ezért a cos x függvény minden periódusa 2π egész számú többszöröse, tehát

2π a koszinuszfüggvény legkisebb pozitív periódusa. ○

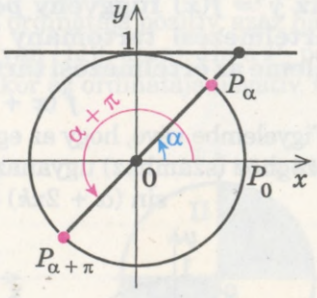
● Ahhoz, hogy igazoljuk, hogy a sin x függvény legkisebb pozitív periódusa is $T = 2\pi$, elegendő a sin $(x + T) = \sin x$ egyenlőségbe, mely bármely x-re teljesül, behelyettesíteni az $x = \frac{\pi}{2}$ értéket. A $\sin\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ egyenlőséget kapjuk. Ez viszont azt jelenti, hogy a P_0 pontot $T + \frac{\pi}{2}$ szöggel elforgatva az A (0;1) pontba jutunk (114. ábra), vagyis $T + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, tehát $T = 2\pi k$. Ezért a sin x függvény minden periódusa 2π egész számú többszöröse, tehát

2π a szinuszfüggvény legkisebb pozitív periódusa. ○

● Figyelembe véve, hogy a P_α és $P_{\alpha+\pi}$ pontok középpontosan tükrösek az origóra, ezért a tangens érintőn (115. ábra) és a kotangens érintőn (116. ábra) ugyanaz a pont felel meg nekik.



115. ábra



116. ábra

Ezért tg $(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha$, ctg $(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg} \alpha$, úgyszintén tg $(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg} \alpha$ és ctg $(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg} \alpha$, vagyis a tg x és ctg x függvények periódusa πk ($k \neq 0$, $k \in \mathbf{Z}$).

A tg x és ctg x függvény legkisebb pozitív periódusa $T = \pi$.

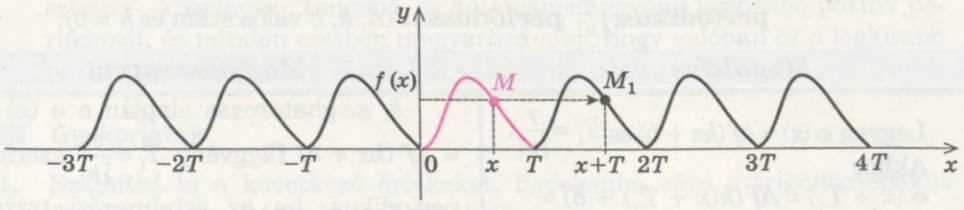
Ahhoz, hogy ezt bebizonyítsuk, elegendő tg $(x + T) = \operatorname{tg} x$ egyenlőségbe az $x = 0$ értéket behelyettesíteni. Azt kapjuk, hogy tg $T = 0$, tehát $T = \pi k$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. Ezért a tg x függvény minden periódusa π egész számú többszöröse,

vagyis π a tangens függvény legkisebb pozitív periódusa. Hasonlóképpen a ctg x függvény esetében a megfelelő egyenlőségbe elegendő az $x=\frac{\pi}{2}$-t helyettesíteni. ○

● Ahhoz, hogy elképzelésünk legyen az $y = f(x)$ *periodikus függvény grafikonjáról*, ismételjük meg a függvény grafikonjának meghatározását. Az $y = f(x)$ függvény grafikonja azon M pontok összessége a síkban, melynek koordinátáira igaz, hogy $(x; y) = (x; f(x))$. A grafikon pontjainak első koordinátája az értelmezési tartomány tetszőleges eleme. Válasszuk ki az M pont első koordinátájának az $x + T$ értéket (általános alakban az $x + kT$ értéket k egészekre) és vegyük figyelembe, hogyha egy függvény periodikus, akkor $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$ (általános esetben $f(x + kT) = f(x)$). Ebben az esetben a függvény grafikonjára illeszkedik az

$$(x + T; y) = (x + T; f(x + T)) = (x + T; f(x))$$

koordinátájú M_1 pont is. Ha az M pontot az Ox tengely mentén párhuzamosan eltoljuk T egységgel, akkor az az M_1 pontba megy át (117. ábra). Általános esetben az $M_1(x + T; f(x))$ pontot az M pont kT egységgel történő párhuzamos eltolásával kapjuk meg az Ox tengely mentén. Tehát egy periodikus függvény grafikonja minden T hosszúságú szakaszon ismétlődik. Ezért **ahhoz, hogy ábrázoljunk egy T periódusú függvényt, elegendő megrajzolni egy T hosszúságú szakaszon, például a $[0; T]$ intervallumon, majd a kapott görbét párhuzamosan eltolni jobbra is és balra is az Ox tengely mentén kT egységgel, ahol k természetes szám.** ○



117. ábra

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Figyelembe véve a trigonometrikus függvények paritását és periodicitását számítsuk ki a következő értékeket:

1) $\sin\frac{21\pi}{2}$; 2) $\cos(-405°)$; 3) $\operatorname{tg}\frac{16\pi}{3}$; 4) $\operatorname{ctg}(-570°)$!

Megoldás	*Magyarázat*
1) ▶ $\sin\frac{21\pi}{2}=\sin\left(10\pi+\frac{\pi}{2}\right)=$	1) Figyelembe véve, hogy a $\sin x$ függvény 2π szerint periodikus, ezért

$$= \sin\left(5 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1. \triangleleft$$

2) ▶ $\cos(-405°) = \cos 405° =$

$$= \cos(360° + 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}. \triangleleft$$

3) ▶ $\operatorname{tg}\frac{16\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(5\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}. \triangleleft$

4) ▶ $\operatorname{ctg}(-570°) = -\operatorname{ctg} 570° =$

$= -\operatorname{ctg}(540° + 30°) =$

$= -\operatorname{ctg}(180° \cdot 3 + 30°) =$

$= -\operatorname{ctg} 30° = -\sqrt{3}. \triangleleft$

az argumentumot írjuk fel olyan összegként, melynek egyik összeadandója a periódus egész számú többszöröse (10π), és alkalmazzuk a $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$ ($k \in \mathbf{Z}$) azonosságot.

2) Először a koszinuszfüggvény párosságát alkalmazzuk, vagyis hogy $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, majd $2\pi = 360°$ szerinti periodikusságát, azaz hogy $\cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha$.

3) A tangens függvény π szerint periodikus, ezért az argumentumot olyan összegként írjuk fel, melynek egyik összeadandója a periódus egész számú többszöröse (azaz 5π), majd alkalmazzuk a $\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha$ azonosságot.

4) Először a kotangensfüggvény páratlanságát vesszük figyelembe, vagyis hogy $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$, majd $\pi = 180°$ szerinti periodikusságát:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + 180° \cdot k) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

2*. példa. Bizonyítsuk be a következő állítást: **ha az $y = f(x)$ függvény T szerint periodikus, akkor az $y = Af(kx + b)$ függvény is periodikus, $\frac{T}{|k|}$ periódussal** (A, k, b valós szám és $k \neq 0$).

Megoldás

▶ Legyen $\varphi(x) = Af(kx + b)$ és $T_1 = \frac{T}{|k|}$. Akkor

$$\varphi(x + T_1) = Af(k(x + T_1) + b) =$$

$$= Af\left(k\left(x + \frac{T}{|k|}\right) + b\right) = Af(kx \pm T + b) =$$

$$= Af(kx + b \pm T) = Af(kx + b) = \varphi(x).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $\varphi(x) = Af(kx + b)$ függvény periodikus, periódusa pedig

$$T_1 = \frac{T}{|k|}. \triangleleft$$

Magyarázat

A meghatározás alapján a $\varphi(x) = Af(kx + b)$ függvény $T_1 = \frac{T}{|k|}$ szerint periodikus, ha az értelmezési tartomány bármely x és $x + T_1$ argumentumára a φ függvényértékei egyenlők, vagyis $(x + T_1) = \varphi(x)$. Az indoklás során egyrészt azt vettük figyelembe, hogyha $k > 0$, akkor kiegyenlíti a $k \cdot \frac{T}{k} = T$, és ha $k < 0$, akkor $k \cdot \frac{T}{-k} = -T$; másrészt pedig azt, hogyha az $f(x)$ függvény a feltétel szerint T periódusú, akkor $f(x_1 \pm T) = f(x_1)$, ahol $x_1 = kx + b$.

A második példában igazolt állítás alapján meghatározható a függvény periódusa.

Például

1) ▶ mivel a $\sin x$ függvény $T = 2\pi$ szerint periodikus, ezért a $\sin 4x$ függvény periódusa:

$$T_1 = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2};$$ ◁

2) ▶ mivel a $\operatorname{tg} x$ függvény $T = \pi$ szerint periodikus, ezért a $\operatorname{tg} \frac{x}{4}$ függvény periódusa:

$$T_1 = \frac{T}{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi.$$ ◁

Ellenőrző kérdések

1. a) Nevezd meg a trigonometrikus függvények előjeleit a különböző koordináta-negyedekben!
   b) Indokold meg a trigonometrikus függvények előjeleit a különböző koordináta-negyedekben!
2. a) A trigonometrikus függvények közül melyek párosak és melyek páratlanok? Hozz fel példákat, hogyan alkalmazható a trigonometrikus függvények paritása értékeik meghatározásánál!
   b) Indokold meg a trigonometrikus függvények paritását!
3. a) Mikor nevezünk egy függvényt periodikusnak? Hozz fel példákat!
   b*) Igazold a trigonometrikus függvény periodikusságát! Nevezd meg a szinusz-, koszinusz-, tangens- és kotangensfüggvény legkisebb pozitív periódusát, és minden esetben magyarázd meg, hogy valóban ez a legkisebb pozitív periódus!

Gyakorlatok

1. Számítsd ki a következő értékeket, figyelembe véve a trigonometrikus függvények paritását és periodicitását:

1) $\cos \frac{19\pi}{3}$; 2) $\sin(-750°)$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$; 4) $\operatorname{ctg} 945°$;

5) $\sin \frac{25\pi}{4}$; 6) $\cos(-3630°)$; 7) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$; 8) $\operatorname{tg} 600°$!

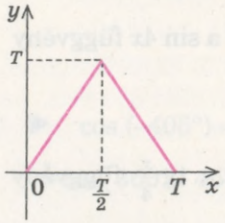
2*. Melyek periodikusak az alábbi függvények közül, és mennyi a legkisebb pozitív periódusok:

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = \sin 2x$; 3) $f(x) = |x|$;
4) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$; 5) $f(x) = 3$?

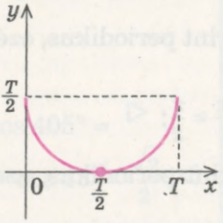
3. Határozd meg az alábbi függvények legkisebb pozitív periódusát:

1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \operatorname{tg} 5x$; 3) $y = \sin \frac{x}{3}$; 4) $y = \operatorname{ctg} 3x$; 5) $y = \cos \frac{2x}{5}$!

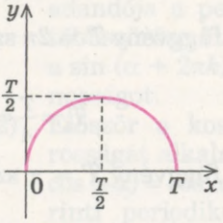
4. A 118–121. ábrákon T szerint periodikus függvények láthatók. Ábrázold ezeket a függvényeket a $[-2T; 3T]$ intervallumon!



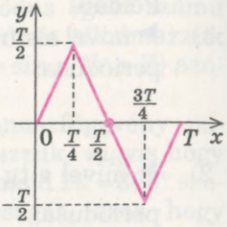
118. ábra



119. ábra



120. ábra



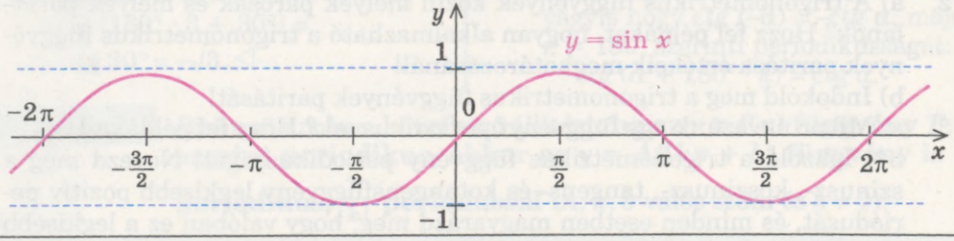
121. ábra

19. §. TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK GRAFIKONJAI ÉS TULAJDONSÁGAI

19.1. Az $y = \sin x$ függvény és tulajdonságai

29. táblázat

Az $y = \sin x$ függvény grafikonja



Az $y = \sin x$ függvény tulajdonságai

1. *Értelmezési tartomány*: $x \in \boldsymbol{R}$ (x – bármely valós szám)
   $\boldsymbol{D(\sin x) = R}$
2. *Értékkészlet*: $y \in [-1; 1]$. $\boldsymbol{E(\sin x) = [-1; 1]}$
3. **Páratlan**: $\sin(-x) = -\sin x$ (a függvény grafikonja szimmetrikus az origóra).
4. *2π szerint periodikus* $\boldsymbol{T = 2\pi}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
5. *A grafikon és a koordinátatengelyek metszéspontjai*: Oy $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ Ox $\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k, \ k \in Z \end{cases}$
6. *Előjelvizsgálat* (*stabil előjelű intervallumok*):
   $\boldsymbol{\sin x > 0, \text{ ha } x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in Z}$
   $\boldsymbol{\sin x < 0, \text{ ha } x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \in Z}$

A 29. táblázat folytatása

7. *Monotonitás:*

A sin x a $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in Z$ intervallumon növekvő, a $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in Z$ intervallumon csökkenő

8. *Szélsőértékek:*

A függvény maximuma 1, melyet az $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$ helyeken vesz fel

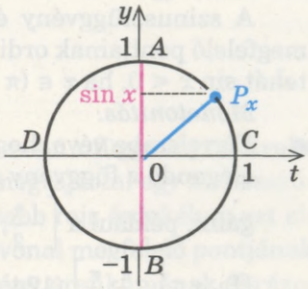
A függvény minimuma –1, melyet az $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$ helyeken vesz fel

Magyarázat és indoklás

A trigonometrikus függvények vizsgálatát a következő séma szerint végezzük: 1) értelmezési tartomány; 2) értékkészlet; 3) paritás; 4) periodikusság; 5) metszéspontok a tengelyekkel; 6) előjelvizsgálat; 7) monotonitás; 8) szélsőértékek.

M e g j e g y z é s. A grafikon és az *Ox* tengely metszéspontjának abszcisszáját (azaz azt argumentum értéket, melynél a függvényérték nulla) *zéushelynek* nevezzük.

Emlékeztetünk, hogy a szinuszérték, az az egységsugarú körvonal megfelelő pontjának ordinátája (122. ábra). Mivel az egységsugarú körvonal bármely pontjának ordinátája meghatározható, ezért az $y = \sin x$ függvény *értelmezési tartománya* a valós számok halmaza. Ezt így írhatjuk le: $\boldsymbol{D\ (\sin x) = R.}$



122. ábra

Az egységsugarú körvonal pontjainak ordinátái –1 és 1 között minden értéket felvesznek, ezért az $y = \sin x$ függvény *értékkészlete*: $y \in [-1; 1]$. Ezt így írhatjuk le:

$$\boldsymbol{E\ (\sin x) = [-1; 1].}$$

Mint látható, a függvény *legnagyobb értéke,* maximuma egy. Ezt az értéket a függvény akkor veszi fel, ha az egységsugarú körvonal megfelelő pontja az *A* pont, vagyis ha $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

A függvény *legkisebb értéke,* minimuma mínusz egy. Ezt az értéket a függvény akkor veszi fel, ha az egységsugarú körvonal megfelelő pontja a *B* pont, vagyis ha $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$.

A 18.§-ban már igazoltuk, hogy a szinuszfüggvény *páratlan*: $\sin(-x) = -\sin x$, tehát a függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.

A 18.§-ban azt is igazoltuk, hogy a szinuszfüggvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa $T = 2\pi$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, tehát a függvény grafikonja minden 2π hosszúságú intervallumon ismétlődik. Tehát ahhoz, hogy ábrázoljuk az $y = \sin x$ függvényt, elegendő megrajzolni egy 2π hosszúságú intervallumon, majd ezt a görbét párhuzamosan eltolni az Ox tengely mentén jobbra is és balra is $kT = 2\pi k$ egységgel, ahol k egész szám.

Ahhoz, hogy meghatározzuk *a grafikon és az ordinátatengely metszéspontját*, elegendő visszaemlékezni, hogy az Oy tengely minden pontjának abszcisszája $x = 0$. Vagyis a megfelelő függvényérték $y = \sin 0 = 0$, tehát a függvény grafikonja átmegy az origón.

Az Ox tengelyen $y = 0$. Tehát meg kell határozni az x azon értékeit, melyekre $\sin x$, azaz az egységsugarú körvonal pontjainak ordinátája egyenlő 0. Ezek az egységsugarú körvonal C és D pontjai, azok a pontok melyeknél $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Előjelvizsgálat. A 18.§-ban már igazoltuk, hogy a szinuszfüggvény értékei pozitívak (vagyis az egységsugarú körvonal megfelelő pontjainak ordinátái pozitívak) az I. és II. koordináta-negyedekben (123. ábra). Vagyis $\sin x > 0$, ha $x \in (0; \pi)$, figyelembe véve a függvény periodicitását, ha $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

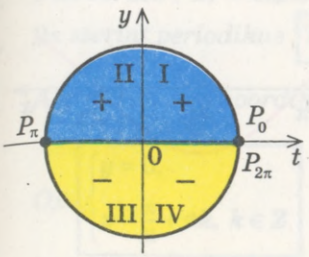
A szinuszfüggvény értékei negatívak (vagyis az egységsugarú körvonal megfelelő pontjainak ordinátái negatívak) a III. és IV. koordináta-negyedekben, tehát $\sin x < 0$, ha $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Monotonitás.

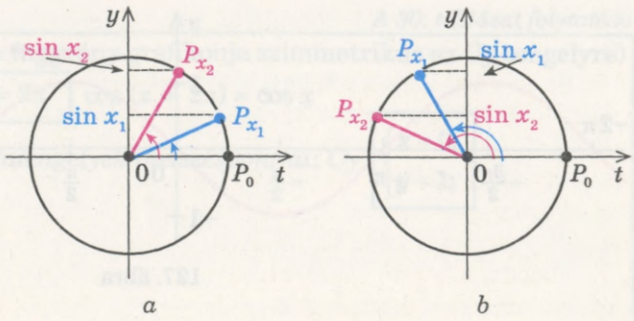
Figyelembe véve, hogy az $f(x) = \sin x$ függvény $T = 2\pi$ szerint periodikus, elegendő a függvény monotonitását egy 2π hosszúságú intervallumon vizsgálni, például a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon.

Ha $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (124. *a* ábra), akkor az x argumentum növelésével $(x_2 > x_1)$ az egységsugarú körvonal megfelelő pontjának ordinátája is növekszik (azaz $\sin x_2 > \sin x_1$), vagyis a függvény ezen az intervallumon növekvő. Figyelembe véve, hogy a szinuszfüggvény periodikus, megállapíthatjuk, hogy a függvény minden $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$ intervallumon növekvő.

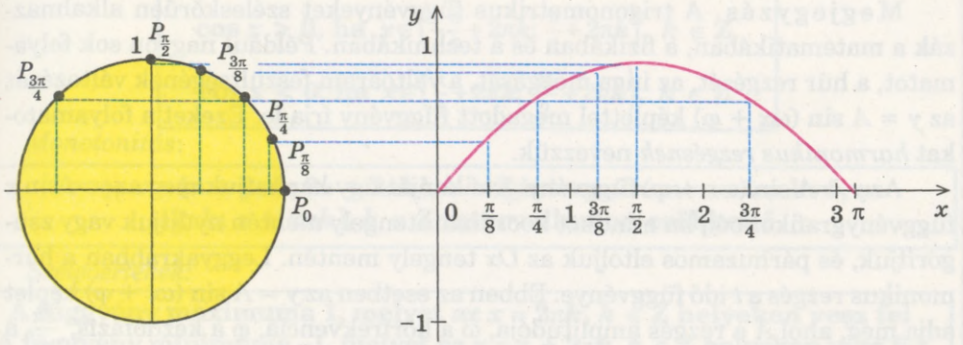
Ha $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (124. *b* ábra), akkor az x argumentum növelésével $(x_2 > x_1)$ az egységsugarú körvonal megfelelő pontjának ordinátája csökken (azaz $\sin x_2 < \sin x_1$), vagyis a függvény ezen az intervallumon csökkenő. Figyelembe véve, hogy a szinuszfüggvény periodikus, megállapíthatjuk, hogy a függvény minden $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$ intervallumon csökkenő. ○



123. ábra



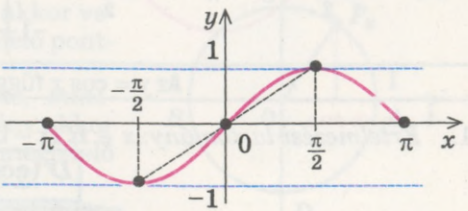
124. ábra



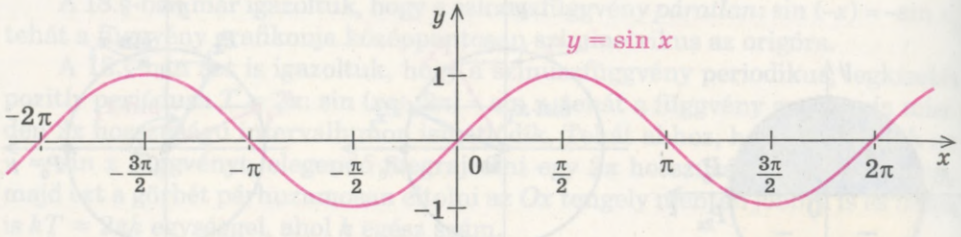
125. ábra

A függvényelemzés alapján megrajzolhatjuk az $y = \sin x$ függvényt. Mivel a $\sin x$ függvény 2π szerint periodikus, ezért elegendő megrajzolni egy 2π hosszúságú, például a $[-\pi; \pi]$ intervallumon. A minél pontosabb rajz érdekében azt alkalmazzuk, hogy a szinuszérték az egységsugarú körvonal megfelelő pontjának az ordinátája. A 125. ábra mutatja az $y = \sin x$ függvény grafikonjának ábrázolását a $[0; \pi]$ intervallumon. Alkalmazva a függvény páratlanságát (grafikonja szimmetrikus az origóra), a függvény grafikonját a $[-\pi; 0]$ intervallumon úgy kapjuk meg, hogy a kapott görbét tükrözzük az origóra (126. ábra).

Mivel mi a grafikont egy 2π hosszúságú intervallumon ábrázoltuk, ezért figyelembe véve, hogy a szinusz függvény periodikus (periódusa 2π), a kapott görbét ismételjük meg minden 2π hosszúságú intervallumon (vagyis párhuzamosan toljuk el az Ox tengely mentén $2\pi k$ egységgel, ahol k egész szám).



126. ábra



127. ábra

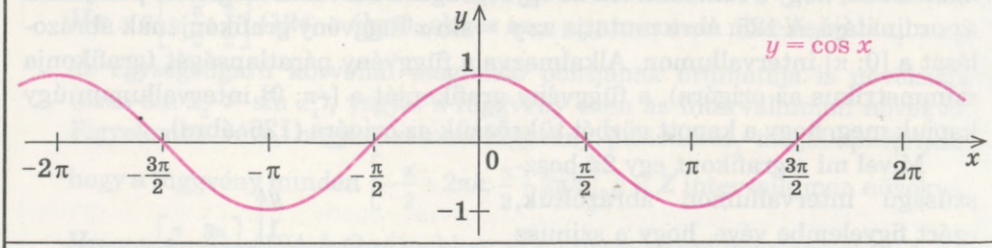
A 127. ábrán látható a kapott grafikon, amit *szinuszoidnak* nevezünk.

Megjegyzés. A trigonometrikus függvényeket széleskörűen alkalmazzák a matematikában, a fizikában és a technikában. Például nagyon sok folyamatot, a húr rezgését, az inga mozgását, a váltóáram feszültségének változását az $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ képlettel megadott függvény írja le. Ezeket a folyamatokat *harmonikus rezgésnek* nevezzük.

Az $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg az $y = \sin x$ függvénygrafikonból, ha mindkét koordinátatengely mentén nyújtjuk vagy zsugorítjuk, és párhuzamos eltoljuk az Ox tengely mentén. Leggyakrabban a harmonikus rezgés a t idő függvénye. Ebben az esetben az $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ képlet adja meg, ahol A a rezgés amplitúdója, ω a körfrekvencia, φ a kezdőfázis, $\frac{2\pi}{\omega}$ a rezgés periódusa.

19.2. Az $y = \cos x$ függvény és tulajdonságai

30. táblázat

Az $y = \cos x$ függvény grafikonja

Az $y = \cos x$ függvény tulajdonságai
1. *Értelmezési tartomány*: $x \in \boldsymbol{R}$ (x – bármely valós szám) **$D(\cos x) = R$**
2. *Értékkészlet*: $y \in [-1; 1]$. **$E(\cos x) = [-1; 1]$**

A 30. táblázat folytatása

3. ***Páros***: $\cos(-x) = \cos x$ (a függvény grafikonja szimmetrikus az Oy tengelyre)

4. *2π szerint periodikus* $\boxed{T = 2\pi}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

5. *A grafikon és a koordinátatengelyek metszéspontjai*: Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 1; \end{cases}}$,

Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z \end{cases}}$

6. *Előjelvizsgálat*:

$$\cos x > 0, \text{ ha } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \ k \in \mathbf{Z}$$

$$\cos x < 0, \text{ ha } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \ k \in \mathbf{Z}$$

7. *Monotonitás*:

A $\cos x$ a $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$ intervallumon növekvő, a $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$ intervallumon csökkenő

8. *Szélsőértékek:*

A függvény maximuma 1, melyet az $x = 2\pi k$, $k \in Z$ helyeken vesz fel
A függvény minimuma –1, melyet az $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$ helyeken vesz fel

Magyarázat és indoklás

Emlékezz vissza, hogy a koszinuszérték egyenlő az egységsugarú körvonal megfelelő pontjának abszcisszájával (128. ábra). Mivel az egységsugarú körvonal bármely pontjának abszcisszája meghatározható, ezért az $y = \cos x$ függvény *értelmezési tartománya* a valós számok halmaza. Ezt így írhatjuk le:

$$D(\cos x) = R.$$

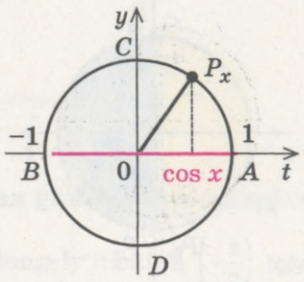
Az egységsugarú körvonal pontjainak abszcisszái –1 és 1 között minden értéket felvesznek, ezért az $y = \cos x$ függvény *értékkészlete*: $y \in [-1; 1]$. Ezt így írhatjuk le:

$$E(\cos x) = [-1; 1].$$

Mint látható, a függvény *legnagyobb értéke, maximuma* egy. Ezt az értéket a függvény akkor veszi fel, ha az egységsugarú körvonal megfelelő pontja az A pont, vagyis ha $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

A koszinuszfüggvény *legkisebb értéke, minimuma* mínusz egy. Ezt az értéket a függvény akkor veszi fel, ha az egységsugarú körvonal megfelelő pontja a B pont, vagyis ha $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ahogy a 18. §-ban már igazoltuk, a koszinuszfüggvény *páros*: $\cos(-x) = \cos x$, ezért a függvény grafikonja szimmetrikus az Oy tengelyre.



128. ábra

A 18.§-ban azt is igazoltuk, hogy a koszinuszfüggvény *periodikus*, legkisebb pozitív periódusa $T = 2\pi$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Tehát a $\cos x$ függvény grafikonja minden 2π hosszúságú intervallumon ismétlődik.

Ahhoz, hogy meghatározzuk *a grafikon és a koordinátatengelyek metszéspontját*, elegendő visszaemlékezni arra, hogy az Oy tengely minden pontjára $x = 0$. Vagyis a megfelelő függvényérték $y = \cos 0 = 1$.

Az Ox tengelyen $y = 0$. Tehát meg kell határozni azon x értékeket, melyekre $\cos x = 0$, azaz az egységsugarú körvonal azon pontjait, melyek abszcisszája nulla. Ezek az egységsugarú körvonal C és D pontjai (128. ábra), azok a pontok melyeknél $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Előjelvizsgálat. A 18.§-ban már igazoltuk, hogy a koszinuszfüggvény értékei pozitívak (vagyis az egységsugarú körvonal megfelelő pontjainak abszciszszái pozitívak) az I. és IV. koordináta-negyedekben (129. ábra). Innen $\cos x > 0$, ha $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, figyelembe véve a függvény periodicitását, ha $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

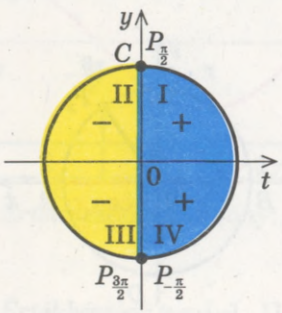
A koszinuszfüggvény értékei negatívak (vagyis az egységsugarú körvonal megfelelő pontjainak abszcisszái negatívak) a II. és III. koordináta-negyedekben, tehát $\cos x < 0$, ha

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

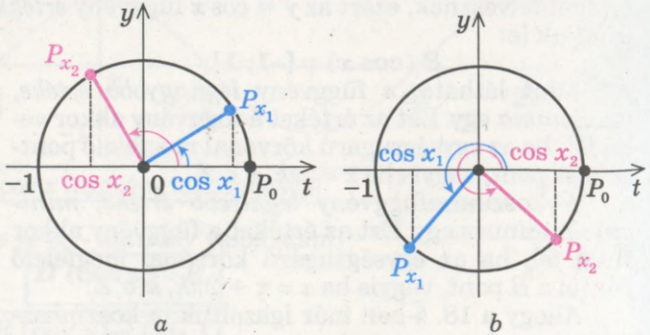
Monotonitás.

Figyelembe véve, hogy az $f(x) = \cos x$ függvény ($T = 2\pi$) szerint periodikus, elegendő a függvény monotonitását egy 2π hosszúságú intervallumon vizsgálni, például a $[0; 2\pi]$ intervallumon.

Ha $x \in [0; \pi]$ (130. *a* ábra), akkor az x argumentum növelésekor ($x_2 > x_1$), az egységsugarú körvonal megfelelő pontjának abszcisszája is csökken (azaz $\cos x_2 < \cos x_1$), vagyis a függvény ezen az intervallumon fogyó. A koszinuszfüggvény periodikusságát figyelembe véve megállapíthatjuk, hogy a függvény minden $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbf{Z}$ intervallumon csökkenő.



129. ábra



130. ábra

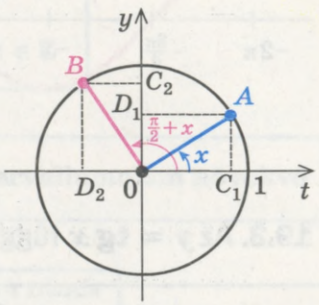
Ha $x \in [\pi; 2\pi]$ (130. *b* ábra), akkor az x argumentum növelésekor ($x_2 > x_1$) az egységsugarú körvonal megfelelő pontjának abszcisszája nő (azaz $\cos x_2 > \cos x_1$), vagyis a függvény ezen az intervallumon növekvő. Levonhatjuk azt a következtetést, hogy a koszinuszfüggvény minden $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbf{Z}$ intervallumon növekvő. ○

Az elvégzett vizsgálat alapján megrajzolhatjuk az $y = \cos x$ függvényt ugyanúgy, ahogy az $y = \sin x$ függvényt ábrázoltuk. Az $y = \cos x$ függvény grafikonját geometriai transzformációkkal (transzformációs lépésekkel) is megkaphatjuk az $y = \sin x$ függvény grafikonjából a

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

képletből.

● Ezen képlet egyik igazolása a következő. Az egységsugarú körvonalon (131. ábra) jelöljük meg az $A = P_x$ és $B = P_{\frac{\pi}{2}+x}$ pontokat, és ezen pontok abszcisszáit és ordinátáit. Figyelembe véve, hogy az $AOB \angle = \frac{\pi}{2}$, ezért ha az OC_1AD_1 téglalapot az O pont körül 90°-kal elforgatjuk az óramutató járásával ellenkező irányba, akkor az OC_2BD_2 téglalapot kapjuk. Innen $OD_2 = OD_1$ és $OC_2 = OC_1$. Tehát



131. ábra

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = y_B = OC_2 = OC_1 = t_A = \cos x.$$

Lássunk még néhány idevágó képletet, amelyekre a továbbiakban szükségetek lesz:

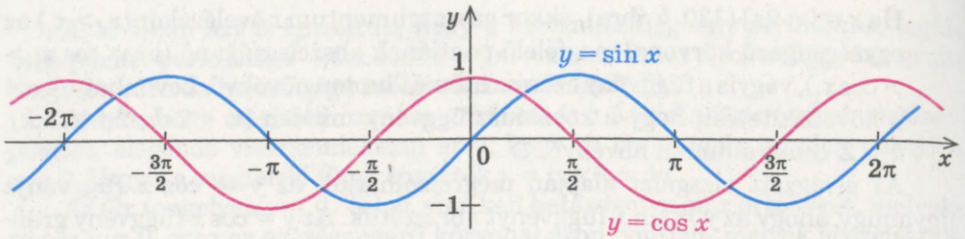
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = t_B = -OD_2 = -OD_1 = -y_A = -\sin x.$$

Innen $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{ctg} x.$

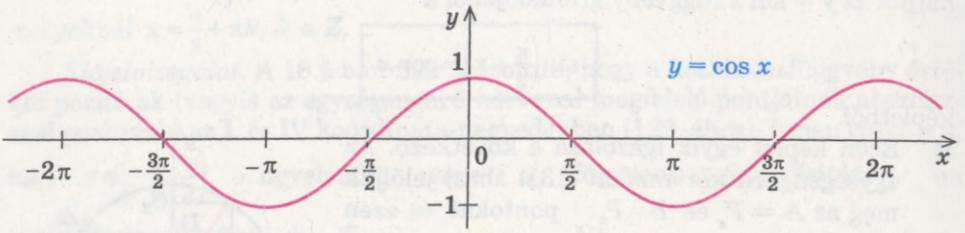
Tehát,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x \quad .\text{○}$$

A $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ egyenlőség alapján az $y = \cos x$ grafikonját megkapjuk, ha az $y = \sin x$ függvény grafikonját eltoljuk az Ox tengely mentén $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ egységgel (132. ábra). A kapott grafikon is *szinuszoid* (133. ábra).



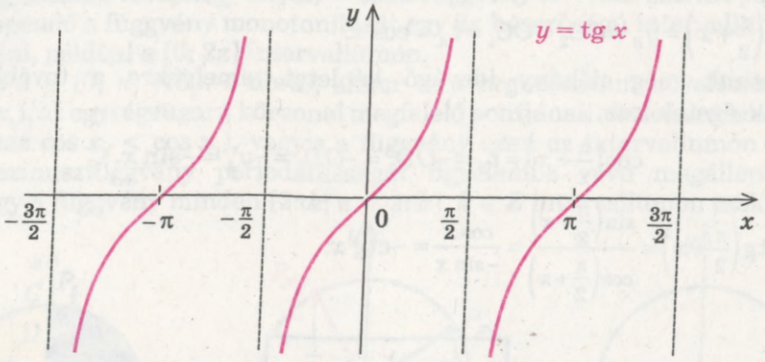
132. ábra



133. ábra

19.3. Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény és tulajdonságai

31. táblázat

Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonja

Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény tulajdonságai
1. *Értelmezési tartomány:* $\boldsymbol{D(\operatorname{tg} x)}$**:** $\boldsymbol{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z}$
2. *Értékkészlet:* $y \in \boldsymbol{R}$. $\boldsymbol{E(\operatorname{tg} x) = R}$

A 31. táblázat folytatása

3. ***Páratlan***: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

(*a függvény grafikonja szimmetrikus az origóra*)

4. *π szerint periodikus* $T = \pi$: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.

5. *A grafikon és a koordinátatengelyek metszéspontjai: Oy* $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$,

Ox $\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k,\ k \in Z \end{cases}$

6. *Előjelvizsgálat*:

$$\operatorname{tg} x > 0, \text{ ha } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$$

$$\operatorname{tg} x < 0, \text{ ha } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right),\ k \in Z$$

7. *Monotonitás*:

A tangensfüggvény a $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$ intervallumokon növekvő

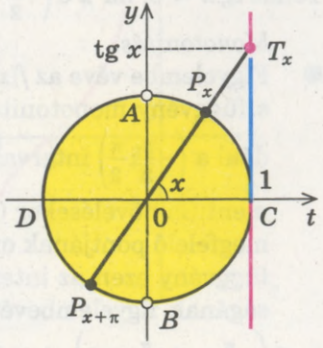
8. *Szélsőértékek:*

A függvénynek sem maximuma, sem minimuma nincs

Magyarázat és indoklás

Emlékezz vissza, hogy $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Az *értelmezési tartomány* azon argumentumok halmaza, melynél $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. Azt kapjuk, hogy ***D* (tg *x*)**: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Ugyanerre az eredményre jutunk a rajz alapján is.

A tangens érték az egységsugarú körvonalhoz az $x = 1$ pontba húzott érintő (tangensvonal) megfelelő T_x pontjának ordinátája (134. ábra). Mivel az egységsugarú körvonal A és B pontja a tangensvonallal párhuzamos OA és OB egyenesekre illeszkednek, ezért az $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ tangens értéke nem létezik. Az összes többi argumentumhoz hozzá tudunk rendelni egy pontot az érintőn, melynek meg tudjuk határozni az ordinátáját, azaz a tangensét. Tehát az összes $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ $k \in Z$ argumentum érték az $y = \operatorname{tg} x$ függvény *értelmezési tartományához* tartozik.



134. ábra

Az egységsugarú körvonal A és B pontjaitól különböző pontokra az érintő megfelelő pontjának ordinátája bármely értéket felvesz $-\infty$-től $+\infty$-ig. Ebből következik, hogy az $y = \operatorname{tg} x$ függvény *értékkészlete* a valós számok halmaza, $y \in \boldsymbol{R}$. Ez így írható le: $\boldsymbol{E}\ (\operatorname{tg} \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{R}$. Az előbbi gondolatmenetből következik, hogy a függvénynek *sem maximuma, sem minimuma* nincs.

Ahogy a 18. §-ban már igazoltuk, a tangensfüggvény *páratlan*: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. A függvény grafikonja szimmetrikus az origóra.

A tangensfüggvény *periodikus*, legkisebb pozitív periódusa $T = \pi$: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ (lásd a 18. §-t). Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény ábrázolásához elegendő megrajzolni egy π hosszúságú intervallumon, majd ezt a görbét párhuzamosan eltolni az Ox tengely mentén jobbra is és balra is $kT = \pi k$ egységgel, ahol k egész szám.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a *grafikon és a koordinátatengelyek metszéspontját*, elegendő visszaemlékezni, arra hogy az Oy tengely minden pontjára $x = 0$. Vagyis a megfelelő függvényérték $y = \operatorname{tg} 0 = 0$. Ez azt jelenti, hogy a függvény grafikonja átmegy az origón.

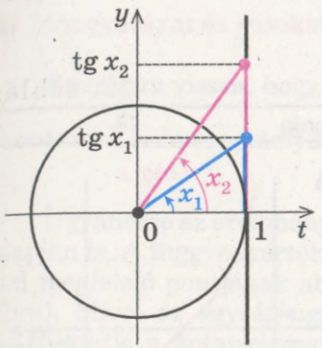
Az Ox tengelyen $y = 0$. Tehát meg kell határozni azon x értékeket, melyekre $\operatorname{tg} x = 0$, azaz az egységsugarú körvonalhoz húzott érintő azon pontjait, melyek ordinátája nulla. Ezek az egységsugarú körvonal C és D pontjai (134. ábra), azok a pontok, melyeknél $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Előjelvizsgálat. Ahogy azt már a 18.§-ban igazoltuk, a tangens értékek pozitívak (vagyis az egységsugarú körvonalhoz húzott érintő megfelelő pontjainak ordinátája pozitív) az I. és III. síknegyedben. Tehát $\operatorname{tg} x > 0$, ha $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, figyelembe véve a periodicitást, minden $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

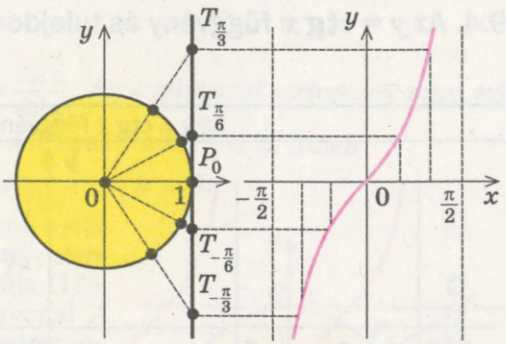
A tangensfüggvény értékei negatívak (vagyis az egységsugarú körvonalhoz húzott érintő megfelelő pontjainak ordinátája negatív) a II. és IV. síknegyedben. Tehát $\operatorname{tg} x < 0$, ha $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Monotonitás.

Figyelembe véve az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény periodikusságát ($T = \pi$), elegendő a függvény monotonitását egy π hosszúságú intervallumon vizsgálni, például a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon. Ha $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (135. ábra), akkor az x argumentum növelésekor ($x_2 > x_1$), az egységsugarú körvonalhoz húzott érintő megfelelő pontjának ordinátája is növekszik (vagyis $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$). Tehát a függvény ezen az intervallumon növekvő. A tangensfüggvény periodikusságának figyelembevételével megállapíthatjuk, hogy a függvény minden $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ intervallumon növekvő. ○



135. ábra

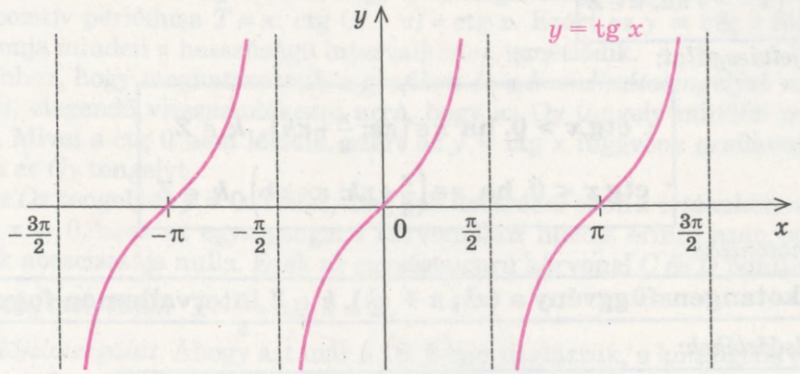


136. ábra

A függvényvizsgálat alapján megrajzolhatjuk az $y = \operatorname{tg} x$ függvényt. Mivel a $\operatorname{tg} x$ függvény π szerint periodikus, ezért elegendő megrajzolni egy π hosszúságú, például a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon. A pontosabb rajz érdekében a tangens azon meghatározását alkalmazzuk, hogy a tangens – a tangensvonal megfelelő pontjának az ordinátája. A 136. ábra az $y = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonját szemlélteti a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon.

Majd a tangensfüggvény periodikusságának figyelembevételével (periódusa π) a kapott görbét ismételjük meg minden π hosszúságú intervallumon (vagyis párhuzamosan toljuk el az Ox tengely mentén πk egységgel, ahol k egész szám).

A 137. ábrán látható grafikont kapjuk, a *tangensfüggvény* grafikonját.

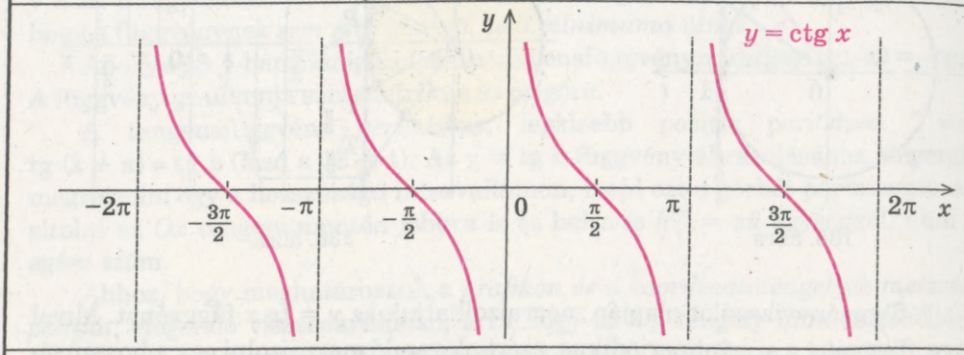


137. ábra

19.4. Az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény és tulajdonságai

32. táblázat

Az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény grafikonja



Az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény tulajdonságai

1. *Értelmezési tartomány:* $\boldsymbol{D\,(ctg\,x)\colon x \neq \pi k,\ k \in Z}$

2. *Értékkészlet:* $y \in \boldsymbol{R}$. $\boldsymbol{E\,(\operatorname{ctg} x) = R}$

3. ***Páratlan*** : $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ (*a függvény grafikonja szimmetrikus az origóra*)

4. π *szerint periodikus* $\boldsymbol{T = \pi}$: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$

5. *A grafikon és a koordinátatengelyek metszéspontjai:* *Oy* **nincs** ,

   Ox $\begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \end{cases}$

6. *Előjelvizsgálat:*

$$\operatorname{ctg} x > 0, \text{ ha } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$$

$$\operatorname{ctg} x < 0, \text{ ha } x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right),\ k \in Z$$

7. *Monotonitás:*

A kotangensfüggvény a $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$ intervallumon fogyó

8. *Szélsőértékek:*

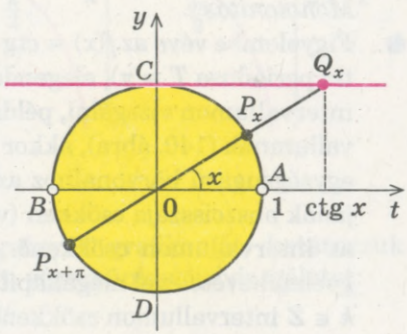
A függvénynek *sem maximuma, sem minimuma* nincs

Magyarázat és indoklás

Emlékezz vissza, hogy $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Az *értelmezési tartomány* azon argumentumok halmaza, melynél $\sin x \neq 0$, azaz $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Innen

$$\boldsymbol{D\,(\operatorname{ctg} x)\colon x \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk a rajz alapján is. A függvényérték a kotangensvonal megfelelő pontjának abszcisszája (138. ábra). Mivel az egységsugarú körvonal A és B pontja a kotangensvonallal párhuzamos OA és OB egyenesekre illeszkednek, ezért az $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ argumentumok kotangens értéke nem létezik. Az összes többi argumentumhoz hozzá tudunk rendelni egy pontot a kotangensvonalon, melynek meg tudjuk határozni az abszcisszáját, azaz a kotangensét. Tehát az összes $x \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ argumentumérték az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény értelmezési tartományához tartozik.



138. ábra

Az egységsugarú körvonalon felvett minden pont (az A és B kivételével), illetve a kotangensvonalon ezeknek megfelelő pontok abszcisszái bármely értéket felvesznek $-\infty$-től $+\infty$-ig. Ebből következik, hogy az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény *értékkészlete* a valós számok halmaza, $y \in \boldsymbol{R}$. Ez így írható le: $\boldsymbol{E\,(\operatorname{ctg} x) = R}$. Az előbbi gondolatmenetből következik, hogy a függvénynek *se maximuma, se minimuma* nincs.

A 18. §-ban már igazoltuk, hogy a kotangensfüggvény *páratlan*: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. A függvény grafikonja szimmetrikus az origóra.

A 18. §-ban azt is igazoltuk, hogy a kotangensfüggvény *periodikus*, legkisebb pozitív periódusa $T = \pi$: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$. Ezért az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény grafikonja minden π hosszúságú intervallumon ismétlődik.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a *grafikon és a koordinátatengelyek metszéspontját*, elegendő visszaemlékezni arra, hogy az Oy tengely minden pontjára $x = 0$. Mivel a ctg 0 nem létezik, ezért az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény grafikonja nem metszi az Oy tengelyt.

Az Ox tengelyen $y = 0$. Tehát, meg kell határozni azon x értékeket, melyekre $\operatorname{ctg} x = 0$, azaz az egységsugarú körvonalhoz húzott érintő azon pontjait, melyek abszcisszája nulla. Ezek az egységsugarú körvonal C és D pontjai, azok a pontok, melyeknél $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

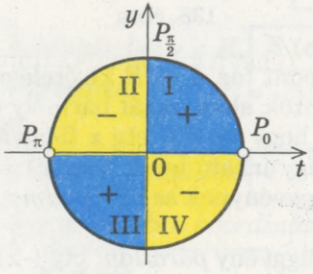
Előjelvizsgálat. Ahogy azt már a 18. §-ban tisztáztuk, a kotangens értékek pozitívak (vagyis a kotangensvonal megfelelő pontjainak abszcisszája pozitív) az I. és III. koordináta-negyedben (139. ábra). Tehát $\operatorname{ctg} x > 0$, ha $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Figyelembe véve a függvény periodicitását, $\operatorname{ctg} x > 0$, ha $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

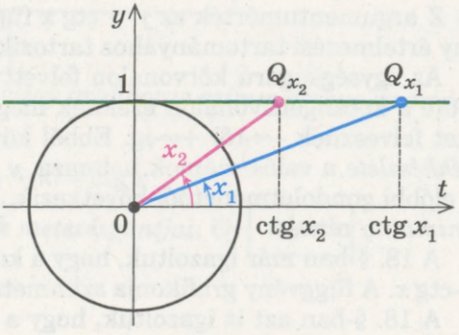
A kotangensfüggvény értékei negatívak (vagyis a kotangensvonal megfelelő pontjainak abszcisszája negatív) a II. és IV. koordináta-negyedben. Tehát $\operatorname{ctg} x < 0$, ha $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Monotonitás

- Figyelembe véve az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ függvény periodikusságát (a legkisebb pozitív periódusa $T = \pi$), elegendő a függvény monotonitását egy π hosszúságú intervallumon vizsgálni, például a $(0; \pi)$ intervallumon. Ha $x \in (0; \pi)$ intervallumnak (140. ábra), akkor az x argumentum növekedésekor ($x_2 > x_1$), az egységsugarú körvonalhoz az $x = 0$ pontba húzott érintő megfelelő pontjának abszcisszája csökken (vagyis $\operatorname{ctg} x_2 < \operatorname{ctg} x_1$). Tehát a függvény ezen az intervallumon csökkenő. A kotangensfüggvény periodikusságának figyelembevételével megállapíthatjuk, hogy a függvény minden $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$ intervallumon csökkenő.

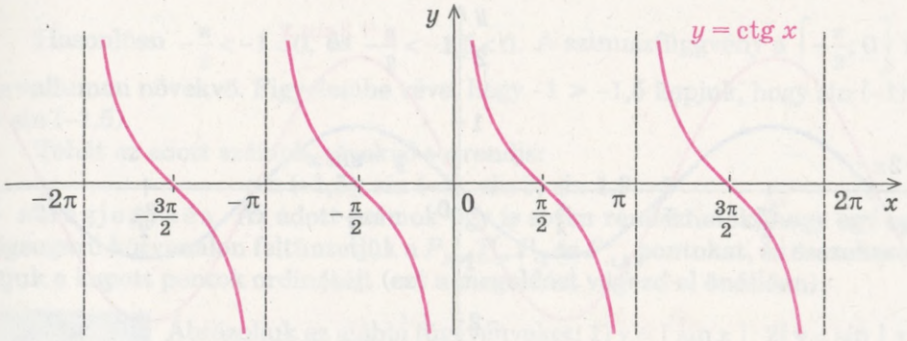


139. ábra



140. ábra

Az elvégzett vizsgálat alapján, az $y = \operatorname{tg} x$ függvényhez hasonlóan, megrajzolhatjuk az $y = \operatorname{ctg} x$ függvényt. Viszont az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény képét függvénytranszformációs lépésekkel megkaphatjuk az $y = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonjából. Az előbb igazolt azonosság alapján: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x$, vagyis $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Ezért az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény grafikonját megkapjuk, ha az $y = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonját párhuzamosan eltoljuk az Ox tengely mentén $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ egységgel, majd a kapott görbét tükrözzük az Ox tengelyre. Így megkaptuk az $y = \operatorname{ctg} x$ *kotangensfüggvény grafikonját* (141. ábra).



141. ábra

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját, határozzuk meg a függvények zérushelyeit, végezzünk előjelvizsgálatot:

1) $y = 2 \sin x$; 2) $y = \sin 2x$.

Magyarázat

Az adott függvények grafikonjait megkaphatjuk az $y = \sin x$ függvény grafikonjából transzformációs lépésekkel (6. táblázat). Tehát a grafikonok szinuszgörbék:

1) $y = 2 \sin x = 2f(x)$, az $y = \sin x$ függvény grafikonját az Oy tengely mentén kétszeresére kell nyújtani;

2) $y = \sin 2x = f(2x)$, az $y = \sin x$ függvény grafikonját az Ox tengely mentén kétszeresére kell zsugorítani.

A zérushelyek a grafikon és az Ox tengely metszéspontjainak abszcisszái.

Az előjelvizsgálatnál azt kell figyelembe vennünk, hogy $y = 2 \sin x$ függvény 2π szerint periodikus, az $y = \sin 2x$ periódusa pedig $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Ezért elegendő egy perióduson belül megállapítani, hol lesz a függvényérték pozitív (a grafikon Ox tengely feletti része), és hol negatív (a grafikon az Ox tengely alatt helyezkedik el), majd a kapott intervallumokat periodikusan ismételni.

Megoldás

1) ▶ Az $y = 2 \sin x$ függvény grafikonját úgy kapjuk meg, hogy az $y = \sin x$ függvény grafikonját az Oy tengely mentén kétszeresére nyújtjuk (142. ábra).

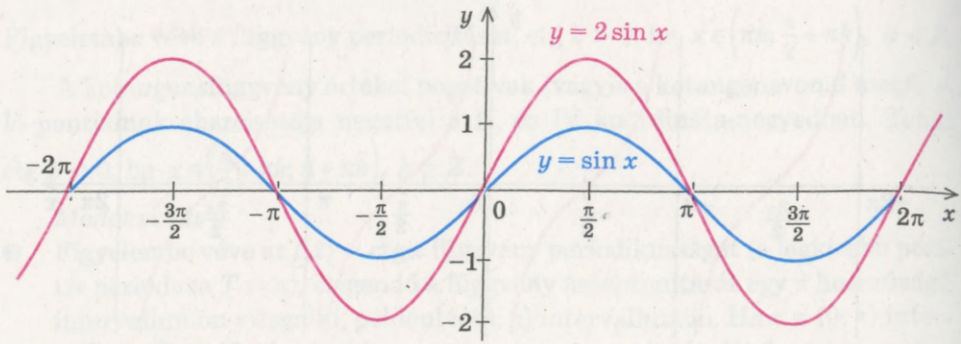
Zérushelyek: $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Előjelvizsgálat:

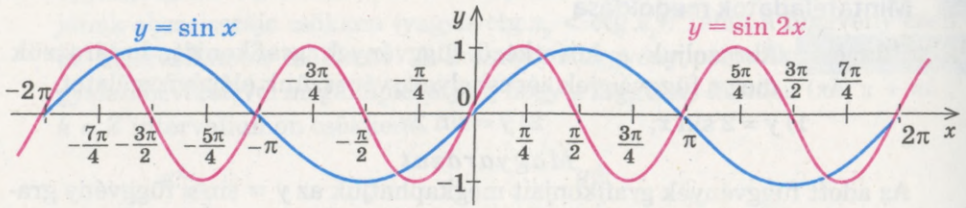
$2 \sin x > 0$, ha $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$;

$2 \sin x < 0$, ha $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

2) ▶ Az $y = \sin 2x$ függvény grafikonját úgy kapjuk meg, hogy az $y = \sin x$ függvény grafikonját az Ox tengely mentén kétszeresére zsugorítjuk (143. ábra).



142. ábra



143. ábra

Zérushelyek: $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Előjelvizsgálat: $\sin 2x > 0$, ha $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$;

$\sin 2x < 0$, ha $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

2. példa. Rendezzük növekvő sorrendbe az alábbi számokat:

$\sin 1{,}9$; $\sin 3$; $\sin(-1)$; $\sin(-1{,}5)$.

Magyarázat

Mielőtt az alábbi számokat sorba rendezzük, először állapítsuk meg, melyek pozitívak és melyek negatívak, majd a szinuszfüggvény ismert növekedése és csökkenése alapján összehasonlítjuk előbb a pozitív számokat, majd a negatívakat.

Megoldás

▶ A $\sin 1{,}9$ és $\sin 3$ értékek pozitívak (a $P_{1,9}$ és P_3 pont a II. koordináta-negyedben van), a $\sin(-1)$ és $\sin(-1{,}5)$ negatív (P_{-1} és $P_{-1,5}$ pont a IV. síknegyedben van).

Figyelembe véve, hogy $\frac{\pi}{2} < 1{,}9 < \pi$, és $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, illetve hogy a $\sin x$ függvény a $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ intervallumon csökkenő, megállapíthatjuk, hogy $\sin 1{,}9 > \sin 3$.

Hasonlóan $-\frac{\pi}{2} < -1 < 0$, és $-\frac{\pi}{2} < -1{,}5 < 0$. A szinuszfüggvény a $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ intervallumon növekvő. Figyelembe véve, hogy $-1 > -1{,}5$ kapjuk, hogy $\sin(-1) > \sin(-1{,}5)$.

Tehát az adott számok növekvő sorrendje:

$$\sin(-1{,}5);\ \sin(-1);\ \sin 3;\ \sin 1{,}9. \triangleleft$$

Megjegyzés. Az adott számok úgy is sorba rendezhetők, hogy egy egységsugarú körvonalon feltüntetjük a $P_{1,9}$, P_3, P_{-1} és $P_{-1,5}$ pontokat, és összehasonlítjuk a kapott pontok ordinátáit (ezt a megoldást végezd el önállóan).

3. példa Ábrázoljuk az alábbi függvényeket: 1) $y = |\sin x|$; 2) $y = \sin|x|$!

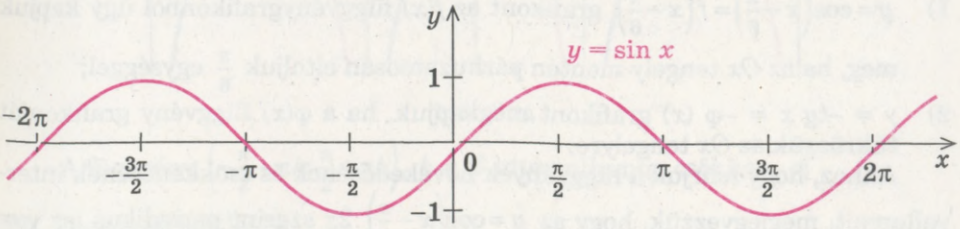
Magyarázat

Az adott függvények grafikonjai a szinuszoid transzformációi. Ismételjük meg ezeket a transzformációkat:

1) $y = |\sin x| = |f(x)|$ az $y = \sin x$ függvény grafikonjának azt a részét, amely az Ox tengely fölött (illetve ezen a tengelyen) van nem változtatjuk, a tengely alatti részt tükrözzük az Ox tengelyre;
2) $y = \sin|x| = f(|x|)$ az $y = \sin x$ függvény grafikonjának azt a részét, amely az Oy tengelytől jobbra (illetve ezen a tengelyen) van nem változtatjuk, és a grafikonnak ugyanazt a részét tükrözzük az Oy tengelyre.

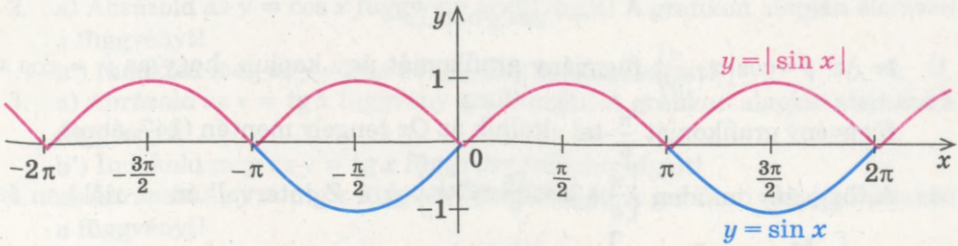
Megoldás

▶ Először megrajzoljuk az $y = f(x) = \sin x$ függvény grafikonját (144. ábra).



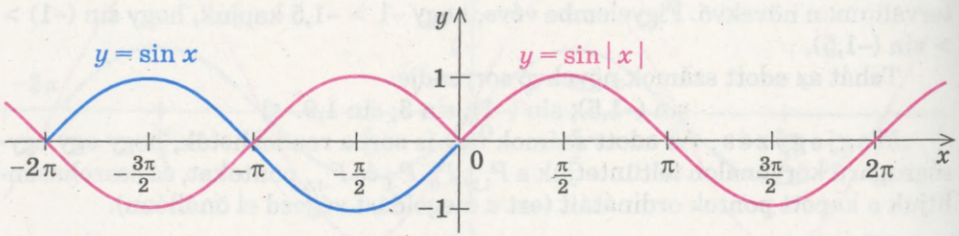
144. ábra

1) Majd ábrázoljuk az $y = |\sin x| = |f(x)|$ függvényt (145. ábra).



145. ábra

2) Végül megrajzoljuk az $y = \sin |x| = f(|x|)$ függvény grafikonját (146. ábra). ◁



146. ábra

4. példa. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, és határozzuk meg növekedésének és csökkenésének intervallumait:

$$1)\ y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right); \quad 2)\ y = -\operatorname{tg} x.$$

Magyarázat

A megadott függvények grafikonjait az

1) $f(x) = \cos x$;
2) $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$

alapfüggvények grafikonjainak transzformálásával kapjuk meg.

Tehát az

1) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ grafikont az $f(x)$ függvénygrafikonból úgy kapjuk meg, ha az Ox tengely mentén párhuzamosan eltoljuk $\frac{\pi}{6}$ egységgel;

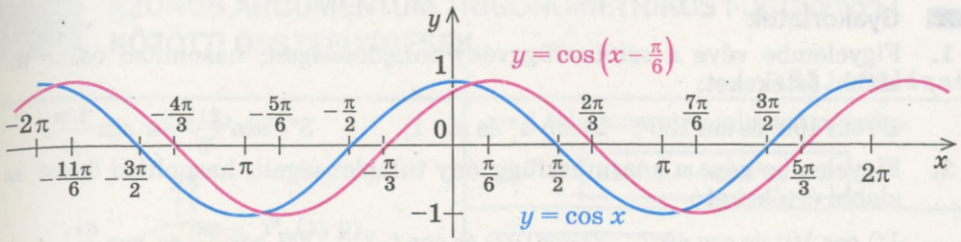
2) $y = -\operatorname{tg} x = -\varphi(x)$ grafikont megkapjuk, ha a $\varphi(x)$ függvény grafikonját tükrözzük az Ox tengelyre.

Ahhoz, hogy felírjuk a függvények növekedésének és csökkenésének intervallumait, megjegyezzük, hogy az $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 2π szerint periodikus, az $y = -\operatorname{tg} x$ függvény periódusa pedig π. Ezért mindkét függvény monotonitását elegendő egy perióduson belül vizsgálni, majd a kapott intervallumokat periódusonként ismételni.

Megoldás

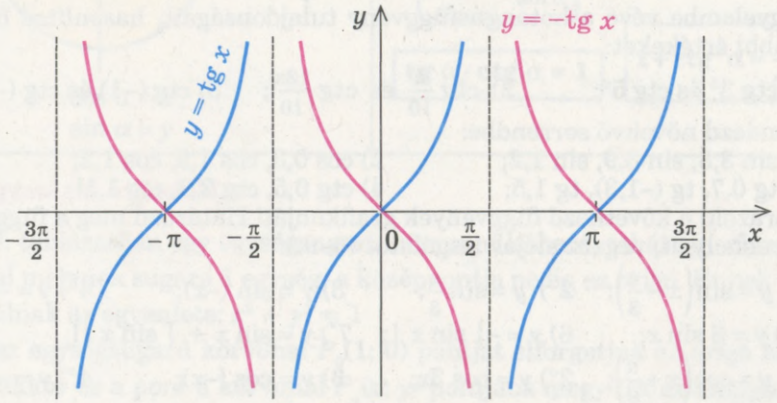
1) ▶ Az $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ függvény grafikonját úgy kapjuk, hogy az $y = \cos x$ függvény grafikonját $\frac{\pi}{6}$-tal eltoljuk az Ox tengely mentén (147. ábra).

A függvény minden $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$ intervallumon csökken és minden $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$ intervallumon nő. ◁



147. ábra

2) ▶ Az $y = -\text{tg}\, x$ függvény grafikonját úgy kapjuk, hogy az $y = \text{tg}\, x$ függvény grafikonját az Ox tengelyre tükrözzük (148. ábra).



148. ábra

A függvény $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ intervallumon csökken. ◁

Ellenőrző kérdések

1. a) Ábrázold az $y = \sin x$ függvény grafikonját! A grafikon alapján elemezd a függvényt!
   b*) Indokold meg az $y = \sin x$ függvény tulajdonságait!
2. a) Ábrázold az $y = \cos x$ függvény grafikonját! A grafikon alapján elemezd a függvényt!
   b*) Indokold meg az $y = \cos x$ függvény tulajdonságait!
3. a) Ábrázold az $y = \text{tg}\, x$ függvény grafikonját! A grafikon alapján elemezd a függvényt!
   b*) Indokold meg az $y = \text{tg}\, x$ függvény tulajdonságait!
4. a) Ábrázold az $y = \text{ctg}\, x$ függvény grafikonját! A grafikon alapján elemezd a függvényt!
   b*) Indokold meg az $y = \text{ctg}\, x$ függvény tulajdonságait!

Gyakorlatok

1. Figyelembe véve a szinuszfüggvény tulajdonságait, hasonlítsd össze az alábbi értékeket:

1°) $\sin 100°$ és $\sin 130°$; 2) $\sin 1°$ és $\sin 1$; 3°) $\sin \frac{21\pi}{5}$ és $\sin \frac{12\pi}{5}$!

2. Figyelembe véve a koszinuszfüggvény tulajdonságait, hasonlítsd össze az alábbi értékeket:

1°) $\cos 10°$ és $\cos 40°$; 2) $\cos(-2)$ és $\cos(-3)$; 3°) $\cos \frac{3\pi}{7}$ és $\cos \frac{6\pi}{7}$!

3. Figyelembe véve a tangensfüggvény tulajdonságait, hasonlítsd össze az alábbi értékeket:

1°) $\operatorname{tg} 15°$ és $\operatorname{tg} 140°$; 2°) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$ és $\operatorname{tg} \frac{10\pi}{9}$; 3) $\operatorname{tg}(-1{,}2\pi)$ és $\operatorname{tg}(-0{,}1\pi)$!

4. Figyelembe véve a kotangnsfüggvény tulajdonságait, hasonlítsd össze az alábbi értékeket:

1) $\operatorname{ctg} 3°$ és $\operatorname{ctg} 5°$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}$ és $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{10}$; 3) $\operatorname{ctg}(-1)$ és $\operatorname{ctg}(-1{,}2)$!

5. Rendezd növekvő sorrendbe:
1) $\sin 3{,}3$, $\sin 3{,}9$, $\sin 1{,}2$; 2) $\cos 0{,}3$, $\cos 1{,}9$, $\cos 1{,}2$;
3) $\operatorname{tg} 0{,}7$, $\operatorname{tg}(-1{,}3)$, $\operatorname{tg} 1{,}5$; 4) $\operatorname{ctg} 0{,}5$, $\operatorname{ctg} 2{,}9$, $\operatorname{ctg} 1{,}1$!

Ábrázold a következő függvények grafikonját! Határozd meg a függvények zérushelyeit, végezz előjelvizsgálatot (**6–9.**):

6. 1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2°) $y = \sin \frac{x}{3}$; 3) $y = \sin(-x)$; 4°) $y = -\sin x$;
5°) $y = 3 \sin x$; 6) $y = -|\sin x|$; 7*) $y = \sin x + |\sin x|$!

7. 1) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 2°) $y = \cos 3x$; 3) $y = \cos(-x)$; 4°) $y = -\cos x$;
5°) $y = 2 \cos x$; 6) $y = |\cos x|$; 7*) $y = \cos x - |\cos x|$!

8. 1) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg} 2x$; 3) $y = \operatorname{tg}(-x)$;
4) $y = \operatorname{tg}|x|$; 5) $y = |\operatorname{tg} x|$!

9. 1) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg}(-x)$; 3) $y = -\operatorname{ctg} x$; 4) $y = 3 \operatorname{ctg} x$!

Ábrázold az alábbi függvényeket, és határozd meg növekedésének és csökkenésének intervallumait (**10–13.**):

10. 1°) $y = \sin 3x$; 2°) $y = 3 \sin x$;
3°) $y = \sin x + 1$; 4*) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$!

11. 1°) $y = \cos \frac{x}{2}$; 2°) $y = \cos x - 1$;
3) $y = \cos|x|$; 4*) $y = 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$!

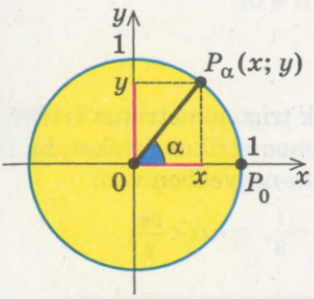
12. 1) $y = \operatorname{tg} 4x$; 2) $y = \operatorname{tg} x + 3$; 3) $y = -2 \operatorname{tg} x$; 4*) $y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x|$!

13. 1) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$; 2) $y = -2\operatorname{ctg} x$;
3) $y = |\operatorname{ctg} x|$; 4*) $y = \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}|x|$!

20. §. AZONOS ARGUMENTUM TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEI KÖZÖTTI ÖSSZEFÜGGÉSEK

33. táblázat

$x^2 + y^2 = 1$



$\cos \alpha = x$

$\sin \alpha = y$

A trigonometria alapazonossága

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Magyarázat és indoklás

A 33. táblázatban egy egységsugarú körvonal látható, tehát egy olyan körvonal melynek sugara 1 egység, a középpontja pedig az origó. Ennek a körvonalnak az egyenlete: $x^2 + y^2 = 1$

Ha az egységsugarú körvonal $P_0(1; 0)$ pontját elforgatjuk az origó körül α szöggel, akkor ez a pont a körvonal $P_\alpha(x; y)$ pontjába megy (ez az elforgatás az OP_0 sugarat az OP_α sugárba viszi át). Idézzük fel, hogy az α szög szinuszának az egységsugarú körvonal $P_\alpha(x; y)$ pontjának ordinátáját nevezzük, vagyis $\sin \alpha = y$, ugyanezen szög koszinuszának pedig a pont abszcisszáját, tehát $\cos \alpha = x$. A P_α pont koordinátái kielégítik a körvonal $y^2 + x^2 = 1$ egyenletét, tehát

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad \bigcirc$$

Ezt az összefüggést a *trigonometria alapazonosságának* nevezzük.

Emlékezzetek vissza arra is, hogy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ (ahol } \cos \alpha \neq 0); \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ } (\sin \alpha \neq 0).$$

Innen $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$, vagyis

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \ (\sin \alpha \neq 0 \text{ és } \cos \alpha \neq 0).$$

Ezekből az azonosságokból kapjuk, hogy

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ vagyis}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\quad(\cos\alpha\neq 0).$$

Hasonlóképpen: $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, vagyis

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\quad(\sin\alpha\neq 0).$$

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Határozzuk meg az α szög egyik trigonometrikus értékének ismeretében a másik három trigonometrikus értéket, ha tudjuk, hogy az α szög melyik koordináta-negyedben van:

1) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $90°<\alpha<180°$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Megoldás

1) ▶ A $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ azonosságból, $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$. Innen $\cos^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$. Mivel $90°<\alpha<180°$, ezért $\cos\alpha<0$, vagyis $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$. Akkor viszont $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{3}{4}$. ◁

2) ▶ A $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ azonosságból kapjuk, hogy $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=3$. Az $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ azonosságba behelyettesítve $\operatorname{tg}\alpha$ értékét kapjuk, hogy $1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$. Innen $\cos^2\alpha=\frac{9}{10}$. Mivel $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, ezért $\cos\alpha<0$, vagyis $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Magyarázat

1) A $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ azonosság $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ értékek közötti összefüggést írja le, így az egyik ismeretében kifejezhetjük a másikat. Például $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$. Tehát $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Figyelembe véve, hogy az α szög melyik koordináta-negyedben van, eldönthetjük, melyik előjelet válasszuk a képlet jobb oldalán (a koszinusz előjelét a II. negyedben). A $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ ismeretében meghatározhatjuk $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{ctg}\alpha$ értékét. Megemlítjük, hogy a $\operatorname{ctg}\alpha$ érték a $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ azonosságból is meghatározható.

2) A $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ azonosság $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{ctg}\alpha$ értékek közötti összefüggést írja le, így az egyik ismeretében kifejezhetjük a másikat, melyek egymás reciprokai.

Az $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ azonosság a $\operatorname{tg}\alpha$ és $\cos\alpha$ értékek közötti összefüggést írja le, így az egyik ismeretében kifejezhetjük a másik értéket.

$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. ◁

Például $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, vagyis $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. Ha tudjuk, hogy melyik koordináta-negyedben van az α szög, kiválaszthatjuk a képlet jobb oldalán a megfelelő előjelet (ebben az esetben a koszinusz előjelét a III. negyedben).

Ahhoz, hogy meghatározzuk $\sin\alpha$ értékét, a

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = \sin\alpha$$

összefüggést alkalmazhatjuk.

2. példa. Egyszerűsítsük az $\frac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$ kifejezést!

Megoldás

▶ $\frac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha$. ◁

Magyarázat

Ahhoz, hogy a számlálót átalakítsuk, a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ trigonometria alapazonosságból kifejezzük $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$. A nevezőben a tangens definícióját alkalmazzuk: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, majd a kapott törtet egyszerűsítjük.

3. példa. Egyszerűsítsük a $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$ kifejezést!

Magyarázat

A trigonometrikus kifejezések egyszerűsítésekor nem csak trigonometrikus azonosságokat alkalmazunk, hanem algebrai képleteket is, egyebek mellett a nevezetes azonosságokat. Például a $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ kifejezés értelmezhető, mint négyzetek különbsége: $(\sin^2\alpha)^2 - (\cos^2\alpha)^2$. Ezért tényezőre bontható (felírható $\sin^2\alpha$ és $\cos^2\alpha$ összegének és különbségének szorzataként), majd alkalmazhatjuk a trigonometria alapazonosságát: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Megoldás

▶ $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha =$

$= 1 \cdot (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$. ◁

4*. példa. Egyszerűsítsük a $\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}}$, ha $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$!

Magyarázat

Először a tangens és a kotangens definícióját alkalmazzuk: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ és $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, majd a nevezőben elvégzett átalakítás után a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ trigonometria alapazonosságot használjuk, majd egyszerűsítjük a kapott törtet. Végül számolunk a $\sqrt{a^2}=|a|$ azonossággal. Az abszolút érték értelmezésénél figyelembe vesszük, hogy milyen előjelű a koszinusz az adott intervallumban, vagyis mivel $a<0$, azért $|a|=-a$.

Megoldás

$$\blacktriangleright\ \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}}=\sqrt{\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}}=\sqrt{\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}}}=\sqrt{\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}}}=$$

$=\sqrt{\cos^2\alpha}=|\cos\alpha|=-\cos\alpha$, mivel a második síknegyedben $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$ $\cos\alpha<0$. ◁

5. példa. Igazoljuk a $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha}=2$ azonosságot!

Magyarázat

Igazoljuk, hogy a kifejezés jobb oldala egyenlő a bal oldallal. Ehhez a nevezőben felhasználjuk a $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ képletet, a számlálóban a zárójelben lévő kifejezést négyzetre emeljük és alkalmazzuk a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ azonosságot. Emlékezz vissza, hogy *azonosságnak nevezzük azokat az algebrai egyenlőségeket, melyek igazak a benne szereplő változók összes megengedett értékére*. Ezért az adott egyenlőség csak akkor azonosság, ha $\operatorname{tg}\alpha\neq 0$ és $\cos\alpha\neq 0$.

Megoldás

$$\blacktriangleright\ \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=2.$$

$2=2$, ezért az adott egyenlőség azonosság. ◁

Megjegyzés. Azonosságok bizonyításánál leggyakrabban az alábbi módszereket alkalmazzuk:

1) azonos átalakításokkal igazoljuk, hogy az egyenlőség egyik oldala egyenlő a másik oldallal;
2) az egyenlőség jobb és bal oldalának különbségét vizsgáljuk, és igazoljuk, hogy ez a különbség nulla (ezt abban az esetben alkalmazzuk, ha mind a két oldalt át kell alakítani).

Ellenőrző kérdések

1. Sorold fel az azonos argumentumú trigonometrikus függvények közötti összefüggéseket!
2*. Bizonyítsd be az azonos argumentumú trigonometrikus függvények közötti összefüggéseket!

Gyakorlatok

1. Létezik-e olyan α szám, melyre egyidejűleg igaz, hogy:

   1°) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; 2°) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$;

   3°) $\sin\alpha=0{,}7$, $\cos\alpha=0{,}3$; 4°) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{3}$;

   5°) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{4}$; 6) $\operatorname{tg}\alpha=2+\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=2-\sqrt{3}$?

2. Határozd meg az α szög egyik trigonometrikus értékének ismeretében a másik három trigonometrikus értéket, ha tudjuk, hogy az α szög melyik koordináta-negyedben van:

   1°) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; 2°) $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

   3) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha=-0{,}2$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$!

3. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

   1°) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; 2°) $(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)$;

   3°) $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; 4°) $\sin^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

   5) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$; 6) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

   7) $\frac{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$; 8) $\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\right)$;

   9*) $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$; 10*) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, ha $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$!

4. Bizonyítsd be a következő azonosságokat:

   1°) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\operatorname{tg}^2\alpha$; 2°) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-1=\operatorname{ctg}^2\alpha$;

   3°) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$; 4) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos^2\alpha$;

   5) $\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; 6) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}$;

   7) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$; 8) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2=\frac{2}{\cos^2\alpha}$;

9*) $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$; 10*) $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\,\mathrm{tg}^2\alpha$.

5*. 1) Határozd meg $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ kifejezés értékét, ha $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$!

2) Ismeretes, hogy $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha=2$. Határozd meg az: a) $\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha$; b) $\mathrm{tg}^3\alpha+\mathrm{ctg}^3\alpha$ kifejezések értékét!

21. §. ADDÍCIÓS (ÖSSZEGEZÉSI) KÉPLETEK ÉS AZOK KÖVETKEZMÉNYEI

21.1. Addíciós képletek

34. táblázat

1. Két szög összegének és különbségének koszinusza	
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	
2. Két szög összegének és különbségének szinusza	
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$	
3. Két szög összegének és különbségének tangense	
$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$	$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

Magyarázat és indoklás

1. Két szög összegének és különbségének koszinusza

Ahhoz, hogy megkapjuk a $\cos(\alpha-\beta)$ kifejezés képletét, először vegyük azt az esetet, amikor α és β a $[0;\pi]$ intervallumba esne, és $\alpha>\beta$. Az egységsugarú körvonalon jelöljük a P_α és P_β pontokat, majd húzzuk meg az $\overrightarrow{OP_\alpha}$ és $\overrightarrow{OP_\beta}$ vektorokat (149. ábra). Ezen vektorok koordinátái megegyeznek a P_α és P_β pontok koordinátáival, vagyis:

$$\overrightarrow{OP_\alpha}(\cos\alpha;\sin\alpha),\quad \overrightarrow{OP_\beta}(\cos\beta;\sin\beta).$$

A vektorok hossza (abszolút értéke) pedig egy egység: $|\overrightarrow{OP_\alpha}|=1$, $|\overrightarrow{OP_\beta}|=1$. A köztük lévő hajlásszög $\alpha-\beta$ (azaz $P_\alpha OP_\beta\angle=\alpha-\beta$). Határozzuk meg az $\overrightarrow{OP_\alpha}$ és $\overrightarrow{OP_\beta}$ vektorok skaláris szorzatát kétféleképpen:

1) mint a megfelelő koordináták szorzatának összegét:

$$\overrightarrow{OP_\alpha}\cdot\overrightarrow{OP_\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

2) mint a vektorok hosszainak és a köztük lévő hajlásszög koszinuszának szorzatát:

$$\overrightarrow{OP_\alpha} \cdot \overrightarrow{OP_\beta} = \left|\overrightarrow{OP_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP_\beta}\right| \cdot \cos P_\alpha O P_\beta \angle = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

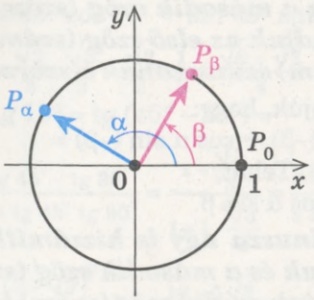
Tehát,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \quad (1)$$

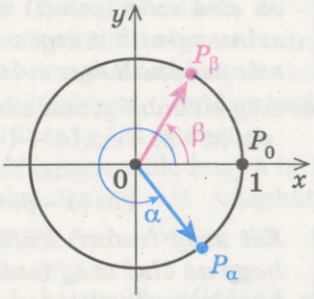
A kapott képlet adja meg *két szög különbségének koszinuszát*, melyet szavakkal így is megfogalmazhatunk:

két szög (szám) különbségének koszinusza úgy is kiszámítható, hogy az első szög (szám) koszinuszának és a második szög (szám) koszinuszának a szorzatához hozzáadjuk az első szög (szám) szinuszának és a második szög (szám) szinuszának a szorzatát.

Hogy általános esetre is igazoljuk a képlet helyességét, emlékezzünk vissza arra, hogy a forgásszögek definíciója alapján a két vektor közötti hajlásszög ($P_\alpha O P_\beta \angle$) csak 0 és π közötti értéket vehet fel, ezért ha $\alpha > \beta$, akkor az $\overrightarrow{OP_\alpha}$ és $\overrightarrow{OP_\beta}$ vektorok közötti hajlásszög $(\alpha - \beta)$-val egyenlő (149. ábra) vagy $2\pi - (\alpha - \beta)$ (150. ábra), vagy teljes fordulatokkal tér el ezektől az értékektől (vagyis $2\pi k$-val, $k \in \mathbf{Z}$).



149. ábra



150. ábra

Figyelembe véve, hogy a koszinuszfüggvény periodikus (periódusa 2π) és páros, ezért bármely esetben $\cos P_\alpha O P_\beta \angle = \cos(\alpha - \beta)$, vagyis az előző gondolatmenet bármely α és β értékre igaz.

Az első képlettből könnyen levezethető *két szög összegének koszinusza*:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Tehát,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta. \quad (2)$$

Két szög (szám) összegének koszinusza úgy is kiszámítható, hogy az első szög (szám) koszinuszának és a második szög (szám) koszinuszának a szorzatából kivonjuk az első szög (szám) szinuszának és a második szög (szám) szinuszának a szorzatát. ○

2. Két szög összegének és különbségének szinusza

Vezessük le két szög összegének és különbségének szinuszát.

Először az (1) képletből két gyakran használt képletet kaphatunk, éspedig

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\varphi+\sin\frac{\pi}{2}\sin\varphi=0\cdot\cos\varphi+1\cdot\sin\varphi=\sin\varphi.$$

A kapott képletben cseréljük fel a jobb és a bal oldalt:

$$\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right). \tag{3}$$

Ha a (3) képletbe $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$ helyettesítünk, akkor az alábbi képletet kapjuk:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \tag{4}$$

A (3), (1), (4) képletek alapján azt kapjuk, hogy:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$ Tehát,

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}. \tag{5}$$

Két szög (szám) összegének szinusza úgy is kiszámítható, hogy az első szög (szám) szinuszának és a második szög (szám) koszinuszának a szorzatához hozzáadjuk az első szög (szám) koszinuszának és a második szög (szám) szinuszának a szorzatát.

Két szög különbségének szinuszára azt kapjuk, hogy:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$ Tehát,
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Két szög (szám) különbségének szinusza úgy is kiszámítható, hogy az első szög (szám) szinuszának és a második szög (szám) koszinuszának a szorzatából kivonjuk az első szög (szám) koszinuszának és a második szög (szám) szinuszának a szorzatát. ○

3. Két szög összegének és különbségének tangense

Két szög összegének szinusza (5. képlet) és koszinusza (2. képlet) alapján könnyű levezetni két szög összegének tangensét vagy kotangensét. Például

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Osszuk el a kapott tört számlálóját és nevezőjét $\cos\alpha$ és $\cos\beta$ szorzatával (természetesen azzal a feltétellel, hogy $\cos\alpha\neq0$ és $\cos\beta\neq0$):

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$ Tehát,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Két szög különbségének tangensére azt kapjuk, hogy:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$ Tehát,

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$ ○

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Számítsuk ki a következő trigonometrikus kifejezések értékeit: 1) sin 15°; 2) cos 15°; 3) tg 15°!

Megoldás

1) ▶ $\sin 15° = \sin(45° - 30°) =$
$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$ ◁

2) ▶ $\cos 15° = \cos(45° - 30°) =$
$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$ ◁

3) ▶ $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) =$

$$= \frac{\operatorname{tg}45° - \operatorname{tg}30°}{1+\operatorname{tg}45°\operatorname{tg}30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}.$$ ◁

Magyarázat

A 15°-ot írjuk fel 45° és 30° különbségeként:

$$15° = 45° - 30°.$$

A 45° és 30° trigonometrikus értékei számunkra viszont már ismeretesek. Ezért ha szinusz 15°-ot felírjuk két szög különbségének szinuszaként, akkor meghatározhatjuk az értékét. Hasonlóképpen határozhatjuk meg cos 15° és tg 15° értékét is.

Megjegyezzük, hogy a tg 15° értéke a definícióból is meghatározható: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

A harmadik példában célszerű a nevezőt $\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ gyöktelenníteni, ami jelentősen egyszerűsíti az eredményt.

2. példa. Egyszerűsítsük a $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$ kifejezést!

Magyarázat

A tört számlálójában és nevezőjében alkalmazzuk két szög összegének és különbségének koszinuszára vonatkozó képleteket, majd összevonjuk az egynemű tagokat.

Megoldás

▶ $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = 1.$ ◁

3. példa. Határozzuk meg a $\cos 37° \cdot \cos 23° - \sin 37° \cdot \sin 23°$ kifejezés értékét!

Megoldás

▶ $\cos 37° \cos 23° - \sin 37° \cos 23° =$

$= \cos(37° + 23°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$. ◁

Magyarázat

Alkalmazzuk fordított irányban két szög összegének koszinusza képletét:

$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$.

4. példa. Igazoljuk az alábbi azonosságokat:

1) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

Magyarázat

Ahhoz, hogy igazoljuk ezeket az azonosságokat, megmutatjuk, hogy a jobb oldal azonosan egyenlő a bal oldallal. Ehhez a szögek összegének és különbségének szinuszra vonatkozó képletét alkalmazzuk:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta.$$

Megoldás

1) ▶ $\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= \sin \alpha + \cos \alpha$; ◁

2) ▶ $\sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= \sin \alpha - \cos \beta$. ◁

Ellenőrző kérdések

1. Írd le az addíciós képleteket: a) két szög összegének és különbségének koszinuszát; b) két szög összegének és különbségének szinuszát; a) két szög összegének és különbségének tangensét!

2*. Bizonyítsd be az addíciós képleteket: a) két szög összegének és két szög különbségének koszinuszára; b) két szög összegének és két szög különbségének szinuszára; c) két szög összegének és két szög különbségének tangensére!

Gyakorlatok

1. Számítsd ki:

1) $\sin 13° \cos 17° + \cos 13° \sin 17°$;
2) $\sin 16° \cos 29° + \sin 29° \cos 16°$;
3) $\sin 78° \cos 18° - \sin 18° \cos 78°$;
4) $\sin 63° \cos 33° - \sin 33° \cos 63°$;
5) $\cos 66° \cos 6° + \sin 66° \sin 6°$;
6) $\cos 71° \cos 26° + \sin 71° \sin 26°$;
7) $\cos 20° \cos 25° - \sin 20° \sin 25°$;
8) $\cos 18° \cos 12° - \sin 18° \sin 12°$;
9) $\frac{\operatorname{tg} 10° + \operatorname{tg} 35°}{1 - \operatorname{tg} 10° \operatorname{tg} 35°}$;
10) $\frac{\operatorname{tg} 73° - \operatorname{tg} 13°}{1 + \operatorname{tg} 73° \operatorname{tg} 13°}$;
11) $\frac{1 + \operatorname{tg} 67° \operatorname{tg} 7°}{\operatorname{tg} 67° - \operatorname{tg} 7°}$!

2. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1°) $\sin 5\alpha \cos 3\alpha - \cos 5\alpha \sin 3\alpha$;

2) $\cos 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha \sin 2\alpha$;

3) $\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha + \cos(\alpha-\beta)\sin\beta$;

4) $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin(\alpha+\beta)$;

5°) $\dfrac{\cos 7\alpha \cos 4\alpha + \sin 7\alpha \sin 4\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha}$;

6°) $\dfrac{\sin 8\alpha \cos 2\alpha - \cos 8\alpha \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha \cos 4\alpha - \sin 2\alpha \sin 4\alpha}$;

7°) $\dfrac{\operatorname{tg} 4\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha}{1 - \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$;

8°) $\dfrac{\operatorname{tg} 7\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 7\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}$;

9) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$;

10) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta}$!

3. Számítsd ki az alábbi értékeket! Alkalmazd az addíciós képleteket!

1) $\sin 75°$; 2) $\cos 75°$; 3) $\operatorname{tg} 75°$;

4) $\sin 105°$; 5) $\cos 105°$; 6) $\operatorname{tg} 105°$!

4. Igazold a következő azonosságokat:

1) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$;

2) $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$;

4) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha$;

5) $\sin(30°-\alpha) - \cos(60°-\alpha) = -\sqrt{3}\sin\alpha$;

6) $\sin(30°-\alpha) + \sin(30°+\alpha) = \cos\alpha$;

7*) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right) + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha - 1$;

8*) $\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\alpha = 1 + \operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\alpha$;

9*) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60°+\alpha)}{2\sin(60°+\alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;

10*) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(45°+\alpha)}{2\sin(45°+\alpha) - \sqrt{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$!

21.2. Kétszeres argumentum szögfüggvényei

35. táblázat

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Magyarázat és indoklás

● Ahhoz, hogy megkapjuk a kétszeres argumentumok képletét, elegendő az összegezési képletekben

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

a $\beta = \alpha$ helyettesítést alkalmazni. Az alábbi azonosságokat kapjuk:

$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, vagyis

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.}$$

$\cos 2\alpha = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha$, $\sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, vagyis

$$\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \text{vagyis}$$

$$\mathbf{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.} \quad \bigcirc$$

Ha a $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ képletben figyelembe vesszük a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ trigonometriai alapazonosságot, akkor olyan képleteket kapunk, melyek lehetőséget biztosítanak $\cos 2\alpha$ kifejezésére vagy csak $\sin \alpha$ vagy csak $\cos \alpha$ értékén keresztül.

● Valóban, az alapazonosságból felírhatjuk, hogy

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$. Akkor viszont

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$, vagyis

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1. \qquad (1)$$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, vagyis

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha. \quad \bigcirc \qquad (2)$$

Az (1) és (2) képletek következménye az alábbi két képlet, melyeket célszerű megjegyezni:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Ezeket a képleteket szokták hatványcsökkentő képleteknek is nevezni.

Ha az utolsó azonosságokban 2α helyett x-et írunk, akkor $\alpha = \frac{x}{2}$, és a következő képleteket kapjuk:

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}, \qquad 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}. \tag{3}$$

Megjegyezzük, hogy a kétszeres argumentum szinuszára és koszinuszára vonatkozó képletek az argumentum bármely értékére igazak, míg a tangensére vonatkozó képletek csak azokra az argumentumokra érvényesek, melyekre $\operatorname{tg}\alpha$ és $\operatorname{tg} 2\alpha$ is értelmezve van, vagyis abban az esetben, ha $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ és $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

Megjegyezzük még azt is, hogy mint eddig is, a kapott képletek alkalmazhatók jobbról balra és balról jobbra is. Például $2 \sin 3\alpha \cos 3\alpha$ felírható, mint $\sin(2 \cdot 3\alpha) = \sin 6\alpha$ és a $\cos^2 1{,}5\,\alpha - \sin^2 1{,}5\,\alpha$ kifejezés helyett írhatjuk a $\cos 3\alpha$ kifejezést.

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét: 1) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; 2) $\sin 15° \cos 15°$!

Megoldás

1) ▶ $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) =$

$= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ◁

2) ▶ $\sin 15° \cos 15° = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin 15° \cos 15° =$

$= \frac{1}{2}\sin(2 \cdot 15°) = \frac{1}{2}\sin 30° = \frac{1}{4}$. ◁

Magyarázat

Az első példában elegendő felismerni a kétszeres argumentum koszinusza képletének jobb oldalát és felírni az eredményt. A második példában azt kell észrevenni, hogy csak a kettes hiányzik a kétszeres argumentum szinusza képletének jobb oldalából. Ezért, ha az adott kifejezést megszorozzuk, majd el is osztjuk 2-vel, akkor az értéke nem változik, viszont ekkor már alkalmazhatjuk a képletet:

$2\sin 15° \cos 15° = \sin(2 \cdot 15°) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$.

2. példa. Bizonyítsuk be az $\frac{1 + \cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$ azonosságot!

Magyarázat

Bebizonyítjuk, hogy a kifejezés bal oldala azonosan egyenlő a jobb oldallal. Vegyük észre, hogy a számlálóban lévő kifejezésre közvetlenül alkalmazhatjuk

a (3) képletet! Ezzel a képlettel a számláló argumentumát a felére csökkentjük: $1 + \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha$, ezért célszerű a nevezőt is 2α-án keresztül felírni. Ehhez $\sin 4\alpha$ kifejezésre alkalmazzuk a kétszeres argumentum szinuszára vonatkozó képletet (2α argumentum szerint): $\sin 4\alpha = \sin(2 \cdot 2\alpha) = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha$.

Megoldás

▶ $\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \dfrac{2\cos^2 2\alpha}{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha.$ ◁

3*. példa. Egyszerűsítsük az $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ törtet!

Magyarázat

A trigonometrikus kifejezések átalakításakor nem csak a trigonometrikus azonosságokra kell gondolni, hanem az algebrai azonosságokra is, például a nevezetes azonosságokra. Ebben az esetben, ha a nevezőben alkalmazzuk a kétszeres argumentum koszinuszára vonatkozó képletet, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, akkor $\cos \alpha$ és $\sin \alpha$ négyzeteinek különbségét kapjuk. Ami felírható ezen kifejezések összegének és különbségének szorzataként. A nevezőben kapott kifejezés alapján a számlálóban lévő $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ a $\cos \alpha$ és $\sin \alpha$ kifejezések kétszeres szorzata. Ahhoz, hogy egy kéttagú kifejezés összegét megkapjuk, szükségünk van még $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ összegére, de a trigonometria alapazonosságából tudjuk, hogy ez az összeg eggyel egyenlő, ami szerepel is a számlálóban.

Megoldás

▶ $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \dfrac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)} = \dfrac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$ ◁

4. példa. Ismeretes, hogy $\cos \alpha = \dfrac{3}{5}$ és $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$!

Megoldás

▶ $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{9}{25}$, vagyis $\sin^2 \alpha = \dfrac{16}{25}$. Tehát, $\sin \alpha = \dfrac{4}{5}$ vagy $\sin \alpha = -\dfrac{4}{5}$.

Figyelembe véve, hogy $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, így $\sin \alpha = -\dfrac{4}{5}$. Akkor

Magyarázat

Ahhoz, hogy meghatározzuk $\sin 2\alpha$ értékét a kétszeres argumentum szinuszának képlete alapján, a feladat feltételében szereplő $\cos \alpha$ értéken kívül tudnunk kell még a $\sin \alpha$ értékét is. Ezt könnyen meghatározhatjuk az alapazonosságból:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha.$$

1) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$= 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} = -\frac{24}{25}$; ◁

2) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$

$= \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$; ◁

3) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$; ◁

4) $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{7}{24}$. ◁

Mint korábban már említettük, a $\sin \alpha$ meghatározásánál oda kell figyelni a szinusz előjelére a megadott intervallumban (a feltétel szerint az α szög a IV. negyedbe esik, így a szinusz előjele negatív).

Megjegyezzük, hogy a

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

képlet segítségével is kiszámíthatjuk, amihez nincs szükség $\sin \alpha$ értékére. A $\operatorname{ctg} 2\alpha$-át a $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}$ képletből úgy kapjuk meg, ha behelyettesítjük a már meghatározott $\operatorname{tg} 2\alpha$-t.

Ellenőrző kérdések

1. Mi a kétszeres argumentum szinuszának, koszinuszának és tangensének képlete?
2*. Igazold a kétszeres argumentum szinuszának, koszinuszának és tangensének képletét!

Gyakorlatok

1°. Határozd meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$; 2) $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$; 3) $(\cos 15° + \sin 15°)^2$;

4) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$; 5) $\frac{2 \operatorname{tg} 15°}{1 - \operatorname{tg}^2 15°}$; 6) $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$!

Bizonyítsd be a következő azonosságokat **(2–3.)**!

2°. 1) $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$; 2) $\sin 5x \cos 5x = \frac{1}{2} \sin 10x$;

3) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$; 4) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$.

3. 1) $\frac{\sin 4\alpha}{4 \sin \alpha} = \cos \alpha \cos 2\alpha$; 2) $\frac{\sin 4\alpha}{4 \cos \alpha} = \sin \alpha \cos 2\alpha$;

3) $(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \sin 2\alpha = 2 \cos 2\alpha$; 4) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$;

5) $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$.

4. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1°) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha$; 2°) $\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha$;

3) $\frac{\sin 2\alpha - 2 \sin \alpha}{\cos \alpha - 1}$; 4*) $\frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha}$!

5. Ismeretes, hogy $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ és $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. Számítsd ki az alábbi kifejezések értékét:
1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$!

6. Ismeretes, hogy $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ és $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$. Számítsd ki az alábbi kifejezések értékét:
1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$!

7. Ismeretes, hogy $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ és $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$. Számítsd ki az alábbi kifejezések értékét:
1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$!

8. Ismeretes, hogy $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$ és $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$. Számítsd ki az alábbi kifejezések értékét:
1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$!

9*. Határozd meg $\cos 2\alpha$ értékét, ha $\frac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3$!

10*. Határozd meg a $\cos 2\alpha - |\cos\alpha|$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét!

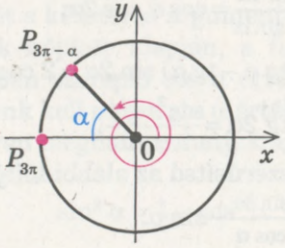
11. Ábrázold az alábbi függvények grafikonját:
1) $y=\sin x\cos x$; 2) $y=\sin^4 x-\cos^4 x$; 3*) $y=\operatorname{tg} x\sin 2x$!

12. Igazold a $\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$ képletet!

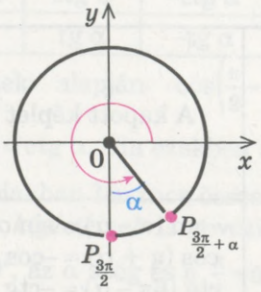
21.3. Visszavezetési képletek

36. táblázat

Visszavezetési képleteken azokat a képleteket értjük, melyek a $k\pi\pm\alpha$ és $(2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $(k\in\mathbf{Z})$ alakú argumentum szögfüggvényeit α argumentumú szögfüggvényekre vezetik vissza.

Algoritmus	Példák
1. Ha az α számhoz hozzáadunk egy $k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ számot (tehát egy olyan számot, amely az egységsugarú körvonal vízszintes átmérőjére esik), akkor az adott függvény neve nem változik meg, ha viszont $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$ alakú számot adunk hozzá (tehát olyan számot, ami az egységsugarú körvonal függőleges átmérőjére esik), akkor az adott függvény	1. Egyszerűsítsd a $\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)$ kifejezést! ▶ $\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$.◁  Magyarázat. A függvény neve nem változik meg, mivel 3π az egységsugarú

A 36. táblázat folytatása

neve megváltozik (a szinusz koszinuszra, a koszinusz szinuszra, a tangens kotangensre, a kotangens tangensre).	körvonal vízszintes átmérőjére esik (balra) (1. ábra). Ha α hegyesszög, akkor $3\pi - \alpha$ a II. negyedben van, ahol a tangens negatív, ezért a képlet jobb oldalán a tangens elé mínusz előjelet kell tennünk.
2. A kapott kifejezés előjelét az eredeti kifejezés előjele határozza meg, ha feltételesen megegyezünk abban, hogy α hegyesszög.	2. Egyszerűsítsd a $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ kifejezést! ▶ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$. ◁  Magyarázat. A függvény neve megváltozik, mivel $\frac{3\pi}{2}$ az egységsugarú körvonal vízszintes átmérőjére esik (alulra) (2. ábra). Ha α hegyesszög, akkor $\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ szög a IV. síknegyedre esik, ahol koszinusz pozitív, ezért a képlet jobb oldalán pluszjel van.

Magyarázat és indoklás

Az addíciós képletek alkalmasak a visszavezetési képletek igazolására, melyekkel bármely negyedhez tartozó szög szögfüggvényeinek az értékeit, visszavezethetjük az első negyedhez tartozó szög szögfüggvényeinek az értékére.

Lássunk néhány példát!

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\pi\cos\alpha-\cos\pi\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha;$$

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\pi\cos\alpha-\sin\pi\sin\alpha=(-1)\cdot\cos\alpha-0\cdot\sin\alpha=-\cos\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(6\pi-\alpha)=\frac{\cos(6\pi-\alpha)}{\sin(6\pi-\alpha)}=\frac{\cos 6\pi\cos\alpha+\sin 6\pi\sin\alpha}{\sin 6\pi\cos\alpha-\cos 6\pi\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha$$

(Természetesen az utolsó példában ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a kotangensfüggvény periodicitását és paritását vesszük figyelembe, vagyis hogy π szerint periodikus és páratlan); $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{7\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{7\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\sin\frac{3\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{3\pi}{2}\sin\alpha}{\cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

A kapott eredményeket az alábbi táblázatban foglaljuk össze.

37. táblázat

Az argumentum alakja	A kapott képlet	Megváltozott-e a függvény neve?	Melyik negyedbe esik az eredeti szög (ha feltételesen az α szöget hegyesnek fogadjuk el)	Az adott szögfüggvény előjele a megfelelő síknegyedben
$k\pi\pm\alpha$ ($k\in\mathbf{Z}$)	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	nem	II.	+
	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	nem	III.	−
	$\operatorname{ctg}(6\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$	nem	IV.	−
$(2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ($k\in\mathbf{Z}$)	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	igen	I.	+
	$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$	igen	IV.	+
	$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$	igen	IV.	−

Hasonlóképpen igazolhatjuk, hogy bármely $k\pi\pm\alpha$ és $(2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ($k\in\mathbf{Z}$) argumentumú trigonometrikus függvényérték az alábbi algoritmus szerint vezethető vissza az α hegyesszög szögfüggvényére:

ha az α számhoz hozzáadunk egy $k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ számot (egy olyan számot, ami az egységsugarú körvonal vízszintes átmérőjére esik), akkor az adott függvény neve nem változik meg, ha viszont $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$ alakú számot adunk hozzá (tehát olyan számot, ami az egységsugarú körvonal függőleges átmérőjére esik), akkor az adott függvény neve megváltozik (a szinusz koszinuszra, a koszinusz szinuszra, a tangens kotangensre, a kotangens tangensre). A kapott kifejezés előjelét az eredeti kifejezés előjele határozza meg, ha feltételesen megállapodunk abban, hogy α hegyesszög. ○

A 37. táblázatban összefoglaltuk a *főbb visszavezetési képleteket*. Az összes többi esetben figyelembe véve a trigonometrikus függvények periodicitását ezen képletek valamelyikét kapjuk.

38. táblázat

x	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$	$2\pi - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

Megjegyezzük a visszavezetési képletek alapján $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$. Ha ezekben a képletekben megcseréljük a két oldalt, akkor a továbbiakban hasznos összefüggéseket kapunk, melyeket a *kiegészítő argumentumok képleteinek* is neveznek (kiegészítő szögek azok a szögek, melyek összege 90°, az α szög és a $\frac{\pi}{2}-\alpha$ szög egymást $\frac{\pi}{2}$-re egészítik ki):

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\qquad \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Például, $\sin 60° = \cos(90° - 60°) = \cos 30°$;
$\cos 89° = \sin(90° - 89°) = \sin 1°$.

Mintafeladatok megoldása

1. példa. A visszavezetési képletek segítségével határozzuk meg az alábbi szögfüggvényértékeket: 1) $\cos 210°$; 2) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$.

Megoldás

1) ▶ $\cos 210° = \cos(180° + 30°) =$
$= -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; ◁

2) ▶ $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1$. ◁

Magyarázat

Írjuk fel az argumentumot olyan alakban, hogy alkalmazni tudjuk a visszavezetési képleteket (vagyis válasszuk külön az argumentumnak azt a részét, amely az egységsugarú körvonal vagy a vízszintes vagy a függőleges

átmérőjére illeszkedik). Például $210° = 180° + 30°$. Természetesen $210° = 270° - 60°$ alakban is felírható, és ebben az esetben is alkalmazhatjuk a visszavezetési képletet.

2*. példa. Bizonyítsuk be a

$$\frac{\cos(3\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}-\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cos 2\alpha$$

azonosságot!

Magyarázat

Bebizonyítjuk, hogy a bal oldal azonosan egyenlő a jobb oldallal. Először vezessünk minden szöget vissza az első negyedbeli szögek értékeire, majd egyszerűsítjük a kapott kifejezést. Alkalmazzuk a $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ és $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$ azonosságokat. A $\cos(3\pi-\alpha)$ és $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$ kifejezések egyszerűsítésekor figyelembe vehetjük ezen függvények periodicitását, és alkalmazhatjuk a visszavezetési képleteket is. Például figyelembe véve, hogy a $\cos x$ függvény 2π szerint periodikus, így

$$\cos(3\pi-\alpha)=\cos(2\pi+\pi-\alpha)=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

Megoldás

▶ $$\frac{\cos(3\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}-\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{(-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}{(-\operatorname{ctg}\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha}-(-\sin\alpha)^2=$$

$$=\frac{-\cos^2\alpha}{-1}-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha.\ \triangleleft$$

Ellenőrző kérdések

1. Mutasd be példákon a visszavezetési képletek alkalmazását! Magyarázd meg a kapott eredményeket!
2*. Bizonyíts be néhány azonosságot!

Gyakorlatok

1. Vezesd vissza a hegyesszög szögfüggvényeire az alábbi szögfügvényértékeket, majd számítsd ki az értéküket:

1) $\sin 240°$; 2) $\operatorname{tg} 300°$; 3) $\cos 330°$; 4) $\operatorname{ctg} 315°$;

5) $\cos\frac{4\pi}{3}$; 6) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 7) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$!

2. Számítsd ki az alábbi kifejezések értékét:

1) $\cos 8°\cos 37°-\cos 82°\cos 53°$; 2) $\sin 68°\sin 38°-\sin 52°\cos 112°$!

3. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket:

1°) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$; 2°) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}$; 3°) $\dfrac{\sin(3\pi+\alpha)\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-2\alpha)}$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi+\alpha)}{(\cos(3{,}5\pi-\alpha)+\sin(1{,}5\pi+\alpha))^2-1}$; 5*) $\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}87^\circ\cdot\operatorname{tg}88^\circ\cdot\operatorname{tg}89^\circ$!

4. Bizonyítsd be az alábbi azonosságokat:

1°) $2\sin(90^\circ+\alpha)\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin 2\alpha$; 2°) $\operatorname{ctg}20^\circ\cdot\operatorname{ctg}70^\circ=1$;

3) $\dfrac{\sin(\pi-2\alpha)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin^2\alpha}=-2\operatorname{ctg}\alpha$; 4*) $\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$!

21.4. Azonos szögfüggvények összege és különbsége, szögfüggvények szorzatát összeggé és különbséggé alakító képletek

39. táblázat

1. Azonos szögfüggvények összege és különbsége

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

2. Szögfüggvények szorzatát összeggé és különbséggé alakító képletek

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

Magyarázat és indoklás

1. Azonos trigonometrikus függvények összegének és különbségének képletei

● A $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$; $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$ addíciós tételek megfelelő oldalait adjuk össze:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y. \qquad (1)$$

Az $x + y$ helyébe helyettesítsük az α-t, az $x - y$ helyébe pedig a β-t, ekkor az

$$x + y = \alpha, \quad (2)$$

$$x - y = \beta \quad (3)$$

egyenletek megfelelő oldalait összeadva és kivonva kapjuk: $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Így az (1) képletből kapjuk a szinuszok összegének szorzattá alakítását:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}. \quad (4)$$

Szavakkal így fogalmazhatjuk meg a kivezetett azonosságot:

két argumentum szinuszainak az összege egyenlő az argumentumok számtani közepe szinuszának és az argumentumok félkülönbsége koszinuszának kétszeres szorzatával.

Ha a (4) azonosságba β helyére $(-\beta)$-t helyettesítünk és figyelembe vesszük, hogy a szinuszfüggvény páratlan, tehát $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, akkor az alábbi azonosságot kapjuk:

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Két argumentum szinuszainak a különbsége egyenlő az argumentumok félkülönbsége szinuszának és az argumentumok számtani közepe koszinuszának kétszeres szorzatával.

Hasonlóképen, ha a

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad (5)$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (6)$$

addíciós tételek megfelelő oldalait összeadjuk, akkor a

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cos y \quad (7)$$

képletet kapjuk. Innen a (2) és (3) helyettesítéseket alkalmazva kapjuk az alábbi azonosságot:

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Két argumentum koszinuszainak az összege egyenlő az argumentumok számtani közepe koszinuszának és az argumentumok félkülönbsége koszinuszának kétszeres szorzatával.

Ha az (5) és (6) azonosságok megfelelő oldalait kivonjuk, akkor

$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2\sin x \sin y \quad (8)$$

egyenlőséget kapjuk.

Innen

$$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Két argumentum koszinuszainak a különbsége egyenlő az argumentumok számtani közepe szinuszának és az argumentumok félkülönbsége szinuszának kétszeres szorzatának ellentettjével.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a tangensek összegének (különbségének) képletét, alkalmazzuk a tangens definícióját, és az addíciós képleteket:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Tehát,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}. \tag{9}$$

Ha a (9) azonosságba β helyére $(-\beta)$-t helyettesítünk és figyelembe vesszük, hogy a tangens függvény páratlan, tehát $\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg}\beta$, és a koszinusz párosságát ($\cos(-\beta) = \cos\beta$), akkor az alábbi azonosságot kapjuk:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}. \tag{10}$$

Fontos megjegyeznünk, hogy a (9) és (10) képletek csak a $\cos\alpha \neq 0$ és $\cos\beta \neq 0$ értékekre azonosság. ○

2. **Szögfüggvények szorzatát összeggé és különbséggé alakító képletek**

● Vegyük észre, hogy a szinusz és koszinusz értékek összegének és különbségének szorzattá alakításakor kivezettük a szögfüggvények szorzatát összeggé alakító képletet. Valóban, ha az (1), illetve (2) azonosság mindkét oldalát elosztjuk 2-vel, és megcseréljük az egyenlőség két oldalát, akkor az alábbi azonosságot kapjuk:

$$\boxed{\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))}. \tag{11}$$

Hasonlóképpen kapjuk a (7) azonosságból, hogy

$$\boxed{\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))}, \tag{12}$$

a (8) azonosságból, pedig

$$\boxed{\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))}. \tag{13}$$

A **(11–13.)** azonosságokban x helyébe α-t, y helyébe β-t helyettesítve a 39. táblázatban lévő képletekhez jutunk.

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Írjuk fel az alábbi összeget és különbséget szorzatként, és ha lehet egyszerűsítsünk:

1) $\sin 75° + \sin 15°$; 2*) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$!

Magyarázat

1) Az első példában közvetlenül alkalmazhatjuk a $\sin\alpha+\sin\beta=$ $=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot, majd a $\sin 45°$ és $\cos 30°$ nevezetes szögek trigonometrikus értékeit.

2) A második példában a $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$ kifejezés négyzetek különbsége, így felírható szorzat alakjában, aztán mind a két szorzótényezőre alkalmazni a koszinuszok összegének és különbségének szorzattá alakítását. Majd a kapott kifejezésre alkalmazzuk a kétszeres argumentum szinusza képletet:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin(\alpha+\beta) \text{ és } 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin(\alpha-\beta).$$

Megoldás

1) ▶ $\sin 75°+\sin 15°=2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2}=2\sin 45°\cos 30°=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. ◁

2) ▶ $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)=$

$$=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$$ ◁

2. példa. Alakítsuk szorzattá a $\sin\alpha+\cos\beta$ kifejezést!

Magyarázat

Szorzattá csak azonos trigonometrikus függvények (szinuszok vagy koszinuszok) összege vagy különbsége alakítható át. Hogy áttérjünk ilyen alakra, elég visszaemlékezni, hogy $\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ $\left(\text{vagy } \sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$.

Megoldás

▶ $$\sin\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{2}=$$

$$=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$ ◁

3. példa. Egyszerűsítsük a $\frac{(\sin 8\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha-\cos 8\alpha)}{1-\cos 6\alpha}$ kifejezést!

Magyarázat

Ahhoz, hogy a kifejezést egyszerűsítsük, a számlálót és a nevezőt is szorzattá kell alakítani úgy, hogy legyenek azonos szorzótényezők. A számlálóban a szinuszok és koszinuszok különbségének szorzattá alakítását (és a szinusz páratlanságát: $\sin(-3\alpha)=-\sin 3\alpha$), a nevezőben az $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ azonosságot alkalmazzuk.

Megoldás

▶ $$\frac{(\sin 8\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha-\cos 8\alpha)}{1-\cos 6\alpha}=\frac{2\sin 3\alpha\cos 5\alpha\cdot(-2)\sin 5\alpha\sin(-3\alpha)}{2\sin^2 3\alpha}=$$

$$=2\cos 5\alpha\sin 5\alpha=\sin 10\alpha.$$ ◁

4* példa. Igazoljuk a $4\sin 70° - \frac{1}{\sin 10°} = -2$ azonosságot!

Magyarázat

Igazoljuk, hogy a bal oldal egyenlő a jobbal. Előbb közös nevezőre hozzuk, majd a szinuszok szorzatát a koszinuszok különbséggé alakítjuk, végül figyelembe vesszük, hogy $\cos 60° = \frac{1}{2}$, és $\cos 80° = \sin 10°$ (mivel $80° + 10° = 90°$, azaz pótszögek).

Megoldás

▶ $$4\sin 70° - \frac{1}{\sin 10°} = \frac{4\sin 70°\sin 10° - 1}{\sin 10°} = \frac{4\cdot\frac{1}{2}(\cos 60° - \cos 80°) - 1}{\sin 10°} =$$

$$= \frac{2\cdot\frac{1}{2} - 2\cos 80° - 1}{\sin 10°} = \frac{-2\cos 80°}{\sin 10°} = \frac{-2\sin 10°}{\sin 10°} = -2.$$ ◁

5* példa. Bizonyítsuk be, hogyha A, B és C egy háromszög szögei, akkor

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}!$$

Magyarázat

A háromszög belső szögeire igaz, hogy $A + B + C = \pi$. Akkor $C = \pi - (A + B)$, és a visszavezetési képletek szerint $\sin(\pi - (A + B)) = \sin(A + B)$. A $\sin A + \sin B$ összeget szorzattá alakítjuk, és figyelembe vesszük, hogy az $(A + B)$ argumentum az $\frac{A+B}{2}$ argumentum kétszerese. Ez lehetővé teszi, hogy a $\sin(A + B)$ kifejezésre alkalmazzuk a kétszeres argumentum képletét. A kapott összegből kiemeljük a $2\sin\frac{A+B}{2}$ közös tényezőt és a zárójelben lévő koszinuszok összegét szorzattá alakítjuk. Majd figyelembe vesszük, hogy $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ és alkalmazzuk a pótszögekre vonatkozó azonosságot.

Megoldás

▶ Figyelembe véve, hogy $C = \pi - (A + B)$, azt kapjuk, hogy

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin(\pi - (A + B)) =$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi-C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} =$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$ ◁

Ellenőrző kérdések

1. Írd le a szinuszok összege és különbsége vagy a koszinuszok összege és különbsége szorzattá alakítását! Hozz fel példát alkalmazásukra!
2. Írd le a tangensek összege és különbsége szorzattá alakítását! Hozz fel példát alkalmazásukra!
3*. Bizonyítsd be a szögfüggvények összegének és különbségének szorzattá alakítását!
4. Hozz fel példát az alábbi képletek alkalmazására:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y));$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y));$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))!$$

5*. Bizonyítsd be a 4. pontban felsorolt azonosságokat!

Gyakorlatok

1. Az alábbi trigonometrikus összegeket (különbségeket) alakítsd szorzattá és egyszerűsítsd a kapott kifejezést:

1°) $\cos 152° + \cos 28°$; 2°) $\cos 48° - \cos 12°$;

3) $\cos 20° - \sin 20°$; 4) $\dfrac{\sin 25° + \sin 15°}{\sin 25° - \sin 15°}$;

5*) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$; 6*) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$;

7*) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$!

2. Igazold a következő azonosságokat:

1°) $\dfrac{\sin 75° + \sin 15°}{\cos 75° - \cos 15°} = -\sqrt{3}$; 2°) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$;

3) $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 10\alpha}{\sin 8\alpha} = 2\sin 2\alpha$; 4) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$;

5) $\dfrac{(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha)}{1 - \cos 8\alpha} = \sin 4\alpha$; 6*) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha - \sin\beta} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

7*) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$!

3. Alakítsd összeggé az alábbi szorzatokat:

1) $\cos 45° \cos 15°$; 2) $\sin\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{5\pi}{24}$; 3) $\sin 20° \sin 10°$; 4) $\cos\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{5}$!

4. Számítsd ki a következő kifejezések értékét:

1) $2\cos 20° \cdot \cos 40° - \cos 20°$; 2*) $4\sin 10° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70°$!

5*. Bizonyítsd be, ha $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, akkor:

1) $\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

2) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$!

6. Bizonyítsd be a következő képleteket:

1) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$!

22. §. TRIGONOMETRIKUS AZONOSSÁGOK

22.1. A háromszoros és félargumentum azonosságai. Trigonometrikus függvények kifejezése a szög tangensének félargumentuma által

40. táblázat

1. A háromszoros argumentum azonosságai	
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k \in Z$	$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$, $k \in Z$
2. Hatványcsökkentő képletek	
$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$
3. A félargumentum azonosságai	
(Az előjelet az egyenlőség bal oldalán lévő trigonometrikus függvény előjelének megfelelően választják ki.)	
$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$	$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$	$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$
$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$, $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in Z$	$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$

A 40. táblázat folytatása

4. Trigonometrikus függvények kifejezése a szög tangensének félargumentuma által

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z \qquad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in Z$$

Magyarázat és indoklás

1. A háromszoros argumentum azonosságai. Az addíciós képletek, a kétszeres argumentum trigonometrikus azonosságai, az alapazonosság, valamint a $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ azonosság alapján levezethetjük az alábbi képleteket:

$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+$
$+(1-2\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha=$
$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$. Tehát,

$$\boxed{\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}.$$

$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha=$
$=(2\cos^2\alpha-1)\cdot\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha=(2\cos^2\alpha-1)\cdot\cos\alpha-$
$-2(1-\cos^2\alpha)\cdot\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$. Vagyis,

$$\boxed{\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}.$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$ Tehát,

$$\boxed{\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}3\alpha}=\frac{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}=\frac{1-\frac{3}{\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\frac{3}{\operatorname{ctg}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^3\alpha}}=\frac{(\operatorname{ctg}^2\alpha-3)\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$ Vagyis,

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Megjegyzés. A $\sin 3\alpha$ és $\cos 3\alpha$ kifejezések értelmezhetők bármely α-ra, míg a $\operatorname{tg} 3\alpha$ kifejezés csak $3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, ahol $k \in \mathbf{Z}$ értékekre értelmezhetők, vagyis ha $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, tehát $\alpha \neq \frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Hasonlóképpen $\operatorname{ctg} 3\alpha$ csak a $3\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ értékekre értelmezhető. Így $\alpha \neq \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. Hatványcsökkentő képletek. A $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ és a $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ azonosságból kapjuk a hatványcsökkentő képleteket:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \tag{1}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}. \tag{2}$$

3. A félargumentum azonosságai. Ha az (1) és (2) képletekbe α helyére $\frac{\alpha}{2}$-t helyettesítünk, akkor az alábbi képleteket kapjuk:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}, \tag{3}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}. \tag{4}$$

A (3) és (4) képletekből kapjuk a félargumentum szinuszára és koszinusára vonatkozó azonosságokat:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}, \tag{5}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}. \tag{6}$$

Ezekben az azonosságokban az előjelet az egyenlőség bal oldalán lévő trigonometrikus függvény előjelének megfelelően választjuk ki.

Ha az (5) és (6) azonosságok megfelelő oldalait elosztjuk, és számításba vesszük, hogy $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, valamint $\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, az alábbi azonosságokat kapjuk:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}, \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}. \tag{8}$$

A (7) és (8) azonosságokban az előjelet szintén az egyenlőség bal oldalán lévő trigonometrikus függvény előjelének megfelelően választjuk ki.

Megjegyezzük, hogy az (5) és (6) azonosságok bármely α értékre értelmezhetők, míg a (7) és (8) azonosság csak azon értékekre, melyekre $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ és $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ is értelmezhető. Tehát a (7) azonosság csak abban az esetben alkalmazható, ha $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, vagyis ha $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, a (8) azonosság abban az esetben alkalmazható, ha $\frac{\alpha}{2} \neq \pi k$, vagyis $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy az $\frac{\alpha}{2}$ argumentum tangens és kotangens értékére levezethető négyzetgyök nélküli képlet is. Például

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{9}$$

Figyelembe véve, hogy az α argumentum az $\frac{\alpha}{2}$ érték kétszerese, könnyen belátható, hogy $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, ha $1 + \cos\alpha \neq 0$. Tehát a (9) képlet abban az esetben alkalmazható, ha $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}} \tag{10}$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \text{ ha } \alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Figyelembe véve, hogy $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, kapjuk az alábbi képletet:

$$\boxed{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}}, \qquad \boxed{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}}.$$

4. Trigonometrikus függvények kifejezése a szög tangensének félargumentuma által. Ahhoz, hogy megkapjuk a $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ értékeire vonatkozó megfelelő képleteket, a kétszeres szögekre vonatkozó képletek mindkét oldalát osszuk el $1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$-vel. Majd ahhoz, hogy tangenst kapjunk, a kapott tört számlálóját és nevezőjét is osszuk el $\cos^2\frac{\alpha}{2}$-vel (természetesen azzal a kitétellel, hogy $\cos^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$, vagyis ha $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$).

$$\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+1}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$ Tehát,

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}} \qquad (11)$$

$$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$ Tehát,

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}} \qquad (12)$$

Ha a (11) és (12) képletek megfelelő oldalait elosztjuk, akkor az alábbi képleteket kapjuk:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}} \qquad (13)$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in\mathbf{Z}}$$

Megjegyezzük, hogy a (13) képlet a kétszeres argumentum képletéből is felírható, mivel $\alpha=2\cdot\frac{\alpha}{2}$.

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Határozzuk meg az alábbi trigonometrikus értékeket számológép és táblázat használata nélkül:
1) sin 15°; 2) cos 15°; 3) tg 15°.

Megoldás

1) ▶ $\sin 15^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}=$

$=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; ◁

Magyarázat

Mivel a 15° a 30° fele, és cos 30° értékét ismerjük, így alkalmazhatjuk a félszeres argumentum képletét. Figyelembe véve, hogy a 15° az első koordináta-negyedhez tartozik (ebben a

2) ▶ $\cos 15° = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} =$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};$$ ◁

3) ▶ $\operatorname{tg} 15° = \frac{1-\cos 30°}{\sin 30°} =$

$$= \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}.$$ ◁

negyedben minden trigonometrikus érték pozitív előjelű), ezért az (5) és a (6) képletekben a négyzetgyököt „+" előjellel vesszük. Ahhoz, hogy meghatározzuk tg 15° értékét, a (7), (9) vagy (10) képlete közül bármelyiket alkalmazhatjuk, de célszerűbb a (9) vagy a (10) képletet alkalmazni, melyek nem tartalmaznak négyzetgyököt. De sin 15° és cos 15° ismeretében alkalmazhatjuk a

$\operatorname{tg} 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°}$ képletet is.

Megjegyzés. A sin 15° és cos 15° értékei felírhatók egyszerűbb alakban is. Ehhez a négyzetgyök alatti kifejezést írjuk fel egy kéttagú polinom négyzeteként. Bővítsük a $2-\sqrt{3}$ kifejezést 2-vel (és a $2\sqrt{3}$ írjuk fel az 1 és a $\sqrt{3}$ kétszeres szorzataként). Azt kapjuk, hogy:

$$2-\sqrt{3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}, \quad 2+\sqrt{3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}.$$

Ezért $\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

Hasonló átalakítások után kapjuk, hogy $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

Ellenőrző kérdések

1. Írd le a háromszoros és a félszögekre vonatkozó trigonometrikus azonosságokat! Fejezd ki a félszögek tangens értékén keresztül a többi szögfüggvényt! Hozz fel példákat a képletek alkalmazására!
2. Igazold a háromszoros és a félszögekre vonatkozó trigonometrikus azonosságokat, valamint a félszögek tangens értékei és a többi szögfüggvény közötti összefüggést!

Gyakorlatok

1. Határozd meg az alábbi trigonometrikus értékeket számológép és táblázat használata nélkül:
1) sin 22°30′; 2) cos 22°30′; 3) tg 22°30′!

2. Határozd meg $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; és $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ értékét, ha:

   1) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ és $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ és $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$!

3. Számítsd ki $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ értékét, ha $\cos 2\alpha=\frac{1}{3}$ és $\pi<\alpha<\frac{5\pi}{4}$!

4. Számítsd ki $\cos\frac{\alpha}{2}$ értékét, ha $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$ és $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$!

5. Számítsd ki $\sin\alpha$ értékét, ha $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$!

6. Számítsd ki $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ értékét, ha $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$ és $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$!

7. Számítsd ki $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ értékét, ha $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$!

8. Határozd meg $\sin 18°$ értékét! Vedd figyelembe, hogy $\sin 36° = \cos 54°$!

22.2. Az $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ kifejezés átalakítása

41. táblázat

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),$$

ahol φ a $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, és a $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ kifejezésekből határozható meg

Magyarázat és indoklás

Először igazoljuk az alábbi állítást: *ha két m és n számra igaz, hogy $m^2+n^2=1$, akkor az adott számok egyike lehet egy φ szög szinusz értéke, míg a másik szám ugyanezen szög koszinusz értéke.*

Vizsgáljuk meg a koordináta-rendszer tetszőleges $M(m;\ n)$ pontját. Az M pont illeszkedik az $x^2+y^2=1$ egységsugarú körvonalra (mivel a feltételek alapján $m^2+n^2=1$). Tehát az M pont abszcisszája a φ szög koszinusza, ordinátája pedig a szinusza, ahol a φ szög az OM sugár és az Ox tengely pozitív iránya közötti hajlásszög. Vagyis $m=\cos\varphi$ és $n=\sin\varphi$.

Ha $m=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ és $n=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, akkor $m^2+n^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1$.

Ez azt jelenti, hogy létezik olyan φ szög, melyre $m=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$,

$n=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$.

Most már igazolhatjuk, hogy $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$.

Ehhez elegendő megmutatni, hogy az egyenlőség jobb oldala azonosan egyenlő a bal oldallal.

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\alpha\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\alpha\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=a\sin\alpha+b\cos\alpha,$$

ezt kellett igazolni. Tehát,

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),$$

ahol φ a $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ és a $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ kifejezésekből határozható meg. ○

Megjegyzés. A kapott képletből a φ-t 2π pontossággal határozzák meg, de leggyakrabban azt az értéket választják, melynek abszolút értéke a legkisebb.

Például, a $\sin\alpha+\cos\alpha$ kifejezésben $a=1$ és $b=1$. Tehát,

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ez azt jelenti, hogy a φ szög az első negyedhez tartozik, így választhatjuk a $\varphi=\frac{\pi}{4}$ értéket. Vagyis

$$\boxed{\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).}$$

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Határozzuk meg a $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét!

Megoldás

▶ Az

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$

képletet alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

Figyelembe véve, hogy $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ kifejezés értékei a $[-1;1]$ intervallumba esnek, ezért a $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ kifejezés értékei a $[-2;2]$ intervallumhoz tartoznak. Tehát az adott kifejezés legnagyobb értéke 2, legkisebb értéke pedig -2. ◁

Magyarázat

A $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$ kifejezésre alkalmazzuk az

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$.

képletet.

Ebben az esetben $a=\sqrt{3}$, $b=-1$, ezért $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4}=2$. Tehát

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{1}{2}.$$

Innen következik, hogy a φ szög a negyedik negyedben van, vagyis választhatjuk a $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ értéket.

A feladat megoldása közben arra is oda kell *figyelni, hogy nem csak meg kell becsülni a kifejezés értékét* $\left(-2 \leqslant 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 2\right)$, hanem igazolni kell, hogy ezeket az értékeket fel is veszi.

2. példa. Ábrázoljuk az $y = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$ függvényt!

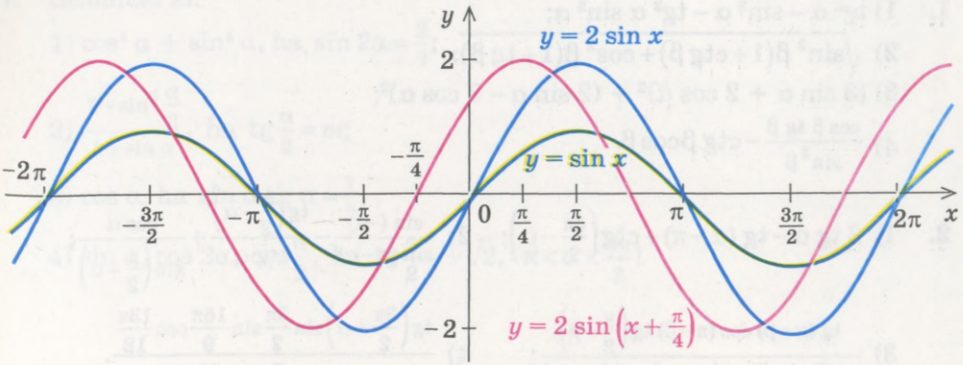
Magyarázat

A $\sin x + \cos x$ kifejezést felírjuk $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ alakban. Ebben az esetben a grafikon függvénytranszformációkkal ábrázolható.

Megoldás

▶ $y = \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Az adott függvény grafikonját úgy kapjuk, hogy az $y = \sin x$ függvény grafikonját (151. ábra) 2-szeresére nyújtjuk az Oy tengely mentén, majd az Ox tengely mentén párhuzamosan eltoljuk $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ egységgel. ◁



151. ábra

Ellenőrző kérdések

1. Írd le azt a képletet, mellyel az $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ kifejezés felírható $c \sin(x + \varphi)$ alakban! Példákkal szemléltesd a képlet alkalmazását!
2. Igazold azt a képletet, mellyel az $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ kifejezés felírható $c \sin(x + \varphi)$ alakban!

Gyakorlatok

1. Határozd meg a alábbi kifejezések legkisebb és legnagyobb értékét:

1) $\sin \alpha + \cos \alpha$;
2) $\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha$;
3) $\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha$;
4) $\sqrt{2} \sin \alpha + \sqrt{6} \cos \alpha$!

2. Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$;
2) $y = \sin 2x - \cos 2x$;
3) $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$;
4) $y = \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$!

3. Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1) $y = 3 \sin x + 4 \cos x$;
2) $y = 5 \sin 3x - 12 \cos 3x$;
3) $y = \sin 7x - \cos 7x$;
4) $y = 8 \sin \frac{x}{3} + 15 \cos \frac{x}{3}$!

4. Léteznek-e az x-nek olyan értékei, melynél az alábbi egyenlőségek igazak:

1) $3 \sin x - 4 \cos x = 6$;
2) $5 \sin 2x + 12 \cos 2x = 15$;
3) $\sqrt{3} \sin 4x - \cos 4x = \sqrt{5}$;
4) $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 1{,}5$?

KIEGÉSZÍTŐ GYAKORLATOK A 3. FEJEZETHEZ

Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket **(1–2.)**!

1. 1) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$;

2) $\sqrt{\sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg} \beta) + \cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta)}$;

3) $(3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha)^2 + (2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha)^2$;

4) $\dfrac{\cos \beta \operatorname{tg} \beta}{\sin^2 \beta} - \operatorname{ctg} \beta \cos \beta$.

2. 1) $2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}(\alpha - \pi) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

2) $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} - \dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{ctg} \alpha} + \dfrac{\cos \alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi - \beta) \cos(\pi - \beta) \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) \sin \dfrac{3\pi}{2} \sin \dfrac{16\pi}{9} \cos \dfrac{13\pi}{18}}{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \cos \dfrac{5\pi}{18} \sin \dfrac{11\pi}{9} \cos 2\pi}$.

Bizonyítsd be az alábbi azonosságokat (3–4.)!

3. 1) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}\beta$; 2) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

3) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}=\operatorname{ctg}\alpha$; 4) $\frac{\sin\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha}=-\operatorname{ctg}2\alpha$!

4. 1) $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}=\cos\frac{\alpha}{4}$, ha $\pi<\alpha<2\pi$;

2) $\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha}}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$, ha $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

3) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}}=-\cos\frac{\alpha}{2}$, ha $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

4) $\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\alpha}}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)$, ha $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$!

5. Igazold az alábbi egyenlőségeket:

1) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8}$; 2) $\operatorname{tg}20°-4\sin 20°\cdot\sin 50°=-2\sin 20°$;

3) $\frac{1}{\sin 10°}=4\sin 70°=2$; 4) $\cos 20°+2\sin 55°-\sqrt{2}\sin 65°=1$!

6. Igazold az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x\geqslant 2$, ha $0<x<\frac{\pi}{2}$;

2) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)}+2\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant 2\sqrt{3}$;

3) $(1+\sin\varphi+\cos\varphi)(1-\sin\varphi+\cos\varphi)(1+\sin\varphi-\cos\varphi)(\sin\varphi+\cos\varphi-1)\leqslant 1$;

4) $2\sin 4\alpha\sin 2\alpha+\cos 6\alpha\geqslant -1$!

7. Számítsd ki:

1) $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$, ha $\sin 2\alpha=\frac{2}{3}$;

2) $\frac{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$, ha $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=m$;

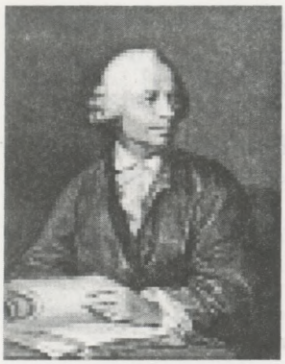
3) $\cos\alpha$, ha $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$;

4) $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, ha $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{2}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$!

MATEMATIKATÖRTÉNETI ADALÉKOK

A *trigonometria* szót először Pitiscus német teológus és matematikus alkalmazta 1595-ben egyik könyvének címében. A szó görög eredetű: a *trigonosz* nem más, mint háromszög és *metron* – mérés. Másképpen a trigonometria a háromszögek mérésének tudománya. Több olyan fogalom és tézis, amit ma a trigonometria témakörébe sorolunk már kétezer évvel ezelőtt is ismert volt. Valójában a háromszögek szakaszai és a körvonal szakaszai közötti arány (mondhatjuk a trigonometrikus függvény) is szerepel a Kr. e. III. században tevékenykedő ókori nagy görög matematikusok, Eukleidész és Arkhimédész munkáiban.

Sokáig a trigonometria a mértan egyik fejezete volt, tehát azokat az állításokat, melyeket most a trigonometrikus függvények terminológiájával fogalmazunk meg, akkoriban még mértani fogalmakkal helyettesítettek. A trigonometria fejlődését a csillagászat inspirálta, ami iránt akkoriban óriási gyakorlati érdeklődés volt (gondoljunk például a hajók helyzetének meghatározására, a napfogyatkozások előrejelzésére).



Leonhard Euler
(1707–1783)

A trigonometria jelenlegi jelölési rendszerét a svájci születésű Leonhard Euler, a XVIII. század nagy matematikusa dolgozta ki, aki sokáig Oroszországban dolgozott és tagja volt a Szentpétervári Tudományos Akadémiának is. Euler vezette be a trigonometrikus függvények mostani jelölését. Ő foglalkozott először a tetszőleges szög trigonometrikus függvényeivel, leírta a visszavezetési képleteket. Euler után a trigonometria a számítási feladatokat megkönnyítő eszköz lett: a trigonometrikus képletek alkalmazása több állítás bizonyítását leegyszerűsítette.

4. fejezet
TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK

KÖTELEZŐ TANANYAG

23. §. A trigonometrikus függvények inverzei
24. §. Egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldása
25. §. Az egyszerű trigonometrikus egyenletektől eltérő trigonometrikus egyenletek megoldása
26. §. Trigonometrikus egyenletrendszerek megoldása
27. §. Egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldása

KIEGÉSZÍTŐ TANANYAG

28. §. Példák a nehezebb trigonometrikus egyenletek és egyenletrendszerek megoldására
29. §. Paraméteres trigonometrikus egyenletek
30. §. Trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldása

A kötelező tananyagrészben megismerkedhettek a trigonometrikus függvények inverzeivel, azok grafikonjaival és tulajdonságaival. Megtanulhatjátok, hogyan kell megoldani a trigonometrikus egyenleteket és egyenletrendszereket valamint az egyszerűbb egyenlőtlenségeket.

A kiegészítő tananyagrészben az érdeklődők megismerkedhetnek az összetettebb trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásával, melyek szerepelhetnek a középszintű és emelt szintű (független tesztelés) érettségi feladatsorokban (külön a paraméteres trigonometrikus egyenletek megoldásával).

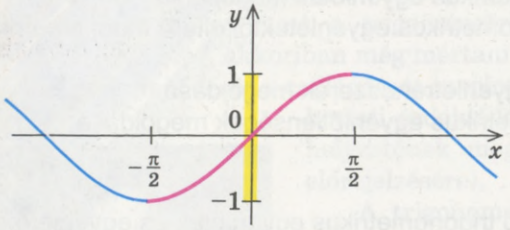
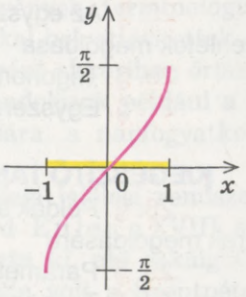
23. §. A TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK INVERZEI

A trigonometrikus függvények inverzeinek definiálásához mindegyik függvény esetében ki kell jelölni egy olyan intervallumot, amelyen az adott függvény csökkenő (vagy növekvő). Az inverz trigonometrikus függvények jelölésére az „arc" (*olv.* árkusz) előtagot használjuk.

23.1. Az $y = \arcsin x$ függvény

42. táblázat

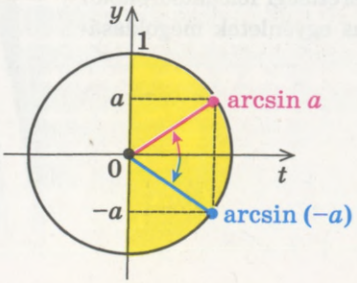
1. Grafikon

$y = \sin x$	$y = \arcsin x$
	
A $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon a sin x függvény növekvő.	

2. Az arcsin a értékei ($|a| \leqslant 1$)

Támpont	Példa
az arcsin a egy olyan szám a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumból, melynek szinuszértéke a.	$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, mivel $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\arcsin a = \varphi$, ha $\begin{cases} \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin\varphi = a \end{cases}$	

3. Az $y = \arcsin x$ függvény paritása



$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

Magyarázat és indoklás

1. Az $y = \arcsin x$ függvény grafikonja. Az $y = \sin x$ függvény növekvő a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon és felvesz minden értéket -1 és 1 között. Tehát az adott függvénynek létezik inverze (lásd a 2.4. fejezet 2.§-át), melyet $y = \arcsin x$ jelölünk. A függvény értelmezési tartománya $[-1; 1]$, értékkészlete $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Az $y = \arcsin x$ függvény szintén növekvő, grafikonját megkapjuk, ha az $y = \sin x$ függvény grafikonjának megfelelő részét tükrözzük az $y = x$ egyenesre (152. ábra).

2. Az arcsin a értéke. Az inverz függvény definíciója értelmében (a megadott intervallumon, ha $\sin \varphi = a$, akkor $\arcsin a = \varphi$, s emellett $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és $|a| = \leqslant 1$. Tehát, az $\arcsin a = \varphi$ ($|a| = \leqslant 1$) felírás azt jelenti, hogy $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin \varphi = a$, vagyis

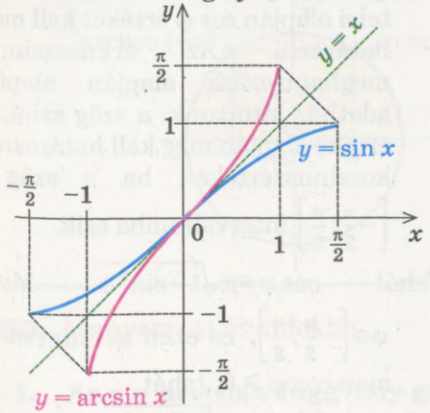
az $\arcsin a$ egy olyan szám a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumból, melynek szinuszértéke a.

Például $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, mivel $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

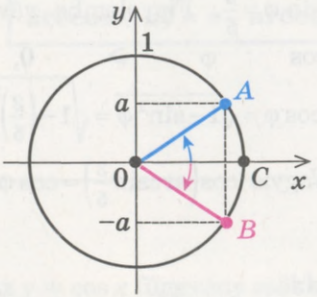
Hasonlóképpen $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, mivel $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Az $y = \arcsin x$ függvény paritása. A negatív számok árkuszszinuszértékeit meghatározhatjuk a függvény páratlanságának figyelembevételével, vagyis alkalmazhatjuk az $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ képletet.

- Ez a megállapítás abból következik, hogy a függvény grafikonja szimmetrikus az origóra (152. ábra), és az Oy tengelyen felvett a és $-a$ számok tükrösek az Ox tengelyre (153. ábra).



152. ábra



153. ábra

Tehát az egységsugarú körvonal megfelelő A és B pontjai (a $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumból) szintén tükrösek az Ox tengelyre. Vagyis a $COA\angle = COB\angle$. Viszont $\arcsin a = COA\angle$ és $\arcsin(-a) = COB\angle$ (a 153. ábra az $a > 0$ esetet szemlélteti). Innen kapjuk, hogy

$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}.$$ ○

Például, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

Példa. Határozd meg a: 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 2*) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$ kifejezések értékeit!

Megoldás

1) ▶ ▸Legyen $\arcsin\frac{1}{3} = \varphi$, akkor az árkuszszinusz meghatározása alapján azt kapjuk, hogy

$$\sin\varphi = \frac{1}{3}.$$

Vagyis $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. ◁

2) ▶ Legyen $\arcsin\frac{3}{5} = \varphi$, akkor az árkuszszinusz meghatározása alapján azt kapjuk, hogy $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin\varphi = \frac{3}{5}$. Figyelembe véve, hogy $\cos\varphi \geqslant 0$, így

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Vagyis $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \cos\varphi = \frac{4}{5}$. ◁

Magyarázat

1) Mivel

$$\varphi = \arcsin a \ (|\, a \,| \leqslant 1)$$

kifejezés azt jelenti, hogy $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin\varphi = a$, ezért minden esetben igaz, hogy

$$\boxed{\sin(\arcsin a) = a,\ |\, a \,| \leqslant 1}.$$

A képletet nem fontos megjegyezni, elegendő a zárójelben lévő kifejezést φ-vel jelölni, és alkalmazni az árkuszszinusz definícióját.

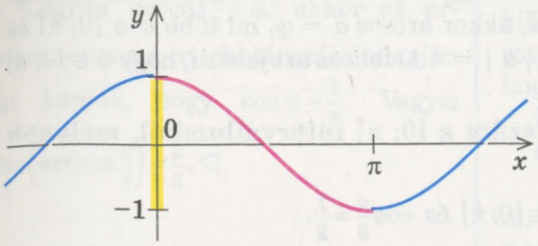
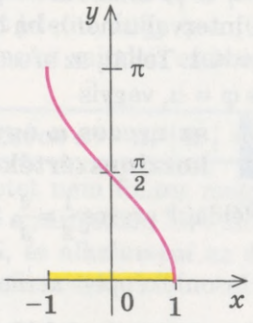
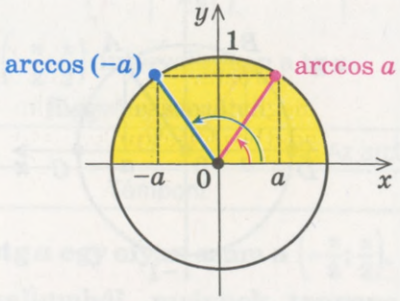
2) Ha a zárójelben lévő kifejezést φ-vel jelöljük, akkor a feladat feltételei alapján $\cos\varphi$ értékét kell meghatározni. Az árkuszszinusz meghatározása alapján alapfeladathoz jutottunk: a szög szinuszértéke alapján meg kell határozni a koszinuszértékét, ha a szög a $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba esik.

Tehát $\cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$. Mivel $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, és ezen az intervallumon $\cos\varphi \geqslant 0$, tehát,

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}.$$

23.2. Az $y = \arccos x$ függvény

43. táblázat

1. Grafikon	
$y = \cos x$	$y = \arccos x$
	
A $[0; \pi]$ intervallumon a $\cos x$ függvény csökkenő.	
2. Az arccos a értékei ($\lvert a \rvert \leqslant 1$)	
Támpont	Példa
az arcos a egy olyan szám a $[0; \pi]$ intervallumból, melynek koszinuszértéke a. $\arccos a = \varphi$, ha $\begin{cases} \varphi \in [0; \pi], \\ \cos \varphi = a \end{cases}$	$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, mivel $\frac{\pi}{4} \in [0; \pi]$ és $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Az arccos$(-a)$ kifejezés értéke	
	**$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$**

Magyarázat és indoklás

1. Az $y = \arccos x$ függvény grafikonja. Az $y = \cos x$ függvény csökkenő a $[0; \pi]$ intervallumon és felvesz minden értéket -1 és 1 között. Tehát az $y = \cos x$

függvénynek ezen az intervallumon létezik inverze. A függvényt $y = \arccos x$-szel jelöljük és értelmezési tartománya $[-1; 1]$, értékkészlete $[0; \pi]$. Az $y = \arccos x$ függvény is csökkenő, grafikonját megkapjuk, ha az $y = \cos x$ függvény grafikonját tükrözzük az $y = x$ egyenesre (154. ábra).

2. Az arccos a értéke. Az inverz függvény definíciója értelmében (a megadott intervallumon), ha $\cos \varphi = a$, akkor $\arccos a = \varphi$, mi több $\varphi \in [0; \pi]$ és $|a| = \leqslant 1$. Tehát, az $\arccos a = \varphi$ ($|a| = \leqslant 1$) felírás azt jelenti, hogy $\varphi \in [0; \pi]$ és $\cos \varphi = a$, vagyis

az arccos a egy olyan szám a $[0; \pi]$ intervallumból, melynek koszinuszértéke a.

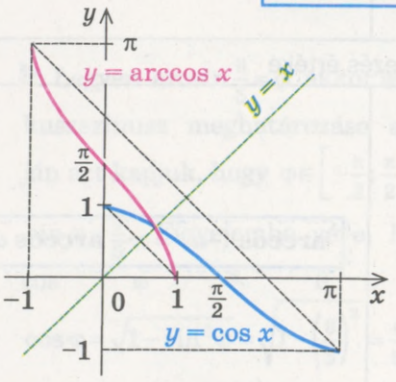
Például $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, mivel $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ és $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Hasonlóképpen $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, mivel $\frac{5\pi}{6} \in [0; \pi]$ és $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

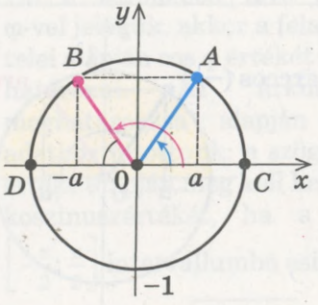
3. Az arccos $(-a)$ kifejezés értéke. A negatív számok árkuszkoszinuszának meghatározásához alkalmazzuk az $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ képletet.

Ez a megállapítás abból következik, hogy az Ox tengelyen felvett a és $-a$ számok tükrösek az Oy tengelyre (155. ábra). De akkor az egységsugarú körvonalon az adott számoknak megfelelő A és B pontok (a $[0; \pi]$ intervallumból) is tükrösek az Oy tengelyre. Vagyis a $COA\angle = DOB\angle$, tehát $COB\angle = \pi - DOB\angle = \pi - COA\angle$. Viszont $\arccos a = COA\angle$ és $\arccos(-a) = COB\angle = \pi - COA\angle$. Innen

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$



154. ábra



155. ábra

Például $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Megemlítjük, hogy az $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ egyenlőség azt jelenti, hogy az $y = \arccos x$ függvény se nem páros, se nem páratlan.

Példa. Határozd meg a $\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$ kifejezés értékét!

Megoldás

▶ Legyen $\arccos\frac{2}{3}=\varphi$, akkor az árkuszkoszinusz meghatározása alapján azt kapjuk, hogy $\cos\varphi=\frac{2}{3}$. Vagyis $\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$. ◁

Magyarázat

Mivel $\varphi = \arccos a$ ($|a| = \leqslant 1$) kifejezés azt jelenti, hogy $\varphi \in [0; \pi]$ és $\cos\varphi = a$, ezért minden esetben igaz, hogy

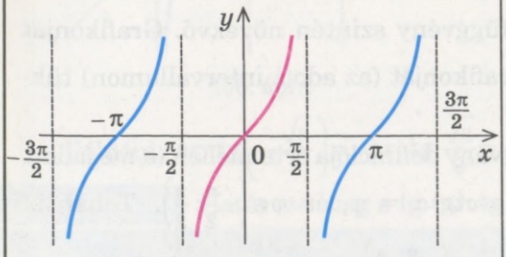
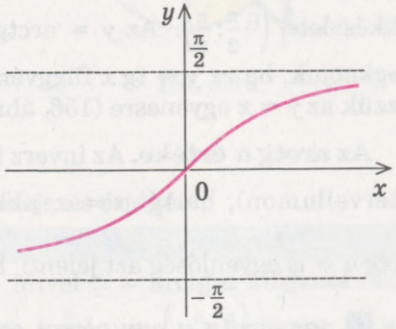
$$\cos(\arccos a) = a, \quad |a| \leqslant 1.$$

A képletet nem fontos megjegyezni, elegendő a zárójelben lévő kifejezést φ-vel jelölni, és alkalmazni az árkuszkoszinusz definícióját.

23.3. Az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény

44. táblázat

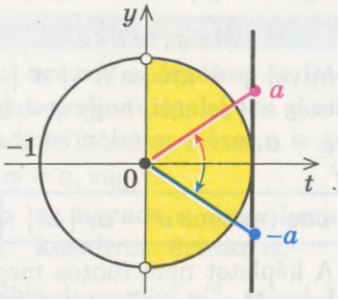
1. Grafikon

$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{arctg} x$
 A $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon a $\operatorname{tg} x$ függvény növekvő.	

2. Az $\operatorname{arctg} a$ értéke

Támpont	Példa
az $\operatorname{arctg} a$ egy olyan szám a $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, intervallumból, melynek tangens értéke a. $\operatorname{arctg} a = \varphi$, ha $\begin{cases}\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\\ \operatorname{tg}\varphi=\alpha\end{cases}$	$\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, mivel $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ és $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

A 44. táblázat folytatása

3. Az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény paritása	
	$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$

Magyarázat és indoklás

1. Az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény grafikonja. Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény növekvő a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon és felvesz minden értéket $-\infty$-től $+\infty$-ig. Tehát az adott függvény $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumra való leszűkítésének létezik inverze, melynek jelölése: $y = \operatorname{arctg} x$. Az inverz függvény értelmezési tartománya $(-\infty; +\infty)$, értékkészlete $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény szintén növekvő. Grafikonját megkapjuk, ha az $y = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonját (az adott intervallumon) tükrözzük az $y = x$ egyenesre (156. ábra).

2. Az $\operatorname{arctg} a$ értéke. Az inverz függvény definíciója értelmében (a megadott intervallumon), ha $\operatorname{tg} \varphi = a$, akkor $\operatorname{arctg} a = \varphi$, és $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Tehát az $\operatorname{arctg} a = \varphi$ egyenlőség azt jelenti, hogy $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ és $\operatorname{tg} \varphi = a$. Vagyis

az $\operatorname{arctg} a$ egy olyan szám a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumból, melynek tangens értéke a.

Például $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, mivel $\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ és $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

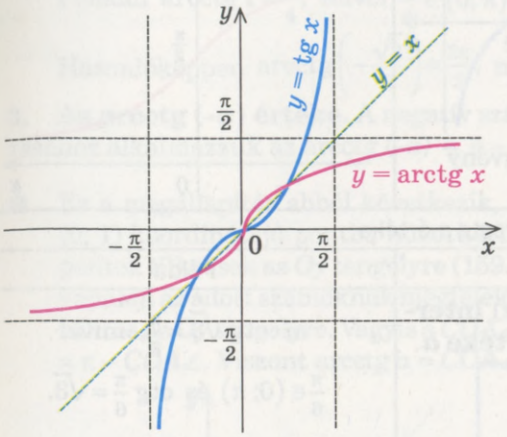
Hasonlóképpen $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, mivel $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ és $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

3. Az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény paritása. A negatív számok árkusztangens értékeit meghatározhatjuk úgy is, hogy figyelembe vesszük a függvény páratlanságát, vagyis alkalmazzuk az $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$ képletet.

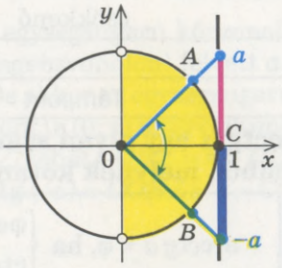
- Ez a megállapítás abból következik, hogy az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény grafikonja szimmetrikus az origóra (156. ábra), és az egységsugarú körvonal (1; 0)

koordinátájú pontjába húzott érintőn felvett a és $-a$ számok tükrösek az Ox tengelyre (157. ábra). Akkor viszont az egységsugarú körvonalon az adott értékeknek megfelelő A és B pontok (a $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumból) szintén tükrösek az Ox tengelyre. Tehát a $COA\angle = COB\angle$. Viszont $\operatorname{arctg} a = COA\angle$ és $\operatorname{arctg}(-a) = -COB\angle$. Innen azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a}$$ ○



156. ábra



157. ábra

Például, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

Példa. Határozd meg a tg (arctg 4) kifejezés értékét!

Megoldás

▶ ▸Legyen arctg 4 = φ, akkor az arkusztangens meghatározása alapján tg φ = 4.

Vagyis tg (arctg 4) = 4. ◁

Magyarázat

Mivel φ = arctg a kifejezés azt jelenti, hogy $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ és tg φ = a, ezért minden esetben igaz, hogy

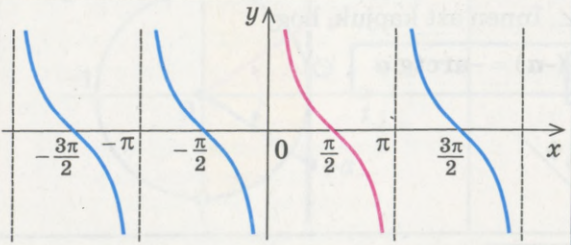
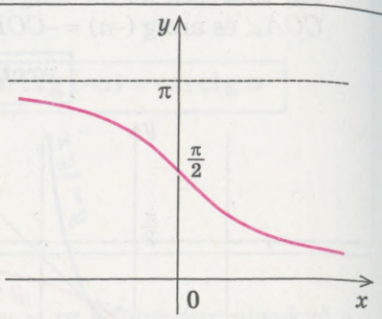
$$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a}$$

A képletet nem fontos megjegyezni: *elegendő a zárójelben lévő kifejezést φ-vel jelölni, és alkalmazni az arkusztangens definícióját.*

23.4. Az $y = \text{arcctg}\, x$ függvény

45. táblázat

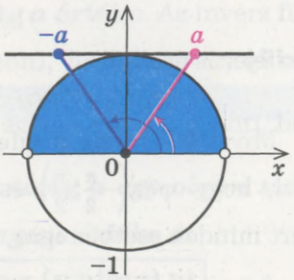
1. Grafikon

$y = \text{ctg}\, x$	$y = \text{arcctg}\, x$
	
A $(0; \pi)$ intervallumon a ctg x függvény csökkenő	

2. Az arcctg a értéke

Támpont	Példa
az arcctg a egy olyan szám a $(0; \pi)$ intervallumból, melynek kotangens értéke a.	$\text{arcctg}\, \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, mivel $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$ és $\text{ctg}\, \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.
$\text{arcctg}\, a = \varphi$, ha $\begin{cases} \varphi \in (0; \pi), \\ \text{ctg}\, \varphi = a \end{cases}$	

3. Az arcctg $(-a)$ értéke

	**$\text{arcctg}\, (-a) = \pi - \text{arcctg}\, a$**

Magyarázat és indoklás

1. Az $y = \text{arcctg}\, x$ függvény grafikonja. Az $y = \text{ctg}\, x$ függvény csökkenő a $(0; \pi)$ intervallumon és felvesz minden értéket $-\infty$-től $+\infty$-ig. Tehát az adott függvény $(0; \pi)$ intervallumra való leszűkítésének létezik inverze, melyet $y = \text{arcctg}\, x$-szel jelölünk. Az inverz függvény értelmezési tartománya $(-\infty; +\infty)$, értékkészlete $(0; \pi)$. Az $y = \text{arcctg}\, x$ függvény szintén csökkenő, grafikonját

megkapjuk, ha az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény grafikonját (az adott intervallumon) tükrözzük az $y = x$ egyenesre (158. ábra).

2. Az arcctg a értéke. Az inverz függvény definíciója értelmében (a megadott intervallumon), ha $\operatorname{ctg} \varphi = a$, akkor $\operatorname{arcctg} a = \varphi$ és $\varphi \in (0; \pi)$. Tehát az $\operatorname{arctg} a = \varphi$ egyenlőség azt jelenti, hogy $\varphi \in (0; \pi)$ és $\operatorname{ctg} \varphi = a$. Vagyis

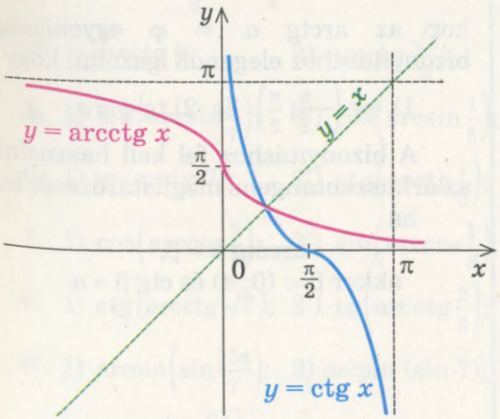
az arcctg a egy olyan szám a $(0; \pi)$ intervallumból, melynek kotangens értéke a.

Például $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, mivel $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$ és $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$.

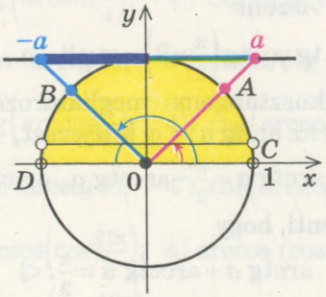
Hasonlóképpen $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$, mivel $\frac{2\pi}{3} \in (0; \pi)$ és $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Az arcctg $(-a)$ értéke. A negatív számok árkusztangensének meghatározásához alkalmazzuk az $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$ képletet.

● Ez a megállapítás abból következik, hogy az egységsugarú körvonalhoz a $(0; 1)$ koordinátájú pontba húzott érintőn (tangensvonalon) felvett a és $-a$ pontok tükrösek az Oy tengelyre (159. ábra). De akkor az egységsugarú körvonalon az adott számoknak megfelelő A és B pont (a $(0; \pi)$ intervallumból) is tükrös az Oy tengelyre. Vagyis a $COA\angle = DOB\angle$, tehát $COB\angle = \pi - DOB\angle = \pi - COA\angle$. Viszont $\operatorname{arcctg} a = COA\angle$ és $\operatorname{arcctg}(-a) = COB\angle = \pi - COA\angle$.



158. ábra



159. ábra

Innét

$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$ ○

Például $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Megemlítjük, hogy az $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$ egyenlőség azt jelenti, hogy az $y = \operatorname{arcctg} x$ függvény se nem páros, se nem páratlan.

1. példa. Határozzuk meg a ctg (arcctg 7) kifejezés értékét!

Megoldás

▶ Legyen arctg 7 = φ, akkor az árkuszkotangens meghatározása alapján ctg φ = 7.

Vagyis ctg (arcctg 7) = 7. ◁

Magyarázat

Mivel φ = arcctg a kifejezés azt jelenti, hogy φ ∈ (0; π) és ctg φ = a, ezért minden esetben igaz, hogy

$$\boxed{\text{ctg (arcctg } a) = a}.$$

A képletet nem fontos megjegyezni: *elegendő a zárójelben lévő kifejezést φ-vel jelölni, és alkalmazni az árkuszkotangens definícióját.*

2*. példa. Bizonyítsuk be az $\text{arctg } a + \text{arcctg } a = \frac{\pi}{2}$ egyenlőséget!

Megoldás

▶ Legyen $\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{arcctg } a$.

1) Mivel arcctg $a \in (0; \pi)$, ezért $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2) Ha arctg $a = \beta$, akkor ctg $\beta = a$ és $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$..

Ekkor viszont

$$\text{tg } \varphi = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \text{ctg } \beta = a.$$

Az árkusztangens meghatározásából kapjuk az arctg a = φ kifejezést.

Tehát $\text{arctg } a = \frac{\pi}{2} - \text{arcctg } a$, ez viszont azt jelenti, hogy

$$\text{arctg } a + \text{arcctg } a = \frac{\pi}{2}. \triangleleft$$

Magyarázat

Írjuk fel az adott egyenlőséget $\text{arctg } a = \frac{\pi}{2} - \text{arcctg } a$ alakban. Ha bevezetjük a $\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{arcctg } a$ jelölést, akkor az arctg a = φ egyenlőség bizonyításához elegendő igazolni, hogy

1) $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ és 2) tg φ = a.

A bizonyításhoz fel kell használni az árkuszkotangens meghatározását is: ha

arcctg $a = \beta$,

akkor $\beta \in (0; \pi)$ és ctg $\beta = a$.

Ellenőrző kérdések

1. Magyarázd meg, mit jelölnek az: a) arcsin a; b) arccos a; c) arctg a; d) arcctg a kifejezések! Állapítsd meg, mely a értékekre értelmezhetők ezek a kifejezések! Magyarázatodat példákkal támaszd alá!
2. Magyarázd meg, hogyan ábrázolhatók az inverz trigonometrikus függvények grafikonjai!

3*. Ábrázold a trigonometrikus függvények inverzeit, sorold fel és indokold is ezen függvények néhány tulajdonságát (értelmezési tartomány, értékkészlet, monotonitás, paritás):
a) $y = \arcsin x$; b) $y = \arccos x$; c) $y = \operatorname{arctg} x$; d) $y = \operatorname{arcctg} x$!

4. Igazold az alábbi képleteket:
a) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$; b) $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$;
c) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$; d) $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$!

Gyakorlatok

Számítsd ki az (**1–9.**) kifejezések értékét!

1°. 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin 1$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\arcsin(-1)$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2°. 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg} 1$; 3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

3°. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\arccos(-1)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4°. 1) $\operatorname{arcctg} 0$; 2) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

5. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{2}{7}\right)$; 2*) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)$; 3*) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$; 4*) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

6. 1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 7)$; 2*) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$; 3*) $\sin(\operatorname{arctg} 3)$; 4*) $\cos(\operatorname{arctg}\sqrt{2})$.

7. 1) $\cos\left(\arccos\frac{2}{7}\right)$; 2*) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 3*) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; 4*) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{1}{5}\right)$.

8. 1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\sqrt{7})$; 2*) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{2}{3}\right)$; 3*) $\sin(\operatorname{arcctg} 5)$; 4*) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}\right)$.

9*. 1) $\arcsin\left(\sin\frac{15\pi}{7}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 7)$; 3) $\arccos\left(\cos\frac{21\pi}{5}\right)$; 4) $\arccos(\cos 8)$;
5) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}\right)$; 6) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)$; 7) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{9}\right)$; 8) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 10)$.

10*. Bizonyítsd be, hogy $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$, ha $|a| \leqslant 1$!

24. §. EGYSZERŰBB TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK MEGOLDÁSA

A $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ és $\operatorname{ctg} x = a$ egyenleteket soroljuk az egyszerű trigonometrikus egyenletek közé.

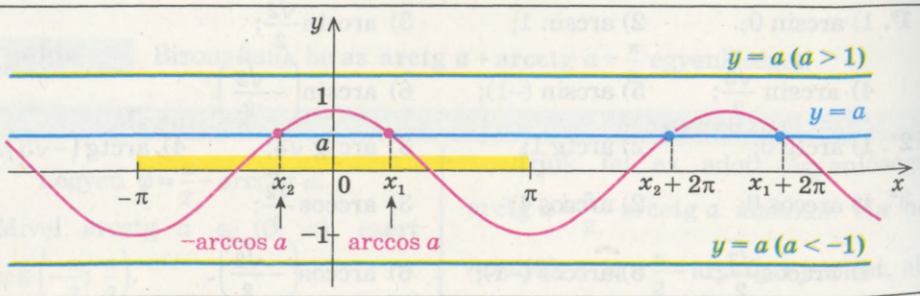
Ahhoz, hogy ezen egyenletek gyökeinek meghatározását szemléletesebbé tegyük, a grafikus megoldást alkalmazzuk.

24.1. A $\cos x = a$ egyenlet

46. táblázat

1. A $\cos x = a$ egyenlet grafikus ábrázolása és megoldása

Grafikus ábrázolás



Megoldás

$\cos x = a$

$|a| > 1$: Nincs megoldás

$|a| \leqslant 1$: $x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$

Példák

1. ▶ $\cos x = \frac{1}{2}$,

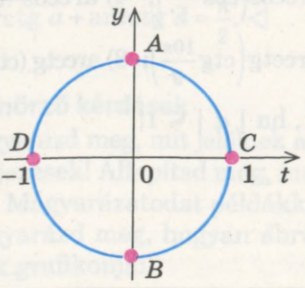
$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z,$

$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$ ◁

2. ▶ $\cos x = \sqrt{3}$.

Nincs megoldás, mivel $\sqrt{3} > 1$. ◁

2. Részesetek



$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

$\cos x = 1 \quad x = 2\pi k,\ k \in Z$

$\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

Magyarázat és indoklás

1. A $\cos x = a$ egyenlet megoldása. Ha $|a| > 1$, az egyenletnek nincs megoldása, mivel bármely x értékre $|\cos x| = \leqslant 1$ (az $y = a$ egyenes, ahogy az a 46. táblázat 1. ábráján is látható, abban az esetben, ha $a > 1$ vagy $a < -1$ nem metszi az $y = \cos x$ függvény grafikonját).

Vizsgáljuk azt az esetet, ha $|a| = \leqslant 1$. Akkor az $y = a$ egyenes metszi az $y = \cos x$ függvény grafikonját. Az $y = \cos x$ függvény a $[0; \pi]$ intervallumon folytonos és -1-től 1-ig csökken, ezért a $\cos x = a$ egyenletnek ezen az intervallumon csak egy gyöke van, az $x_1 = \arccos a$ (46. táblázat, 1. ábra).

A koszinuszfüggvény páros függvény, ezért a $[-\pi; 0]$ intervallumon is a $\cos x = a$ egyenletnek csak egy gyöke van, az x_1 ellentett értéke, vagyis $x_2 = -\arccos a$.

Tehát $|a| = \leqslant 1$ esetén a $\cos x = a$ egyenletnek a $[-\pi; \pi]$ intervallumon (2π hosszúságú intervallumon) $x = \pm\arccos a$ a gyökei.

Figyelembe véve, hogy a koszinuszfüggvény 2π szerint periodikus, így az egyenlet gyökei a meghatározott gyököktől $2\pi n$ periódusokkal különböznek ($n \in \mathbf{Z}$). Felírhatjuk a $\cos x = a$, $|a| = \leqslant 1$ egyenlet megoldásainak általános alakját:

$$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}} \qquad (1)$$

2. Részesetek

- Hasznos megjegyezni a $\cos x = a$ egyenlet megoldásait, ha $a = 0$, $a = 1$ és $a = -1$, melyek könnyen leolvashatók az egységsugarú körvonalról.

Figyelembe véve, hogy koszinusszal az egységsugarú körvonal megfelelő pontjának abszcisszáját jelöljük, azt kapjuk, hogy $\cos x$ akkor egyenlő nullával, ha az egységsugarú körvonal A vagy B pontját választjuk (45. táblázat, 2. ábra). Tehát

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Hasonlóképpen $\cos x = 1$, akkor és csak akkor, ha az egységsugarú körvonal C pontját választjuk, tehát $x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ugyanígy kapjuk, hogy $\cos x$ akkor és csak akkor egyenlő -1-gyel ($\cos x = -1$), ha az egységsugarú körvonal D pontját választjuk, tehát $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. ○

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Oldjuk meg a $\cos x = -\frac{1}{2}$ egyenletet!

Megoldás	*Magyarázat*
▶ $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$,	Mivel $\left\|-\frac{1}{2}\right\| < 1$, így az adott egyenlet a $\cos x = a$ típusú egyenletek közé tartozik, melyeknek van megoldásuk és gyökük az (1) képlet szerint írható fel.
$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n$,	

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$

Felelet: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Az $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ kifejezés értékének meghatározásához alkalmazzuk az **arccos (–*a*) = π – arccos *a*** képletet. Ezért

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

2. példa. Oldjuk meg a $\cos x = \sqrt{2}$ egyenletet!

Megoldás

▶ Mivel $|\sqrt{2}| > 1$, ezért az egyenletnek nincs megoldása.

Felelet: nincs megoldás. ◁

Magyarázat

Mivel $|\sqrt{2}| > 1$, ezért az adott egyenletnek nincs megoldása (így nem alkalmazható az (1) képlet).

3. példa. Oldjuk meg a $\cos 4x = \frac{1}{3}$ egyenletet!

Megoldás

▶ $4x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$

$x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$

Felelet: $\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Magyarázat

Mivel $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, ezért alkalmazható az (1) képlet.

Figyelembe véve, hogy $\arccos\frac{1}{3}$ nem nevezetes szög, így a megoldáshoz elegendő 4-gyel elosztani az (1) képlet alapján felírt megoldás mindkét oldalát.

Megjegyzés. Ha egy feladatban a gyökök közelítő értékét kell meghatározni egy megadott intervallumon, akkor számológéppel meghatározzuk, hogy $\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} \approx 0{,}31$, $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, és a gyökök közelítő értékét $x \approx \pm 0{,}31 + 1{,}57n$, $n \in \mathbf{Z}$ alakban írjuk fel, majd kiszámítjuk $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$ esetekre és kiválasztjuk azokat a gyököket, melyek hozzátartoznak az adott intervallumhoz.

4. példa. Oldjuk meg a $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenletet!

Megoldás

▶ $2x-\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z},$

$2x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,$

$x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

Felelet: $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$ ◁

Magyarázat

Mivel $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|<1$, ezért a koszinusz argumentumának $2x-\frac{\pi}{3}$ meghatározására alkalmazható az (1) képlet.

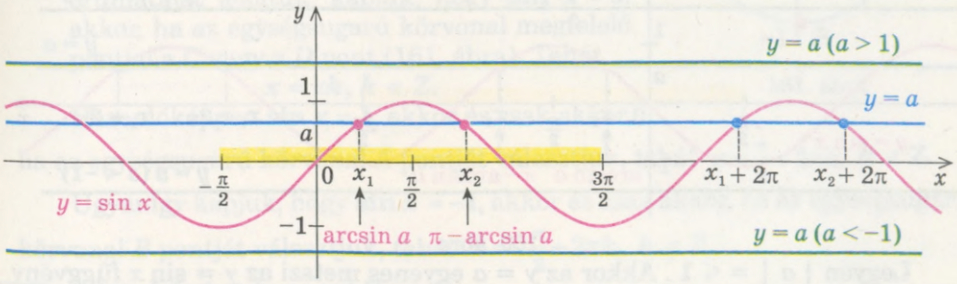
Majd a kapott lineáris egyenletből meghatározzuk az x változó értékét.

24.2. A $\sin x = a$ egyenlet

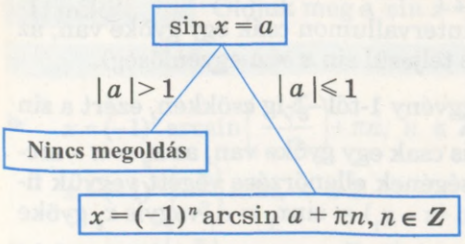
47. táblázat

1. A $\sin x = a$ egyenlet grafikus ábrázolása és megoldása

Grafikus ábrázolás



Megoldás



Példák

1. ▶ $\sin x=\frac{1}{2},$

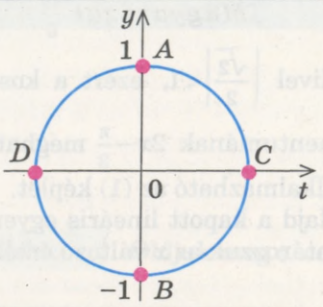
$x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$ ◁

2. ▶ $\sin x=\sqrt{3}.$

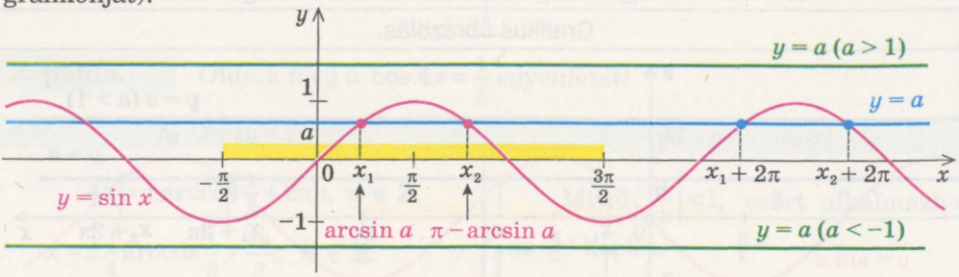
Nincs megoldás, mivel $\sqrt{3}>1.$ ◁

A 47. táblázat folytatása

2. Részesetek	
	$\sin x = 0 \; x = \pi k, \; k \in \mathbf{Z}$ $\sin x = 1 \; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \; k \in \mathbf{Z}$ $\sin x = -1 \; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \; k \in \mathbf{Z}$

Magyarázat és indoklás

1. A $\sin x = a$ egyenlet megoldása. Ha $|a| > 1$, az egyenletnek nincs megoldása, mivel bármely x értékre $|\sin x| = \leqslant 1$ (az $y = a$ egyenes a 160. ábrán, abban az esetben, ha $a > 1$ vagy $a < -1$ nem metszi az $y = \sin x$ függvény grafikonját).



160. ábra

Legyen $|a| = \leqslant 1$. Akkor az $y = a$ egyenes metszi az $y = \sin x$ függvény grafikonját. Az $y = \sin x$ függvény a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon folytonos és növekvő, ezért a $\sin x = a$ egyenletnek ezen az intervallumon csak egy gyöke van, az $x_1 = \arccos a$ (160. ábra), (és erre a gyökre teljesül $\sin x = a$ egyenlőség).

A $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon a szinuszfüggvény 1-től –1-ig csökken, ezért a $\sin x = a$ egyenletnek ezen az intervallumon is csak egy gyöke van, az $x_2 = \pi - \arcsin a$ (160. ábra). A második gyök helyességének ellenőrzése végett vegyük figyelembe, hogy $x_2 = \pi - x_1$. Így $\sin x_2 = \sin(\pi - x_1) = \sin x_1 = a$, vagyis x_2 gyöke a $\sin x = a$ egyenletnek.

Tehát $|a| = \leqslant 1$ esetén a $\sin x = a$ egyenletnek a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon (2π hosszúságú intervallumon) csak két gyöke van: $x_1 = \arcsin a$ és $x_2 = \pi - \arcsin a$.

Figyelembe véve, hogy a szinuszfüggvény 2π szerint periodikus, így az egyenlet gyökei a meghatározott gyököktől periódusokkal különböznek, $2\pi k$-nel ($k \in \mathbf{Z}$). Az alábbi gyökképleteket kapjuk a $\sin x = a$, ha $|a| = \leqslant 1$ egyenletre:

$$x = \arcsin a + 2\pi k; \quad (1)$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

A $\sin x = a$ egyenletnek, ha $|a| = \leqslant 1$ az (1) és (2) képletekkel felírt gyökei összevonhatók, és egy képlettel is megadhatók

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}} \quad (3)$$

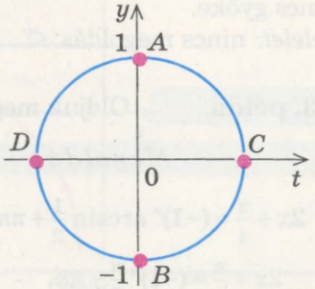
Valóban, a (3) képletből páros $n = 2k$ értékekre kapjuk az (1) képletet, $x = \arcsin a + 2\pi k$, páratlan $n = 2k + 1$ értékekre a (2) képletet, $x = -\arcsin a + \pi(2k + 1) = \pi - \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. Részesetek

- Hasznos megjegyezni azon részesetek megoldását, ha $a = 0$, $a = 1$ és $a = -1$, melyek könnyen leolvashatók az egységsugarú körvonalról (161. ábra).

Figyelembe véve, hogy szinusszal az egységsugarú körvonal megfelelő pontjának ordinátáját jelöltük, kapjuk, hogy $\sin x = 0$, akkor, ha az egységsugarú körvonal megfelelő pontjai a C vagy a D pont (161. ábra). Tehát

$$x = \pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$



161. ábra

Hasonlóképpen $\sin x = 1$, akkor és csak akkor, ha az egységsugarú körvonal A pontját választjuk, tehát $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}$.

Ugyanígy kapjuk, hogy $\sin x = -1$, akkor és csak akkor, ha az egységsugarú körvonal B pontját választjuk, tehát $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}$.

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Oldjuk meg a $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenletet!

Megoldás	*Magyarázat*
▶ $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$	Mivel $\left\|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\| < 1$, így az adott egyenlet a $\sin x = a$ típusú egyenletek közé tartozik, melyeknek van megoldásuk és gyökük a (3) képlet szerint írható fel.
$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$	Az $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ kifejezés értékének meghatározásához alkalmazzuk a **$\arcsin(-a) = -\arcsin a$** képletet.
Felelet: $(-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$ ◁	

Ezért

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}.$$

Megjegyzés. Az 1. példa megoldását $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$ alakban is megadhatjuk, de ez nem kötelező.

2. példa. Oldjuk meg a $\sin x=\frac{\pi}{2}$. egyenletet!

Megoldás

▶ Mivel $\left|\frac{\pi}{2}\right|>1$, ezért az egyenletnek nincs gyöke.

Felelet: nincs megoldás. ◁

Magyarázat

Mivel $\left|\frac{\pi}{2}\right|>1$, ezért az adott egyenletnek nincs megoldása (így nem alkalmazható az (3) képlet).

3. példa. Oldjuk meg a $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ egyenletet!

Megoldás

▶ $2x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},$

$2x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,$

$x=(-1)^n\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}.$

Felelet: $(-1)^n\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}.$ ◁

Magyarázat

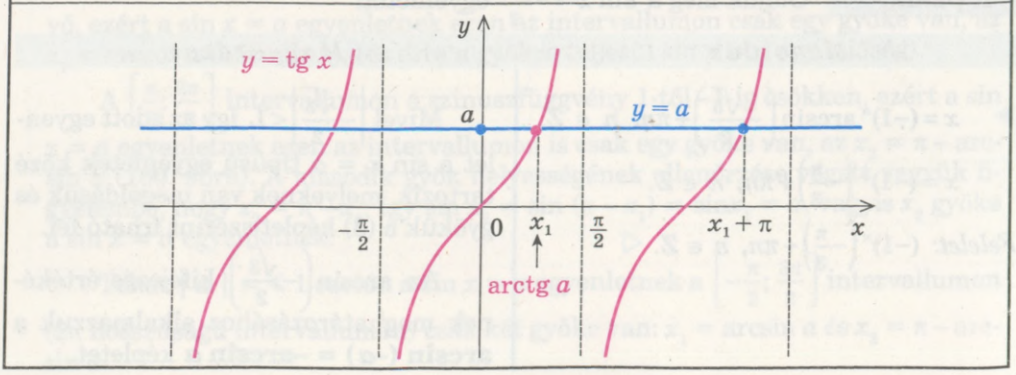
Mivel $\left|\frac{1}{2}\right|<1$, ezért alkalmazható a (3) képlet a $2x+\frac{\pi}{4}$ kifejezés meghatározására.

Majd a kapott lineáris egyenletből kifejezzük az x változó értékét.

24.3. A $\operatorname{tg} x = a$ és $\operatorname{ctg} x = a$ egyenletek

48. táblázat

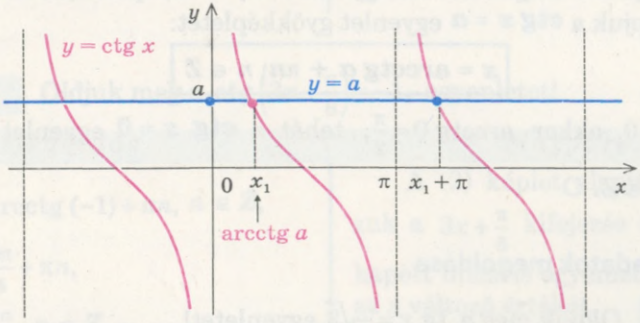
1. A $\operatorname{tg} x = a$ egyenlet grafikus ábrázolása és megoldása



A 48. táblázat folytatása

Képlet	Példa
$\operatorname{tg} x = a$ $x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ Részeset $\operatorname{tg} x = 0$ $x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$\operatorname{tg} x = 1.$ $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ ◁

2. A $\operatorname{ctg} x = a$ egyenlet grafikus ábrázolása és megoldása



Képlet	Példa
$\operatorname{ctg} x = a$ $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ Részeset $\operatorname{ctg} x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$	$\operatorname{ctg} x = 7.$ $x = \operatorname{arcctg} 7 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$ ◁

Magyarázat és indoklás

1. A $\operatorname{tg} x = a$ és $\operatorname{ctg} x = a$ egyenlet megoldása.

● Tekintsük a **$\operatorname{tg} x = a$** egyenletet. A $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon az $y = \operatorname{tg} x$ függvény növekvő és folytonos (felvesz minden értéket $-\infty$-től $+\infty$-ig), ezért ezen az intervallumon az a bármely értékére a $\operatorname{tg} x = a$ egyenletnek csak egy gyöke van, mégpedig az $x_1 = \operatorname{arctg} a$.
Figyelembe véve, hogy az $y = \operatorname{tg} x$ függvény π szerint periodikus, ezért a többi gyök a meghatározott gyöktől $\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ periódussal különbözik. Ebből kapjuk a

$\operatorname{tg} x = a$:

egyenlet gyökképletét:

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}} \quad (1)$$

Ha $a = 0$, akkor $\operatorname{arctg} 0 = 0$, tehát a $\operatorname{tg} x = 0$ egyenlet megoldása: $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ○

● Tekintsük a $\operatorname{ctg} x = a$ egyenletet. A $(0; \pi)$ intervallumon az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény csökkenő és folytonos (felvesz minden értéket $+\infty$-től $-\infty$-ig), ezért ezen az intervallumon az a bármely értékére a $\operatorname{ctg} x = a$ egyenletnek csak egy gyöke van, mégpedig az $x_1 = \operatorname{arcctg} a$ (48. táblázat, 2. ábra).

Figyelembe véve, hogy az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény π szerint periodikus, ezért a többi gyök a meghatározott gyöktől πn, $n \in \mathbf{Z}$ periódussal különbözik. Ebből kapjuk a $\operatorname{ctg} x = a$ egyenlet gyökképletét:

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}} \quad (2)$$

Ha $a = 0$, akkor $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, tehát a $\operatorname{ctg} x = 0$ egyenlet megoldása: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ○

Mintafeladatok megoldása

1. példa. Oldjuk meg a $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ egyenletet!

Megoldás

▶ $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Felelet: $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Magyarázat

A $\operatorname{tg} x = a$ egyenletnek a bármely értékére van megoldása, ezért minden esetben alkalmazható az (1) képlet:

$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Az $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ kifejezés értékének meghatározásához alkalmazzuk az $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$ képletet:

$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

2. példa. Oldjuk meg a $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$. egyenletet!

Megoldás

▶ $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$,

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n$,

$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Felelet: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Magyarázat

Az (1) képletből határozzuk meg az $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$ kifejezés értékét, majd a kapott lineáris egyenletből határozzuk meg az x változó értékét.

3. példa. Oldjuk meg a $\operatorname{ctg} x = 5$ egyenletet!

Megoldás

▶ $x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Felelet: $\operatorname{arcctg} 5 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Magyarázat

A $\operatorname{ctg} x = a$ egyenletnek a bármely értékére van megoldása, ezért minden esetben alkalmazható a (2) képlet:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Az arcctg 5 kifejezés nem nevezetes érték (lásd. 17.§, 26. táblázat), ezért az eredményt ilyen alakban hagyjuk.

4. példa. Oldjuk meg a $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$. egyenletet!

Megoldás

▶ $3x + \frac{\pi}{6} = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$,

$3x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + \pi n$,

$x = \frac{7\pi}{36} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$.

Felelet: $\frac{7\pi}{36} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Magyarázat

A (2) képlet alapján meghatározzuk a $3x + \frac{\pi}{6}$ kifejezés értékét, majd a kapott lineáris egyenletből kiszámítjuk az x változó értékét.

Az arcctg (–1) kifejezés értékének meghatározásához alkalmazzuk az

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

képletet.

Ezért

$$\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Ellenőrző kérdések

1. Mely egyenleteket soroljuk az egyszerű trigonometrikus egyenletek közé?
2. Nevezd meg az egyszerű trigonometrikus egyenletek gyökképleteit! Mely esetekben nem alkalmazhatók ezek a képletek?
3. Vezesd ki az egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldóképletét!
4*. Indokold a trigonometrikus egyenletek megoldását nevezetes részesetekre ($\sin x = a$ és $\cos x = a$, ha $a = 0$; 1 és –1; $\operatorname{tg} x = a$ és $\operatorname{ctg} x = a$, ha $a = 0$)!

Gyakorlatok

Oldd meg az (**1–11.**) egyenleteket!

1°. 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = \sqrt{3}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2°. 1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{1}{2}$; 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3°. 1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{tg} x = -1$; 4) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

4°. 1) $\operatorname{ctg} x = 1$; 2) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg} x = -1$; 4) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

5. 1) $\sin x = -0{,}6$; 2) $\cos x = 0{,}3$; 3) $\operatorname{tg} x = -3{,}5$; 4) $\operatorname{ctg} x = 2{,}5$.

6. 1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin 4x = 0$; 3) $\operatorname{tg} 3x = 1$; 4) $\operatorname{tg} 4x = 3$.

7. 1) $\sin\left(-\frac{t}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{t}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{7} = 1$.

8°. 1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$; 3) $\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$; 4) $\cos 4x = 0$.

9. 1) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$.

10. 1) $2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 3$;

3) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$; 4) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

11. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1$;

3) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}$.

Határozd meg az alábbi egyenletek gyökeit a megadott intervallumban (**12–13.**)!

12*. 1) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0, 2\pi]$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi, \pi]$;

3) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $[-3\pi, 3\pi]$; 4) $\operatorname{ctg} 4x = -1$, $[0, \pi]$.

13*. 1) $\sin 3x = -\frac{1}{2}$, $[-4, 4]$; 2) $\sin\frac{x}{2} = 0$, $[-12, 18]$;

3) $\cos x = 1$, $[-6, 16]$; 4) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[1, 7]$.

25. §. AZ EGYSZERŰBB TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEKTŐL ELTÉRŐ TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK MEGOLDÁSA

Az összetett trigonometrikus egyenleteket azonos átalakítással, szorzattá alakítással vagy helyettesítéssel visszavezetjük egyszerű trigonometrikus egyenletekre.

25.1. Változócserével megoldható trigonometrikus egyenletek

Célszerű megjegyezni azt az általános elvet, hogy változócserét alkalmazunk akkor, ha nem tudunk trigonometrikus átalakítást végezni.

Ha egy egyenletben, egyenlőtlenségben, azonosságban az ismeretlen ugyanazon alakban szerepel, akkor változócserét alkalmazunk, azaz az adott kifejezést új változóval jelöljük.

1. példa. Oldjuk meg a $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$ egyenletet!

Megoldás

▶ Vezessünk be új változót. Legyen $\sin x = t$, akkor az egyenlet $2t^2 - 7t + 3 = 0$ alakban írható fel. Innen

$$t_1 = 3 \text{ és } t_2 = \frac{1}{2}.$$

1. Ha $t = 3$, akkor a $\sin x = 3$ egyenletnek nincs megoldása, mivel $|3| > 1$.
2. Ha $t = \frac{1}{2}$, akkor $\sin x = \frac{1}{2}$, vagyis

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

Felelet: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}$. ◁

Magyarázat

Vegyük észre, hogy az adott egyenletben csak egyféle szögfüggvény a $\sin x$ szerepel. Ezért célszerű a $\sin x = t$ jelöléssel új változót bevezetni.

Az így kapott másodfokú egyenletet megoldjuk, majd visszahelyettesítjük a gyököket, és meghatározzuk az egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldásait.

Megjegyzés. Az első példa megoldásakor a $\sin x = t$ változó cseréjénél figyelembe vehetjük a $|\sin x| \leqslant 1$ kikötést, vagyis hogy $|t| \leqslant 1$. Ebben az esetben a $t = 3$ gyök rögtön kizárható, mert nem felel meg a $|t| \leqslant 1$ kikötésnek, és így csak a $t = \frac{1}{2}$ kell visszahelyettesíteni.

2. példa. Oldjuk meg a $\operatorname{tg}^3 2x - \operatorname{tg} 2x = 0$ egyenletet!

Magyarázat

Az adott egyenletben a változó csak $\operatorname{tg} 2x$ alakban fordul elő, ezért célszerű új változót bevezetni. Legyen $\operatorname{tg} 2x = t$. A visszahelyettesítés után megoldjuk a kapott egyszerű trigonometrikus egyenleteket, a feleletben fel kell sorolni az összes gyököt.

Megoldás

▶ Legyen $\operatorname{tg} 2x = t$. Akkor az egyenletünk $t^3 - t = 0$ alakba írható fel. Innét $t(t^2 - 1) = 0$, vagyis $t = 0$ vagy $t^2 - 1 = 0$. Az utolsó egyenletből kapjuk, hogy $t^2 = 1$, ebből $t = 1$ vagy $t = -1$.

Elvégezzük a visszahelyettesítést.

1. Ha $t = 0$, akkor $\operatorname{tg} 2x = 0$, $2x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Tehát, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.
2. Ha $t = 1$, akkor $\operatorname{tg} 2x = 1$, $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi m$, $2x = \frac{\pi}{4} + \pi m$. Tehát,
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2},\ m \in \mathbf{Z}.$$
3. Ha $t = -1$, akkor $\operatorname{tg} 2x = -1$, $2x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$. Tehát,
$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Felelet: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$; $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Az összetett trigonometrikus egyenletek megoldásakor alkalmazhatjuk az alábbi irányelveket.

1. *Minden trigonometrikus függvényt hozzunk* ***azonos argumentumra.***
2. *Ha sikerült mindegyiket azonos argumentumra hozni, akkor próbáljuk meg úgy átalakítani, hogy csak* ***egyfajta trigonometrikus függvény szerepeljen benne.***
3. *Ha sikerült azonos argumentumra hozni, de nem sikerült elérni, hogy csak egyfajta trigonometrikus függvény szerepeljen benne, akkor próbáljuk meg* ***homogén*** *alakra hozni.*
4. *Ha az előbbi módszerek nem alkalmazhatók, akkor az egyenletet* ***nullára redukáljuk,*** *és megpróbáljuk* ***szorzattá alakítani,*** *vagy* ***speciális módszert*** *kell alkalmazni.*

25.2. Trigonometrikus egyenletek megoldása olyan átalakításokkal, hogy csak egyfajta trigonometrikus kifejezés (azonos argumentumú függvény) szerepeljen benne

1. példa. Oldjuk meg a $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$ egyenletet!

Megoldás

▶ A kétszeres szög koszinusza és a trigonometria alapazonossága alapján:

Magyarázat

A $\cos^2 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ képlet alkalmazásával minden trigonometrikus függvényt azonos (x) argumentumra hozunk.

$\cos^2 x - \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0$,

$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0$,

$-2 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0$.

Bevezetjük a $\sin x = t$ *helyettesítést*:

$-2t^2 - 5t - 2 = 0$.

Ebből $2t^2 + 5t + 2 = 0$, $t_1 = -2$ és $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Elvégezzük a visszahelyettesítést.

1. Ha $t_1 = -2$, akkor $\sin x = -2$. Az egyenletnek nincs megoldása, mivel $|-2| > 1$.
2. Ha $t = -\frac{1}{2}$, akkor $\sin x = -\frac{1}{2}$. Innen

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,$$

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

Felelet: $(-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}$. ◁

Majd minden trigonometrikus kifejezést a $\sin x$ függvényre vezetjük vissza.

A kapott egyenletben a változó mindenütt azonos ($\sin x$) alakú ezért célszerű a $\sin x = t$ helyettesítés alkalmazása.

Megjegyzés: Ha szükséges, a felelet $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}$ alakban is megadható.

2. példa. Oldjuk meg a $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = 3$ egyenletet!

Megoldás

▷ $\operatorname{tg} x + \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 3$. Legyen $\operatorname{tg} x = t$.

A $t + \frac{2}{t} = 3$ egyenletet kapjuk.

Ha $t \neq 0$, akkor az egyenlet azonos átalakítással a

$t^2 - 3t + 2 = 0$ alakra hozható.

Ebből $t_1 = 1$ és $t_2 = 2$.

Visszahelyettesítve kapjuk, hogy:

1. ha $t = 1$, akkor $\operatorname{tg} x = 1$.

Innen $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n$,

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

2. Ha $t = 2$, akkor $\operatorname{tg} x = 2$. Akkor

$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi m, \; m \in \mathbf{Z}$.

Felelet: $\frac{\pi}{4} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}$;

$\operatorname{arctg} 2 + \pi m, \; m \in \mathbf{Z}$. ◁

Magyarázat

Mivel minden argumentum azonos (x), ezért úgy kell átalakítani az egyenletet, hogy csak egyfajta (tangens) szögfüggvény szerepeljen benne (alkalmazzuk a $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ azonosságot).

Így a kapott egyenletben a változónak csak a tangense szerepel, ezért célszerű $\operatorname{tg} x = t$ változócserét alkalmazni.

25.3. Homogén trigonometrikus egyenletek és homogén egyenletre visszavezethető trigonometrikus egyenletek megoldása

Tekintsük a $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$ egyenletet. (1)

Az adott típusú egyenlet megoldásának menetét (nem megoldását) szemléletesebbé tehetjük, ha $\sin x = u$ és $\cos x = v$ helyettesítést alkalmazunk. Ekkor az (1) egyenlet a következő alakba írható át:

$$u^2 - uv - 2v^2 = 0. \quad (2)$$

A (2) egyenlet bal oldalán lévő többtagú kifejezés minden tagja másodfokú (emlékezzetek vissza, az uv tag is másodfokú). Ebben az esetben a (2) egyenletet homogén egyenletnek nevezzük (és így az (1) egyenletet is). Az ilyen típusú egyenletek felismerésére és megoldásánál az alábbi irányelv alkalmazható:

Ha egy ***egyenlet*** *jobb és bal oldalán olyan kétváltozós többtagú kifejezés (vagy azonos argumentumú két függvény) van, melynek* ***minden tagja azonos fokszámú***[1]*, akkor az ilyen egyenleteket* ***homogén egyenletnek nevezzük****. A homogén egyenleteket a legnagyobb hatványkitevőjű változóval való osztással oldják meg.*

Megjegyzés. Követve az előbb megfogalmazott irányelvet, az egyenlet mindkét oldalát el kell osztani a változót tartalmazó kifejezéssel. Ez gyökvesztéshez vezethet (ha az egyenlet gyökei olyan számok, amelynél az osztó értéke nulla). Ahhoz, hogy ezt elkerüljük, szükségszerű külön vizsgálni azt az esetet, amikor annak a kifejezésnek az értéke, mellyel osztani fogjuk az egyenlet mindkét oldalát nullával, és csak ezután elvégezni az osztást a nullával nem egyenlő értékű kifejezéssel.

1. példa. Oldjuk meg a $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$ egyenletet!

Megoldás

▶ Ha $\cos x = 0$, akkor az egyenletnek nincs gyöke. Tehát $\cos^2 x \neq 0$, ezért az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk $\cos^2 x$ -szel.

Így

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0,$$

vagyis $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} - 2 = 0.$

Azaz $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

A $\operatorname{tg} x = t$ *változócserével* az egyenlet $t^2 - t - 2 = 0$ másodfokúra vezethető vissza: $t_1 = -1$ és $t_2 = 2$.

Magyarázat

Az adott egyenlet homogén, mivel minden tagja másodfokú. A homogén egyenlet megoldható, ha mindkét oldalát elosztjuk vagy $\cos^2 x$-szel vagy $\sin^2 x$-szel.

Ha $\cos^2 x$-szel fogunk osztani, akkor ahhoz hogy ne veszítsünk gyököt, külön vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\cos x = 0$. Behelyettesítve $\cos x = 0$-t az eredeti egyenletbe, a $\sin x = 0$ egyenletet kapjuk. Viszont nem létezik olyan érték, melynél egyszerre igaz, hogy $\sin x = 0$ és $\cos x = 0$ ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Tehát

[1] Természetesen, ha az egyenlet nullára redukált, tehát $f = 0$, akkor csak az f többtagú kifejezés tagjainak fokszámát kell figyelembe venni, mivel 0-nak nincs fokszáma.

Helyettesítsünk vissza:

1) Ha $t = -1$, akkor $\operatorname{tg} x = -1$, ebből
$x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n$,
$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2) Ha $t = 2$, akkor $\operatorname{tg} x = 2$, ebből
$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Felelet: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;
$\operatorname{arctg} 2 + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. ◁

x azon értékei, melyeknél $\cos x = 0$, nem gyökei az adott egyenletnek. Tehát az egyenlet mindkét oldalát el lehet osztani $\cos^2 x \neq 0$-val. Így az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk (vegyük figyelembe, hogy $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$).

A kapott egyenletben a változó csak egyfajta trigonometrikus kifejezésben szerepel – $\operatorname{tg} x$ alakban –, ezért célszerű $\operatorname{tg} x = t$ változócserét alkalmazni.

2. példa. Oldjuk meg a $\sin 3x = 5 \cos 3x$ egyenletet!

Megoldás

▶ Ha $\cos 3x = 0$, akkor az egyenletnek nincs gyöke. Tehát az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk $\cos 3x \neq 0$.

Így

$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 5$, vagyis $\operatorname{tg} 3x = 5$. Akkor

$3x = \operatorname{arctg} 5 + \pi m$,

$x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Felelet: $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbf{Z}$. ◁

Magyarázat

Az adott egyenlet homogén, mivel minden tagja elsőfokú, ezért megoldható, ha mind a két oldalát elosztjuk vagy $\cos 3x$ -szel vagy $\sin 3x$-szel.

Ha $\cos 3x$-szel fogjuk elosztani, akkor ahhoz, hogy ne veszítsünk gyököt, külön megvizsgáljuk azt az esetet, amikor $\cos 3x = 0$. Behelyettesítve $\cos 3x = 0$-t az eredeti egyenletbe, $\sin 3x = 0$ egyenletet kapjuk. Viszont nem létezik olyan érték, melynél egyszerre $\sin 3x$ és $\cos 3x$ is nulla. Tehát ha $\cos 3x = 0$, az adott egyenletnek nincsenek gyökei. De ha $\cos 3x \neq 0$, az egyenlet mindkét oldalát el lehet osztani $\cos 3x$-szel. Így az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk (vegyük figyelembe, hogy $\frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \operatorname{tg} 3x$).

3. példa. Oldjuk meg a $6 \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x - \cos^2 x = 2$ egyenletet!

Megoldás

▶ A kétszeresszög szinuszára vonatkozó összefüggés alapján

Magyarázat

Először alakítsuk át az összes trigonometrikus kifejezést azonos x argumentumúra a kétszeres szög szinusza összefüggés alapján:

$6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$. (1)
Írjuk át ezt az egyenletet a
$6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2 \cdot 1$
alakban, és vegyük figyelembe, hogy
$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.
Így $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x =$
$= 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ alakra jutunk.
Rendezve a kapott egyenletet,
$4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$ (2)
alakot kapjuk.

Ha $\cos x = 0$, akkor az egyenletnek nincs gyöke, ezért az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk $\cos^2 x$-szel:

$$4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 3 = 0,$$

$$4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0. \quad (3)$$

Változócsere: $\operatorname{tg} x = t$. Így
$4t^2 + t - 3 = 0$
másodfokú egyenletet kapjuk, melynek
megoldásai $t_1 = -1$ és $t_2 = \frac{3}{4}$.

Visszahelyettesítjük a kapott értékeket.

1. Ha $t = -1$, akkor $\operatorname{tg} x = -1$, ebből
$x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n$,
$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. Ha $t = \frac{3}{4}$, akkor $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, ebből
$x = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Felelet: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;
$\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. ◁

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

Az (1) egyenlet *bal oldala homogén másodfokú kifejezés, a jobb oldala* 2. *De ha a* 2-t *felírjuk olyan szorzatként, melynek az egyik tényezője* 1, *és az egyet helyettesítjük a trigonometria alapazonosságával, akkor az adott egyenlet mindkét oldalán másodfokú kifejezés lesz, vagyis homogén egyenletet kapunk* (2), melyet úgy oldhatunk meg, ha mind a két oldalát elosztjuk vagy $\sin^2 x$-szel vagy $\cos^2 x$ -szel.

Ha $\cos^2 x$-szel fogjuk osztani az egyenlet mindkét oldalát, akkor ahhoz, hogy ne veszítsünk gyököt, külön meg kell vizsgálni azt az esetet, ha $\cos^2 x = 0$.

Behelyettesítve $\cos x = 0$-t az eredeti egyenletbe, a $\sin x = 0$ egyenlethez jutunk. Viszont egyszerre $\sin x$ és $\cos x$ nem lehet nullával egyenlő (mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Tehát ha $\cos x = 0$, a (2) egyenletnek nincs megoldása. Így $\cos x \neq 0$, ebben az esetben viszont az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk a $\cos^2 x \neq 0$ kifejezéssel (és vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x\Big).$$

Az így kapott (3) egyenletben az x változónak csak a tangense szerepel, ezért célszerű $\operatorname{tg} x = t$ változócserét alkalmazni.

25.4. Az $f(x) = 0$ alakú trigonometrikus egyenletek megoldása szorzattá alakítással

1. példa. Oldjuk meg a $\sin 7x = \sin 5x$ egyenletet!

Megoldás

▶ $\sin 7x - \sin 5x = 0$. Innét

$$2\sin\frac{7x-5x}{2}\cos\frac{7x+5x}{2} = 0,$$

Magyarázat

Ebben az esetben nehéz lenne úgy átalakítani egyenletünket, hogy azonos argumentumú trigonometrikus függvények szerepeljenek benne.

$$2 \sin x \cos 6x = 0.$$

Azt kapjuk, hogy:

$$\sin x = 0 \text{ vagy } \cos 6x = 0.$$

Ezen egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldása

$$x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \text{ vagy } 6x = \frac{\pi}{2} + \pi m,$$

$$\text{vagyis } x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6},\ m \in \mathbf{Z}.$$

Felelet: $\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6},\ m \in \mathbf{Z}. \triangleleft$$

Ezért a 25.1. pontban felsorolt irányelvek közül a 4-ediket kell alkalmazni: *nullára redukáljuk az egyenletet, minden tagot egy oldalra rendezünk, és megpróbáljuk szorzattá alakítani.*

Ehhez alkalmazzuk a szinuszok különbségének szorzattá alakítását:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

De ha egy szorzat nullával egyenlő, akkor legalább az egyik tényező nulla, és a másik tényező is értelmezhető. Az adott esetben mind a két tényező a valós számok halmazán van értelmezve.

A megoldás végén vegyük figyelembe, hogy az adott egyenlet ekvivalens a $\sin x = 0$ vagy $\cos 6x = 0$ egyenletek megoldásával, így a feleletben fel kell tüntetni mind a két egyenlet gyökeit.

2. példa. Oldjuk meg a $\sin x + \sin 3x = \sin 4x$ egyenletet!

Megoldás

$$2 \sin \frac{x + 3x}{2} \cos \frac{x - 3x}{2} - \sin 4x = 0,$$

$$2 \sin 2x \cos x - \sin 4x = 0,$$

$$2 \sin 2x \cos x - 2 \sin 2x \cos 2x = 0,$$

$$2 \sin 2x (\cos x - \cos 2x) = 0,$$

$$\sin 2x = 0 \text{ vagy } \cos x - \cos 2x = 0.$$

Az első egyenlet megoldása:

$$2x = \pi n,\ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$$

A második egyenletet is alakítsuk szorzattá:

$$-2 \sin \frac{x + 2x}{2} \sin \frac{x - 2x}{2} = 0,$$

$$2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0.$$

Magyarázat

Rögtön alkalmazzuk a 25.1. pontban felsorolt irányelvek közül a 4-ediket: *nullára redukáljuk az egyenletet, minden tagot egy oldalra rendezünk, és megpróbáljuk szorzattá alakítani.*

Ehhez alkalmazzuk a szinuszok különbségének szorzattá alakítását:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

(és figyelembe vesszük, hogy $\cos(-x) = \cos x$).

Ahhoz, hogy valamilyen közös tényezőt kiemelhessünk a zárójel elé és szorzatot kapjunk, elegendő a $\sin 4x$ kifejezésre alkalmazni a kétszeres szög szinuszára vonatkozó összefüggést (ekkor a $\sin 2x$ kifejezés közös, és így kiemelhető).

Innét $\sin\frac{3x}{2}=0$ vagy $\sin\frac{x}{2}=0$.

Ezen egyenletek megoldása:

$\frac{3x}{2}=\pi m,\ m\in Z$, vagy $\frac{x}{2}=\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$.

$x=\frac{2\pi m}{3}$ vagy $x=2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$.

Felelet: $\frac{\pi n}{2},\ n\in \mathbf{Z}$;

$\frac{2\pi m}{3},\ m\in \mathbf{Z}$;

$2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$. ◁

De ha egy szorzat nullával egyenlő, akkor legalább az egyik tényező nulla.

A második egyenletben a koszinuszok különbségét alakítjuk át szorzattá. Majd a megoldás végén figyelembe vesszük, hogy a kapott egyenletek értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Így az adott egyenlet ekvivalens a

$\sin 2x=0$ vagy $\sin\frac{3x}{2}=0$ vagy

$\sin\frac{x}{2}=0$

egyenlet-halmazok megoldásával, ezért a feleletben fel kell tüntetni mindegyik egyenlet gyökét.

Megjegyzés. A feletet egyszerűbb alakban is felírható. Ha feltüntetjük az összes gyököt egy egységsugarú körvonalon, akkor láthatjuk, hogy az $x=2\pi k$ ugyanazok a pontok mint az $x=\frac{\pi n}{2}$ pontok, ha n 4 többszöröse ($n=4k$), vagy mint az $x=\frac{2}{3}\pi m$ pontok, ha m 3 többszöröse ($m=3k$). Így az $x=2\pi k$ megoldás nem jelent különböző megoldásokat az $x=\frac{\pi n}{2}$ vagy $x=\frac{2}{3}\pi m$ megoldásoktól, ezért a feleletben elegendő az utolsó két megoldást megadni. De a gyök ilyen összevonása nem kötelező.

25.5. A trigonometrikus egyenletek gyökeinek kiválasztása

Ha egy trigonometrikus egyenlet megoldásánál szükséges a gyököket kiválasztani, akkor leggyakrabban az alábbi módon kell eljárni.

Meghatározzuk **az egyenletben szereplő trigonometrikus kifejezések közös (lehetőleg a legkisebb) periódusát** (természetesen csak abban az esetben, ha létezik ilyen legkisebb közös periódus); **majd az adott periódusban leellenőrizzük a gyököket (a hamis gyököket elhagyjuk), majd a meghagyott gyököket periódusonként folytatjuk.**

Példa. Oldjuk meg a $\sin 4x \cdot \operatorname{tg} x = 0$ egyenletet! (1)

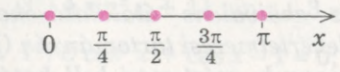
Első módszer

Megoldás

▶ $\sin 4x = 0$ vagy $\operatorname{tg} x = 0$.

Innét $4x = \pi n$ (tehát $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$) vagy $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Az $y = \sin 4x$ függvény $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ szerint periodikus, az $y = \operatorname{tg} x$ periódusa pedig $T_2 = \pi$. Ezért közös periódusuk: $T = \pi$. Jelöljük a megoldások közül az egyik periódushoz tartozó gyököket, például a $[0; \pi]$ intervallumon:



Az $x = \frac{\pi}{2}$ értékre a tangens függvény nincs értelmezve, ezért az $x = \frac{\pi}{2}$ nem megoldása az adott egyenletnek.

A 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, π értékekre $0 = 0$ igaz egyenlőséget kapunk. Ez azt jelenti, hogy ezek az értékek valóban gyökei az (1) egyenletnek.

Tehát az

$$x = \pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \; k \in \mathbf{Z}.$$

Felelet: πk; $\frac{\pi}{4} + \pi k$;

$\frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Magyarázat

Ha x gyöke az (1) egyenletnek, akkor ezt az értéket behelyettesítve az (1) egyenletbe, igaz számegyenlőséget kapunk. Két szám szorzata akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha legalább az egyik szorzótényező nulla. Tehát az (1) egyenlet gyöke, gyöke a $\sin 4x = 0$ vagy $\operatorname{tg} x = 0$ egyenlet-halmazoknak is.

Ha az (1) egyenlet helyett az egyenlet-halmazt oldjuk meg, akkor gyököt nem veszíthetünk, de olyan hamis gyök jelenhet meg, melynél az első szorzótényező nulla, míg a másik nincs értelmezve.

Ahhoz, hogy kizárjuk a hamis gyököt, a gyököket le kell ellenőrizni. Visszahelyettesítjük az eredeti egyenletbe az egy periódushoz tartozó gyököket, ebben az esetben egy π periódushoz tartozókat.

Az adott periódusón kiválasztjuk a gyököket (elhagyjuk a hamisakat), és azokat melyek megfelelnek, a többi megoldás ezektől a π egész számú többszörösével különbözik (vagyis a gyökökhöz hozzáadunk πk-t, $k \in \mathbf{Z}$).

Megjegyzés. Az (1) egyenlet megoldásánál nem figyeltünk arra, hogy az elvégzett átalakítások ekvivalensek voltak-e, hanem csak olyan átalakítást végeztünk, mely nem vezetett gyökvesztéshez. Azt is mondhatjuk, hogy a megoldás során egyenlet-következményeket alkalmaztunk (*ha az első egyenlet*

minden gyöke gyöke a második egyenletnek is, akkor a második egyenletet az első egyenlet következményének nevezzük)[1]. Ebben az esetben hamis gyök léphet fel (olyan gyök, ami megoldása a második egyenletnek, de nem gyöke az adottnak). Ennek elkerülése végett az alábbi irányelv alkalmazható.

Ha egy trigonometrikus egyenletet egyenlet-következményekkel helyettesítünk, akkor az egyenlet megoldásának kötelező része a gyökök visszahelyettesítéssel történő ellenőrzése, azaz a kapott gyökök behelyettesítése az eredeti egyenletbe.

Ha az (1) egyenlet megoldásakor ekvivalens átalakításokat végzünk, akkor a hamis gyökök kiszűrésére más módszert kell alkalmazni: mégpedig figyelembe kell venni az *egyenlet értelmezési tartományát*, az egyenletben szereplő függvények értelmezési tartományainak metszetét.

A $\sin 4x \cdot \operatorname{tg} x = 0$ egyenlet megoldásának második módszere

Megoldás

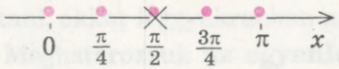
Az egyenlet értelmezési tartománya (alaphalmaza):

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$

$\sin 4x = 0$ vagy $\operatorname{tg} x = 0$.

Innen $4x = \pi n$, vagyis $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$ vagy $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

A $y = \sin 4x$ függvény $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ szerint periodikus, az $y = \operatorname{tg} x$ periódusa pedig $T_2 = \pi$. Ezért a $T = \pi$ közös periódusa a két függvénynek. Jelöljük a megoldások közül az egyik periódushoz tartozó gyököket, például a $[0; \pi]$ intervallumon és ezen az intervallumon tüntessük fel az értelmezési tartomány kikötéseit is:



Felelet: πk; $\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Magyarázat

Az ekvivalens átalakításokat az egyenlet értelmezési tartományán (EÉT) alkalmazzuk, ezért meg kell határozni az értelmezési tartományt.

Egy szorzat akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha legalább az egyik tényező nulla, a másik tényező pedig értelmezhető. Mivel az alaphalmazon mindkettő értelmezhető, ezért az értelmezési tartományon az adott egyenlet ekvivalens a $\sin 4x = 0$ vagy $\operatorname{tg} x = 0$ egyenlőség-halmazokkal.

Elegendő az értelmezési tartományból egy periódushoz, egy π hosszúságú periódushoz tartozó gyököket kiválasztani, mivel a többi gyök ezektől a gyököktől a π egész számú többszörösével különbözik.

Az $x = \frac{\pi}{2}$ érték nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért nem gyöke az adott egyenletnek.

A 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, π elemei az értelmezési tartománynak, ezért gyökei az adott egyenletnek.

[1] Az egyenlet-következményekről részletesebben a 3.1. pontban olvashatunk.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen módszereket alkalmazhatunk trigonometrikus egyenletek megoldásánál? Hozz fel példákat!
2. Milyen változócsere alkalmazható a $8\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$ egyenlet megoldása során? Milyen egyenletre vezethető így vissza az egyenlet?
3. a) Magyarázd meg miért homogén a $3\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$ egyenlet!
   b*) Hogyan lehet ezt az egyenletet megoldani?
4. Hogyan lehet a trigonometrikus egyenlet gyökeit kiválasztani? Szemléltesd példán!

Gyakorlatok

Oldd meg az **(1–20.)** egyenleteket!

1. 1°) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$;
2) $3\sin^2 2x + 10\sin 2x + 3 = 0$;
3°) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$;
4) $2\sin^2 \frac{x}{2} - 3\sin \frac{x}{2} + 1 = 0$.

2. 1°) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;
2) $2\cos^2 3x - 5\cos 3x - 3 = 0$;
3°) $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$;
4) $2\cos^2 \frac{x}{3} + 3\cos \frac{x}{3} - 2 = 0$.

3. 1°) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$;
2) $8\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$;
3°) $5\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$;
4) $4\sin 3x + \cos^2 3x = 4$.

4. 1°) $3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$;
2) $\operatorname{ctg}^2 2x - 6\operatorname{ctg} 2x + 5 = 0$;
3°) $2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$;
4) $7\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + 2\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 5$.

5. 1) $3\cos 2x = 7\sin x$;
2) $2\cos 2x = 7\cos x$.

6. 1) $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$;
2) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$;
3) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$;
4) $3\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

7. 1) $\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x$;
2) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = 1$;
3) $5\cos x + 12\sin x = 13$;
4) $3\cos x - 2\sin 2x = 0$.

8. 1) $1 - \cos x = 2\sin \frac{x}{2}$;
2) $1 + \cos x = 2\cos \frac{x}{2}$;
3) $\cos 2x = 2\frac{1}{3}\sin x$;
4) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$.

9. 1) $\cos x + \sin x = 0$;
2) $\cos^2 x - 3\sin x \cos x = -1$;
3) $3\cos^2 x = 4\sin x \cos x - \sin^2 x$;
4) $4\cos^2 x - 7\sin 2x = 2$.

10. 1) $\frac{5}{3\cos x + 4} = 2$; 2) $\frac{5}{3\sin x + 4} = 2$; 3) $\frac{2}{3\sqrt{2}\sin x - 1} = 1$; 4) $\frac{2}{3\sqrt{2}\cos x - 1} = 1$.

11. 1) $\frac{3}{5\operatorname{tg} x + 8} = 1$; 2) $\frac{3}{5\operatorname{ctg} x + 8} = 1$; 3) $\frac{4}{\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 5} = \frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 5} = \frac{1}{4}$.

12. 1) $\frac{2\sin x+7}{1{,}5\sin x+3}=2$; 2) $\frac{2\cos x+7}{1{,}5\cos x+3}=2$;

3) $\frac{6}{\operatorname{tg} x+2}=3-\operatorname{tg} x$; 4) $\frac{6}{\operatorname{ctg} x+2}=3-\operatorname{ctg} x$.

13. 1) $\frac{15}{\sin x+1}=11-2\sin x$; 2) $\frac{15}{\cos x+1}=11-2\cos x$;

3) $\frac{1}{\operatorname{tg} x+1}=2\operatorname{ctg} x-1$; 4) $\frac{10}{\operatorname{tg} x+2}=3-\operatorname{ctg} x$.

14. 1) $\sin x+\sin 3x=0$; 2) $\sin 5x-\sin x=0$;

3) $\cos 2x-\cos 6x=0$; 4) $\cos 4x+\cos 2x=0$.

15*. 1) $|\sin x|=|\cos x|$; 2) $|\sin 2x|=\left|\sqrt{3}\cos 2x\right|$.

16*. 1) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{6}-2x\right)=0$; 2) $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{47\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)$.

17*. 1) $\sin^2 x-5\cos x=\sin x\cos x-5\sin x$;

2) $\cos^2 x-7\sin x+\sin x\cos x=7\cos x$.

18. 1) $\sin^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2\cos^2 x=0$;

2) $\sin^2 3x+3\cos^2 3x-4\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)=0$;

3) $\sin^2 x+2\sin(\pi-x)\cos x-3\cos^2(2\pi-x)=0$;

4) $\sin^2(2\pi-3x)+5\sin(\pi-3x)\cos 3x+4\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)=0$.

19. 1) $3\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=2$;

2) $2\cos^2\frac{x}{2}-3\sin\left(\pi-\frac{x}{2}\right)\cos\left(2\pi-\frac{x}{2}\right)+7\sin^2\frac{x}{2}=3$;

3) $4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin(\pi+x)+3\cos^2(\pi+x)=3$;

4) $3\sin^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(\pi+x)+2\sin^2(x-\pi)=2$.

20. 1) $2\sin^2(\pi+x)-5\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+2=0$;

2) $2\cos^2 x+5\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-4=0$;

3) $2\cos^2 x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1=0$;

4) $5-5\sin 3(\pi-x)=\cos^2(\pi-3x)$.

26. §. TRIGONOMETRIKUS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA

A trigonometrikus egyenletrendszereket ugyanazokkal a módszerekkel oldjuk meg mint az algebrai egyenletrendszereket: behelyettesítő módszerrel, egyenlő együtthatók módszerével vagy változócserével. A behelyettesítő módszer lépései: az egyik egyenletből kifejezzük az egyik változót (vagy annak függvényét), majd behelyettesítjük a második egyenletbe, vagy az egyenletek átalakítása után olyan kombinációt kialakítani, hogy a változók száma csökkenjen.

1. példa. Oldjuk meg az $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}, \\ \cos x+\sin y=1 \end{cases}$ egyenletrendszert!

▶ Az első egyenletből kifejezzük az y-t, $y=\frac{\pi}{2}-x$, és behelyettesítjük a második egyenletbe. Azt kapjuk, hogy $\cos x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$, innét $\cos x + \cos x = 1$, $2\cos x = 1$, $\cos x=\frac{1}{2}$. Tehát

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}. \qquad (1)$$

1) Ha $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, akkor $y=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{\pi}{6}-2\pi n$.

2) Ha $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, akkor $y=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{5\pi}{6}-2\pi n$.

Felelet: $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. ◁

Megjegyzés. Ha az y értékének meghatározásakor az (1) képletet nem választjuk szét két esetre, külön a «+» és külön a «–» előjelet, akkor hamis gyökök is felléphetnek.

Ebben az esetben azt kapjuk, hogy $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, \\ y=\frac{\pi}{2}-\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right), \end{cases} n\in\mathbf{Z}.$

Ebből kapjuk, ha $n=0$, $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}, \\ y=\frac{\pi}{2}-\left(\pm\frac{\pi}{3}\right), \end{cases}$ vagyis $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}, \\ y=\frac{\pi}{6} \text{ vagy } y=\frac{5\pi}{6}. \end{cases}$

Így, az eddig meghatározott gyökökön kívül, még két gyököt kaptunk:

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}, \\ y=\frac{5\pi}{6}, \end{cases} \text{ és } \begin{cases} x=-\frac{\pi}{3}, \\ y=\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

De az x és y ezen értékei nem megoldásai az adott egyenletrendszernek, mert nem elégítik ki a rendszer első egyenletét.

Ezért jegyezzétek meg:

ha a $\cos x = a$ egyenlet megoldásával tovább kell számolni, akkor a megoldó képletben külön vesszük a «+» előjellel és külön a «–» előjellel.

2. példa. Oldjuk meg a $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4} \end{cases}$ egyenletrendszert!

▶ A rendszer egyenleteit tagonként adjuk össze és vonjuk ki. Az eredeti egyenletrendszerrel ekvivalens rendszert kapunk:

$$\begin{cases} \cos(x-y)=1, \\ \cos(x+y)=-\frac{1}{2}. \end{cases} \text{ Innét } \begin{cases} x-y=2\pi k, k\in Z, \\ x+y=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z. \end{cases}$$

Az utolsó egyenletrendszert írjuk fel két egyenlet-halmazként. Külön a «+» előjellel és külön a «–» előjellel:

$$\begin{cases} x-y=2\pi k, k\in Z, \\ x+y=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z, \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} x-y=2\pi k, k\in Z, \\ x+y=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer egyenleteit tagonként összeadva és kivonva határozzuk meg az x és az y értékét:

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k, \\ y=\frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} x=-\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k, \\ y=-\frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k. \end{cases}$$

Felelet: $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\right)$,

$\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k; -\frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\right)$, $n \in Z, k \in Z$. ◁

Megjegyzés. A feleletben két paraméter szerepel, az n és a k, melyek egymástól független egész számok. Ha csak egy paramétert használnánk, például az n-t, akkor gyököt veszíthetünk. Tehát azokban az esetekben, mikor *az egyenletrendszer megoldása egyszerű trigonometrikus egyenletek* ($\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$) *rendszereinek megoldására vezethető vissza, akkor minden egyenlet megoldásánál más-más egész számokból álló paramétert kell használni.*

Ellenőrző kérdések

1. Milyen módszerekkel oldhatunk meg trigonometrikus egyenletrendszereket?
2. Magyarázd meg, mely esetben kaphatunk hamis gyököt, és mely esetben veszíthetünk gyököt a $\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \cos(x-y)=\frac{1}{2}\end{cases}$ egyenletrendszer megoldásánál! Oldd meg az egyenletrendszert!

Gyakorlatok

Oldd meg az **(1–8.)** egyenletrendszert!

1°. 1) $\begin{cases}\sin x+\sin y=1,\\ x+y=\pi;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x+\cos y=1,\\ x+y=2\pi.\end{cases}$

2°. 1) $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1,\\ x+y=\frac{\pi}{4};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x-\cos y=\frac{1}{2},\\ x-y=\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

3°. 1) $\begin{cases}\sin x+\sin y=0{,}5,\\ \sin x\cdot\sin y=-0{,}5.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x+\cos y=-0{,}5,\\ \cos x\cdot\cos y=-0{,}5.\end{cases}$

4. 1) $\begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{2};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{4},\\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\frac{1}{6}.\end{cases}$

5. 1) $\begin{cases}\cos x\cos y=0{,}75,\\ \sin x\sin y=0{,}25;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\cos y=0{,}75,\\ \sin y\cos x=0{,}25.\end{cases}$

6. 1) $\begin{cases}\cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{1}{2},\\ \sin x\cos y+\cos x\sin y=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\sin y-\cos x\cos y=-1,\\ \sin x\cos y-\cos x\sin y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

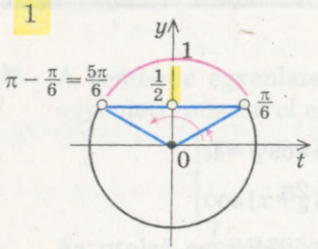
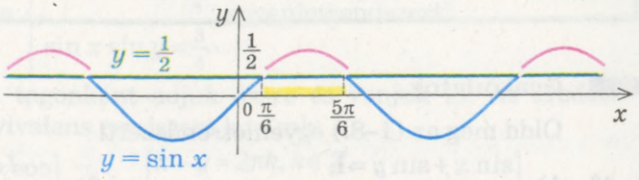
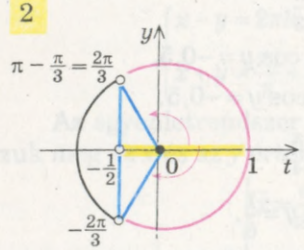
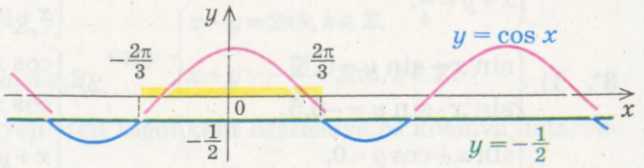
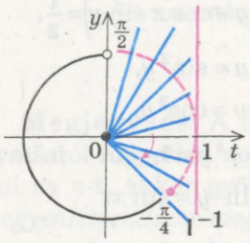
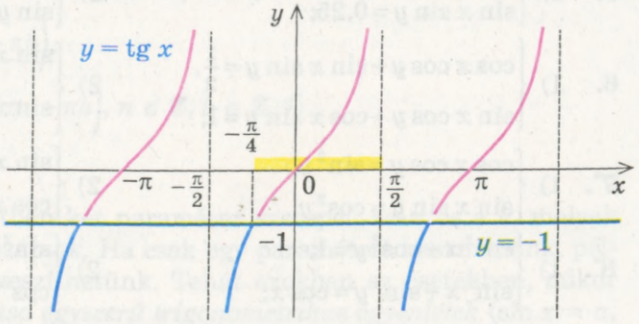
7*. 1) $\begin{cases}\cos x\cos y=\sin^2 y,\\ \sin x\sin y=\cos^2 y;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\cos y=\sin^2 y,\\ \cos x\sin y=\cos^2 y.\end{cases}$

8*. 1) $\begin{cases}\cos^2 x+\cos^2 y=1,\\ \sin^2 x+\sin^2 y=\cos x;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y=1,\\ \cos^2 x+\sin^2 y=\sin x.\end{cases}$

27. §. EGYSZERŰ TRIGONOMETRIKUS EGYENLŐTLENSÉGEK

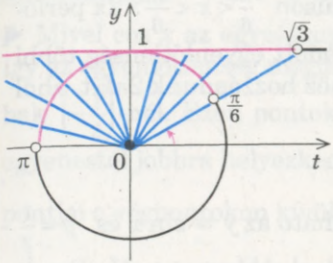
49. táblázat

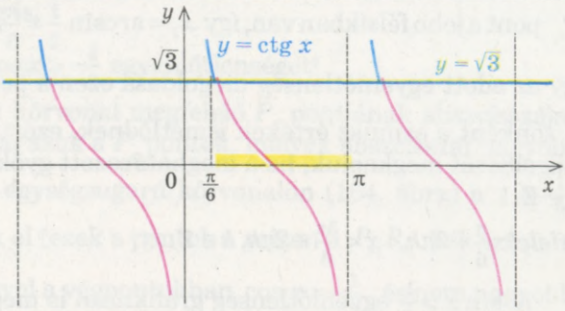
Egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldása

egységsugarú körvonalon	grafikusan
1 	 $\sin x>\frac{1}{2}\quad \frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$
2 	 $\cos x>-\frac{1}{2}\quad -\frac{2\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$
3 	 $\operatorname{tg} x\geqslant -1\quad -\frac{\pi}{4}+\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

A 49. táblázat folytatása

4





$\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ $\qquad \frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in Z$

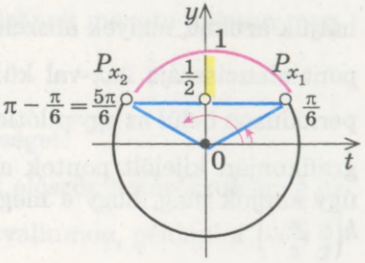
Magyarázat és indoklás

Egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldása. A $\sin x > a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$ és $\operatorname{ctg} x > a$ ($a >$ jel helyett $<$, $\leqslant$, $\geqslant$ jel is állhat) alakú egyenlőtlenségeket egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenségeknek nevezzük.

A magyarázatot egységsugarú körvonalon vagy a megfelelő függvény grafikonjával szemléltetjük, ahogy ezt a 49. táblázat első pontjában ábrázoltuk.

1. példa. A 49. táblázat első pontjában megoldott $\sin x > \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség megoldását az egységsugarú körvonal segítségével részletesebben megmagyarázzuk (162. ábra).

▶ Mivel $\sin x$ az egységsugarú körvonal megfelelő P_x pontjának ordinátája, így az egyenlőtlenség megoldásai azok a P_x pontok, melyek ordinátái nagyobbak $\frac{1}{2}$-nél. Ezen pontok az egységsugarú körvonalon az $y = \frac{1}{2}$ egyenes felett helyezkednek el (ezek a pontok a rajzon a $P_{x_1}P_{x_2}$ kék színű ív pontjai a végpontokon kívül, mivel a végpontokban $\sin x = \frac{1}{2}$, és nem nagyobb $\frac{1}{2}$-nél). Ha a megoldás leolvasásánál az óramutató járásával ellentétes irányba haladunk, akkor a P_{x_1} az ív kezdőpontja, a P_{x_2} pedig a végpontja. Először egy perióduson belül írjuk fel a megoldást (emlékezzetek vissza a szinusz

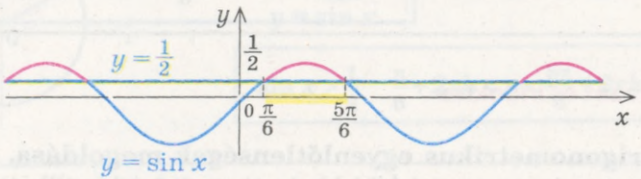


162. ábra

2π szerint periodikus). A kijelölt ív P_x pontjaira igaz, hogy $x_1 < x < x_2$. Mivel a P_{x_1} pont a jobb félsíkban van, így $x_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Akkor viszont $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Így az adott egyenlőtlenség megoldása ezen a perióduson $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. 2π periódusonként a szinusz értékek ismétlődnek, ezért az adott egyenlőtlenség többi megoldását megkapjuk, ha a meghatározott gyökökhöz hozzáadunk $2\pi k$-t, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

Felelet: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

A $\sin x > \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség grafikusan is megoldható az $y = \sin x$ és $y = \frac{1}{2}$ grafikonok segítségével (163. ábra).



163. ábra

▶ A $\sin x > \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség megoldása x-nek kizárólag azon értékei, melyeknél az $y = \sin x$ függvény grafikonjának a megfelelő pontjai az $y = \frac{1}{2}$ egyenes felett van (a 165. ábrán a grafikon megfelelő részei kékkel vannak kiemelve). Ahhoz, hogy meghatározzuk a grafikonok metszéspontjainak abszcisszáját, elegendő megoldani a $\sin x = \frac{1}{2}$ egyenletet $\left(x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z\right)$. Eközben figyelembe kell venni, hogy a szinuszfüggvény $T = 2\pi$ szerint periodikus, így elegendő a megoldást egy perióduson belül felírni. Például egy 2π hosszúságú intervallumon az $y = \sin x$ és $y = \frac{1}{2}$: grafikonok metszéspontjai közül választhatjuk azokat, melyek abszcisszája $x_1 = \frac{\pi}{6}$ és $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ (az összes többi metszéspont abszcisszája $2\pi k$-val különböznek ezektől az abszcisszáktól). Tehát egy perióduson belül az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ (az $y = \sin x$ függvény grafikonján kijelölt pontok abszcisszái). Az egyenlőtlenség többi megoldását úgy kapjuk meg, hogy a meghatározott megoldáshoz hozzáadunk $2\pi k$-t, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

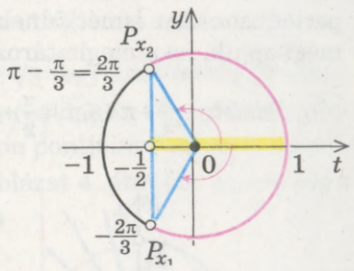
Felelet: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Hasonlóképpen oldható meg a 49. táblázatban feltüntetett többi egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenség is.

2. példa. Oldjuk meg a $\cos x > -\frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget!

▶ Mivel $\cos x$ az egységsugarú körvonal megfelelő P_x pontjának abszcisszája, így az egyenlőtlenség megoldásai azok a P_x pontok, melyek abszcisszái nagyobbak $\left(-\frac{1}{2}\right)$-nél. Ezen pontok az egységsugarú körvonalon (164. ábra) a $t = -\frac{1}{2}$ egyenestől jobbra helyezkednek el (ezek a pontok a rajzon a $P_{x_1}P_{x_2}$ kék színű ív pontjai a végpontokon kívül, mivel a végpontokban $\cos x = -\frac{1}{2}$, és nem nagyobb $-\frac{1}{2}$-nél). Ha a megoldás leolvasásánál az óramutató járásával ellentétes irányba haladunk, akkor a P_{x_1} az ív kezdőpontja, a P_{x_2} pedig a végpontja.

Először egy perióduson belül írjuk fel a megoldást (emlékezzetek vissza a koszinusz 2π szerint periodikus). A kijelölt ív P_x pontjaira igaz, hogy $x_1 < x < x_2$. Mivel a P_{x_1} pont a felső félsíkban van, így $x_2 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Vegyük figyelembe, hogy a P_{x_1} és P_{x_2} pontok tükrösek a t tengelyre vonatoztatva, kapjuk hogy $x_1 = -x_2 = -\frac{2\pi}{3}$. Így az adott egyenlőtlenség



164. ábra

megoldása ezen a periódusón: $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$. 2π periódusonként a koszinusz értékek ismétlődnek, ezért az adott egyenlőtlenség többi megoldását megkapjuk, ha a meghatározott gyökökhöz hozzáadunk $2\pi k$-t, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

Így a *felelet* a következőképpen írható fel:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.\ \triangleleft$$

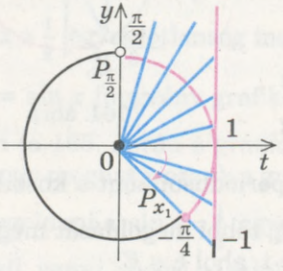
A $\cos x > -\frac{1}{2}$ egyenlőtlenség grafikus megoldásának menete teljesen megegyezik a $\sin x > \frac{1}{2}$. egyenlőtlenség megoldásával.

3. példa. Oldjuk meg a $\operatorname{tg} x \geqslant -1$ egyenlőtlenséget!

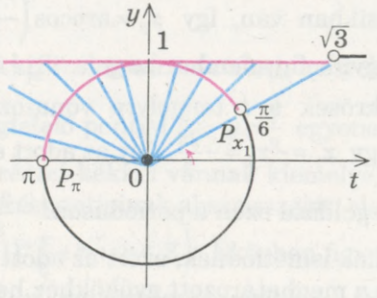
▶ A tangensfüggvény π szerint periodikus. Ezért először határozzuk meg az egyenlőtlenség megoldását egy π hosszúságú intervallumon, például a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, majd figyelembe véve a periodicitást írjuk fel a megoldást. Ahhoz, hogy kijelöljük a jobb körvonal azon P_x pontjait, melyek kielégítik az adott

egyenlőtlenséget, húzzunk a körvonalhoz az (1; 0) pontba az érintőt (tangensvonalat) (165. ábra). Először jelöljük ki azokat a pontokat, melyek tangensértéke nagyobb vagy egyenlő (–1)-nél (a rajzon kék színnel ábrázoltuk), majd az érintő minden pontjához meghatározzuk az egységsugarú körvonal jobb félkörén a megfelelő P_x pontot (ehhez elegendő az érintő megfelelő pontját összekötni a körvonal középpontjával és megjelölni a szakasz és a körvonal metszéspontját). Az egységsugarú körvonal megfelelő P_x pontjainak halmazát a rajzon kék színnel kijelöltük, ami $P_{x_1}P_{\frac{\pi}{2}}$ ív (figyeld meg, hogy a P_{x_1} pont eleme a megoldáshalmaznak, a $P_{\frac{\pi}{2}}$ pont viszont nem). Mivel a P_{x_1} pont a jobb félsíkban van, ezért vehetjük az $x_1 = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ értéket. Ezért ezen a periódusson az adott egyenlőség megoldása $-\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. A tangens értékek π periódusonként ismétlődnek. Ezért az adott egyenlőtlenség többi megoldását megkapjuk, ha a meghatározott gyökökhöz hozzáadunk πk-t, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

Felelet: $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. ◁



165. ábra



166. ábra

Megjegyezzük, hogy a grafikus megoldás esetében is elegendő egy periódusson (például a $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon) felírni az $y = \operatorname{tg} x$ függvény azon pontjainak abszcisszáit, melyek az $y = -1$ egyenes felett vannak vagy illeszkednek erre az egyenesre. (A 49. táblázat 3. ábráján az $y = \operatorname{tg} x$ grafikon megfelelő része kék színnel van kiemelve.)

4. példa. Oldjuk meg a $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ egyenlőtlenséget!

▶ A kotangensfüggvény π szerint periodikus. Ezért először az egyenlőtlenséget egy π hosszúságú intervallumon oldjuk meg, például a $(0; \pi)$ intervallumon, majd figyelembe vesszük a függvény periodicitását.

Ahhoz, hogy kijelöljük a felső körvonal azon P_x pontjait, melyek kielégítik az adott egyenlőtlenséget, húzzunk a körvonalhoz a (0; 1) pontba az érintőt (166. ábra). Először jelöljük ki azokat a pontokat, melyek kotangensértéke kisebb $\sqrt{3}$-nál (a 166. ábrán kék színnel emeltük ki), majd az érintő minden pontjához meghatározzuk az egységsugarú körvonalon a hozzátartozó P_x pontot (ehhez elegendő az érintő megfelelő pontját összekötni a körvonal középpontjával és megjelölni a meghúzott szakasz és a körvonal metszéspontját). Az egységsugarú körvonal megfelelő P_x pontjainak halmaza a kék színnel jelölt $P_{x_1}P_\pi$ ív.

Mivel a P_{x_1} pont a felső félsíkban van, ezért vehetjük az $x_1 = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ értéket. Így egy perióduson az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{\pi}{6} < x < \pi$. Ez a megoldás periódusonként ismétlődik. Tehát az adott egyenlőtlenség többi megoldását megkapjuk, ha a meghatározott gyökökhöz hozzáadunk πk-t, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

Felelet: $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Az előző esetekhez hasonlóképpen a $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ egyenlőtlenség grafikus megoldásánál is elegendő egy periódust vizsgálni (például a $(0; \pi)$ intervallumot). Majd meghatározni az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény azon pontjainak az abszcisszáit, melyek az $y = \sqrt{3}$ egyenes alatt vannak. (A 49. táblázat 4. ábráján az $y = \operatorname{ctg} x$ grafikon megfelelő részét kék színnel emeltük ki.)

Ellenőrző kérdések

1. Szemléltesd egységsugarú körvonalon; grafikusan az egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldását!
2. Minden esetben van-e megoldása az alábbi egyenlőtlenségeknek: 1) $\sin x < a$; 2) $\sin x > a$; 3) $\cos x < a$; 4) $\cos x > a$; 5) $\operatorname{tg} x < a$; 6) $\operatorname{tg} x > a$; 7) $\operatorname{ctg} x < a$; 8) $\operatorname{ctg} x > a$? Lehet-e az előbb felsorolt egyenlőtlenségek közül valamelyik megoldása a valós számok halmaza? Hozz fel példákat!

Gyakorlatok

Oldd meg az (**1–14.**) egyenlőtlenségeket!

1. 1) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x < -2$; 4) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 1) $\cos x > \frac{1}{2}$; 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x \leqslant 3$; 4) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 1) $\operatorname{tg} x < -1$; 2) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x \leqslant 1$.

4. 1) $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg} x \geqslant 1$; 3) $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$; 4) $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. 1) $\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \geqslant -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} 5x < 1$.

6. 1) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 1$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < 3$;

3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$; 4) $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$.

7. 1) $\sin \frac{\pi}{6}\cos 3x - \cos \frac{\pi}{6}\sin 3x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin 5x \cos 5x \leqslant \frac{1}{4}$; 3) $\sin x + \cos x < 1$.

8. 1) $\left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right| < \frac{1}{2}$; 2) $|\operatorname{tg} x| > 1$.

28. §. PÉLDÁK ÖSSZETETTEBB TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK ÉS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSÁRA

Néha olyan trigonometrikus egyenlettel is találkozhatunk, amelyben azonos argumentum szinuszának és koszinuszának összege és különbsége, és azok szorzata is szerepel. Ebben az esetben célszerű az összeget (vagy a különbséget) új változóval jelölni.

1. példa. Oldjuk meg a $3(\sin x + \cos x) = 2\sin 2x$ egyenletet!

Magyarázat

Ha az egyenletet trigonometrikus azonosságok alkalmazásával azonos argumentumra hozzuk, akkor az (1) egyenletet kapjuk (lásd a megoldást), melyben az x argumentum szinuszának és koszinuszának összege és szorzata szerepel. Az egyenletet a $\sin x + \cos x = y$ változócserével oldjuk meg. Ahhoz, hogy a $\sin x \cdot \cos x$ szorzatot is kifejezzük, elegendő négyzetre emelni a $\sin x + \cos x = y$ egyenlőséget, majd alkalmazzuk az alapazonosságot, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Visszahelyettesítésnél vegyük figyelembe, hogy $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Megoldás

▶ Az adott egyenlet ekvivalens a

$$3(\sin x + \cos x) = 4\sin x \cos x \qquad (1)$$

egyenlettel.

Ha a $\sin x + \cos x = y$ egyenlőség mindét oldalát négyzetre emeljük, akkor $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = y^2$. Innen $\sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$. Ha a kapott kifejezéseket behelyettesítjük az (1) egyenletbe, akkor

$$3y = 2y^2 - 2 = 0, \quad 2y^2 - 3y - 2 = 0, \quad y_1 = 2 \text{ vagy } y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Tehát, $\sin x + \cos x = 2$ vagy $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$.

Ebből $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$ vagy $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$.

Megoldva a kapott egyszerűbb trigonometrikus egyenleteket kapjuk,

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ (nincs megoldása, mivel $\sqrt{2}>1$) vagy $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Innen $x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Tehát

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\pi n.$$

Felelet: $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. ◁

Megjegyzés. A négyzetre emelés hamis gyökökhöz vezethet (lásd a 9. táblázatot). Viszont, ha *új változót vezetünk be, akkor ennek az egyenlőségnek a négyzetre emelése már ekvivalens átalakítás.* Valóban ebben az esetben az egyenlőség jobb és bal oldala azonos előjelű, így $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2$. Ha az $a=b$ egyenlőség mindkét oldala pozitív, akkor az $y=t^2$ függvény minden pozitív t értékre növekvő, minden függvényértéket csak egy argumentumértéknél vesz fel. Tehát, ha $a>0$, $b>0$, akkor $a=b$ egyenlőségből következik, hogy $a^2=b^2$, és fordítva is igaz, ha $a^2=b^2$, akkor $a=b$, ami garantálja, hogy pozitív a és b számokra a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás. Hasonlóképpen, ha $a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$, vegyük figyelembe, hogy negatív számokra az $y=t^2$ függvény csökkenő, ezért minden függvényértéket csak egy argumentumnál vesz fel.

Néhány trigonometrikus egyenlet megoldásánál figyelembe kell venni a trigonometrikus függvények tulajdonságait (a megoldás általános elveit a 3.2. pontban tárgyaltuk), egyebek mellett a jobb és a bal oldal értékkészletének megbecsülésével.

2. példa. Oldjuk meg a $\cos 6x+\sin\frac{5x}{2}=2$ egyenletet!

Vizsgáljuk meg az $f(x)=\cos 6x+\sin\frac{5x}{2}$ függvény értékkészletét. Mivel $|\cos 6x|\leqslant 1$ és $\left|\sin\frac{5x}{2}\right|\leqslant 1$, ezért $|f(x)|\leqslant 2$, vagyis $-2\leqslant f(x)\leqslant 2$.

Tisztázzuk, létezik-e az x-nek olyan értéke, melynél az $f(x)$ függvény felveszi a legnagyobb értékét, a 2-t. Ha $\cos 6x$ értéke kisebb, mint egy, akkor ahhoz, hogy a $\cos 6x+\sin\frac{5x}{2}$ összeg 2 legyen, $\sin\frac{5x}{2}$ nagyobb kell hogy legyen 1-nél. De ez lehetetlen. Hasonlóképpen, ha feltételezzük, hogy $\sin\frac{5x}{2}$ kisebb, mint 1, akkor ahhoz, hogy a $\cos 6x+\sin\frac{5x}{2}$ összeg 2-vel legyen egyenlő, szükséges hogy

cos 6x legyen nagyobb mint 1, ami szintén lehetetlen. Következésképpen egyenlőség akkor, és csak akkor áll fenn az adott egyenletben, ha a cos 6x és a $\sin\frac{5x}{2}$ kifejezések egyenlők 1-gyel. Ezért az adott egyenlet ekvivalens az alábbi rendszerrel:

$$\begin{cases}\cos 6x = 1;\\ \sin\frac{5x}{2} = 1.\end{cases} \text{ Ebből } \begin{cases}6x = 2\pi k,\ k \in Z;\\ \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.\end{cases} \text{ Tehát } \begin{cases}x = \frac{\pi k}{3},\\ x = \frac{\pi + 4\pi n}{5}.\end{cases}$$

Egyenlítsük a kapott egyenlőségek jobb oldalait:

$$\frac{\pi k}{3} = \frac{\pi + 4\pi n}{5}. \text{ Innen } k = \frac{3 + 12n}{5}.$$

Mivel k és n is egész szám, ezért próbáljunk az egyenlőség jobb oldalán olyan n egész számokat helyettesíteni, melyekre k is egész lesz. Ha $n = 1$, akkor $k = 3$. Abban az esetben, ha a számlálóban lévő n együtthatója a 12, és a tört nevezője az 5 relatív prím, akkor ahhoz, hogy maradék nélküli osztást kapjunk, az n értékét a nevezővel, azaz 5-tel kell változtatni. Tehát az utolsó egyenletnek akkor van megoldása az egész számok halmazán, ha $n = 1 + 5m$, $m \in Z$. A kapott értéket helyettesítsük be az egyenletrendszer egyik egyenletébe: $x = \pi + 4\pi m$. Ez az érték gyöke az utolsó egyenletrendszernek, így gyöke az eredeti egyenletnek is.

Felelet: $x = \pi + 4\pi m$, $m \in Z$. ◁

3. példa. Oldjuk meg a $\sqrt{2}|\sin x + \cos x| = 2 + \sin^6 8x$ egyenletet!

Magyarázat

Az egyenlet bal oldalán alkalmazzuk a $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ azonosságot, és vizsgáljuk meg az egyenlet két oldalán álló függvények értékkészletét. A kapott két egyismeretlenes egyenletből álló egyenletrendszer megoldása egyszerűsíthető. Elegendő megoldani az egyik egyenletet és leellenőrizni, hogy a kapott érték gyöke-e a másik egyenletnek.

Megoldás

▶ Az adott egyenlet ekvivalens a

$$2\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2 + \sin^6 8x. \quad (1)$$

Legyen $f(x) = 2\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$ és $g(x) = 2 + \sin^6 8x$. Mivel

$0 \leqslant \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1$, ezért $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$. Úgyszintén $0 \leqslant \sin^6 8x \leqslant 1$, ezért $2 \leqslant g(x) \leqslant 3$.

Az (1) egyenlet bal oldala kettőnél kisebb vagy vele egyenlő értéket vesz fel, míg a jobb oldal értéke kettőnél nagyobb vagy kettővel egyenlő. Egyenlőség csak akkor állhat elő, ha mind a két oldal 2-vel egyenlő, tehát az adott egyenlet ekvivalens az alábbi egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} 2\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=2, \\ 2+\sin^6 8x=2. \end{cases}$$

A rendszer első egyenletéből kapjuk: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\pm 1$. Innen $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Tehát

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n.$$

Ellenőrizzük le, gyöke-e ez az érték a második egyenletnek is. Ha $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, akkor $8x = 2\pi + \pi n$, $n \in Z$, ezért $\sin 8x = 0$, és így $2 + \sin^6 8x = 2$.

Felelet: $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Előfordulhat olyan eset is, hogy a trigonometrikus egyenlet megoldásához olyan azonosságot kell alkalmazni, ami leszűkíti az egyenlet értelmezési tartományát, és ez gyökvesztéshez vezethet. Ahhoz, hogy ezt elkerüljük, az alábbi irányelvet célszerű követni:

ha egy egyenlet (vagy egyenlőtlenség) megoldásakor olyan átalakítást végzünk, mely leszűkíti az eredeti egyenlet (vagy egyenlőtlenség) értelmezési tartományát, akkor azokat az értékeket, melyeket kizártunk az értelmezési tartományból, külön meg kell vizsgálni.

Az 50. táblázatban összegyűjtöttük *azokat a képleteket, melyek leszűkítik az értelmezési tartományt*, és feltüntettük azokat az értékeket, melyeket emiatt külön ellenőrizni kell.

50. táblázat

Képlet (ha balról jobbra alkalmazzuk)	A változó azon értéke, melyet külön ellenőrizni kell, ha eleme az eredeti egyenlet értelmezési tartományának
$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ $\operatorname{tg}(x\pm\alpha)=\frac{\operatorname{tg} x\pm\operatorname{tg}\alpha}{1\mp\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\alpha}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbf{Z}\right)$ $\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

Az 50. táblázat folytatása

Képlet (ha balról jobbra alkalmazzuk)	A változó azon értéke, melyet külön ellenőrizni kell, ha eleme az eredeti egyenlet értelmezési tartományának
$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ $\operatorname{ctg}(x \pm \alpha) = \frac{\operatorname{ctg} x \circ \operatorname{ctg} \alpha \pm 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} x} \; (\alpha \neq \pi n, n \in \mathbf{Z})$ $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$	$x = \pi k, k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$	$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$	$x = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$
$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$	$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$

Ahhoz, hogy meggyőződjünk arról, hogy a felsorolt képletek leszűkítik az értelmezési tartományt, elegendő összehasonlítani a két oldal értelmezési tartományát.

Tekintsük például a $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ képletet.

▶ A bal oldal értelmezési tartománya: $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Ahhoz, hogy meghatározzuk a jobb oldal értelmezési tartományát, figyelembe kell venni, hogy a tört nevezője nem lehet nulla, tehát $\operatorname{tg} x \neq 0$, vagyis $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, és a tangens értelmezési tartományát is: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Ebből következik, hogy a jobb oldal értelmezési tartományát az $\begin{cases} x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}; \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$ korlátozó kikötések rendszere adja meg. Összehasonlítva a vizsgált képlet jobb és bal oldalának értelmezési tartományát, láthatjuk hogy a jobb oldal pótkikötést

tartalmaz: $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$. Tehát, ha ezt a képletet balról jobbra alkalmazzuk, akkor az értelmezési tartomány szűkül (épp azok az értékek esnek ki, melyeket a táblázatban feltüntettünk: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$). Ahhoz, hogy ne veszítsünk gyököt, ha az egyenlet megoldásánál a $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ képletet alkalmazzuk, az $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ értékeket külön kell vizsgálni (természetesen csak abban az esetben, ha ez az érték eleme az eredeti egyenlet értelmezési tartományának).

Tekintsünk egy példát a fenti irányelv alkalmazására.

4. példa. Oldjuk meg a $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ egyenletet! (1)

Magyarázat

Ha alkalmazzuk a 50. táblázat első két képletét, akkor az egyenletben a változónak csak a tangense szerepel. De ha ezeket az azonosságokat alkalmazzuk, akkor szűkítjük az értelmezési tartományt, kizárjuk az $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, így gyököt veszíthetünk, ha ezek az értékek elemei az eredeti egyenlet értelmezési tartományának és gyökei is az egyenletnek. Hogy ezt elkerüljük, az egyenlet megoldását két részre bontjuk.

1. Helyettesítsük be az (1) egyenletbe a változó azon értékeit, melyeket kizártunk az értelmezési tartományból, mivel azt leszűkítettük. Vegyük figyelembe a függvények periodicitását.

2. Ha $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ (az (1) egyenlet értelmezési tartományán), alkalmazzuk a $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ és a $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$ azonosságokat, akkor a (2) egyenletet kapjuk (lásd a megoldást), amely ekvivalens az adott egyenlettel (az értelmezési tartomány azon értékeinél, ahol $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$), mert ezek az egyenlőségek igazak akár az (1) egyenletből írjuk fel a (2)-t, akár a (2)-ből az (1)-t. A változócsere alkalmazásával (és a visszahelyettesítés után is) az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk (az értelmezési tartomány adott részhalmazán).

Megjegyezzük, hogy a (2) egyenlet értelmezési tartománya csak annyiban különbözik az (1) egyenlet értelmezési tartományától, hogy kizártuk az (1) egyenlet értelmezési tartományából az $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ értékeket. De mivel mi

már ezeket a „rossz" értékeket figyelembe vettük a megoldás során, így fölösleges az (1) egyenlet értelmezési tartományát feltüntetni (ahogy azt a megoldásban láthatjuk). A feleletben feltüntetjük mind az első, mind a második részben kapott gyököket.

Megoldás

1. ▶ Ha $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor

$\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k+\frac{\pi}{4}\right)=1$, vagyis $0^2-(-1)=1$. Így igaz egyenlőséget kaptunk,

tehát $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ gyöke az adott egyenletnek. (1)

2. Ha $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, akkor

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}-\frac{\operatorname{tg} x+1}{1-\operatorname{tg} x}=1. \qquad (2)$$

A $\operatorname{tg} x = t$ változócserével az egyenletet az $\frac{1}{t^2}-\frac{t+1}{1-t}=1$, egyenletre vezethetjük vissza, mely ha $t \neq 0$ és $t \neq 1$ ekvivalens a $2t^2 + t - 1 = 0$ egyenlettel. Innét $t_1 = -1$ és $t_2=\frac{1}{2}$. Helyettesítsük vissza: $\operatorname{tg} x = -1$ vagy $\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}$.

Vagyis $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, vagy $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Felelet: $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. ◁

Néhány trigonometrikus egyenlet megoldásánál az úgynevezett „keress másodfokú polinomot" módszert kell alkalmazni:

úgy kell tekintenünk az egyenletre, mint amely az x-re másodfokú.

5. példa. Oldjuk meg az $x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0$ egyenletet!

Megoldás

▶ Tekintsük ezt az egyenletet az x-re vonatkozóan másodfokúnak:

$$x^2-\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot x+1=0.$$

Ennek az egyenletnek akkor, és csak akkor van gyöke, ha diszkriminánsa nemnegatív:

$D=4\sin^2\frac{\pi x}{2}-4\geqslant 0$. Ebből $\sin^2\frac{\pi x}{2}\geqslant 1$.

Magyarázat

Több módszert is alkalmazhatunk az adott egyenlet megoldására:

1) az egyenletre úgy tekintünk, mint egy olyan másodfokú egyenletre, melyben x az ismeretlen. Ennek akkor, és csak akkor van megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív;

2) ha a bal oldalon teljes négyzetet alakítunk ki,

De $\sin^2\frac{\pi x}{2}$ értéke nem lehet több, mint egy. Tehát $\sin^2\frac{\pi x}{2}=1$, vagyis $\sin\frac{\pi x}{2}=1$ vagy $\sin\frac{\pi x}{2}=-1$. Visszahelyettesítve a kapott értékeket az eredeti egyenletbe, az alábbi rendszereket kapjuk:

$$\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2}=1,\\ x^2-2x+1=0\end{cases}\quad\text{vagy}\quad\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2}=-1,\\ x^2+2x+1=0.\end{cases}$$

Az első egyenletrendszer második egyenletének gyöke az $x = 1$, ami kielégíti az első egyenletet is. Tehát az $x = 1$ érték gyöke az első egyenletrendszernek és így gyöke az eredeti egyenletnek is. Hasonlóképpen kapjuk, hogy az $x = -1$ gyöke a második egyenletrendszernek és így gyöke az eredeti egyenletnek is.

Felelet: 1; –1. ◁

$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2$, akkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2+\left(1-\sin^2\frac{\pi x}{2}\right)=0.$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2\geqslant 0 \text{ és } 1-\sin^2\frac{\pi x}{2}\geqslant 0.$$

Mert *két nemnegatív szám összege akkor, és csak akkor nulla, ha mind a két összeadandó nulla.*

De az utolsó egyenletet az

$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2=\sin^2\frac{\pi x}{2}-1$$

alakban is felírhatjuk, majd megvizsgáljuk az egyenlet jobb és bal oldalát is.

Trigonometrikus egyenletrendszerek megoldása során nem minden átalakítás ekvivalens. Néha egyenlet-következményeket kell alkalmazni. Ezekben az esetekben hamis gyököket is kaphatunk, ezért a gyököket le kell ellenőrizni. Leellenőrizhetjük a rendszer gyökeit, és a trigonometrikus kifejezések értékeit is. Ha az összes, az egyenletrendszerben szereplő, trigonometrikus függvénynek minden változóra van közös periódusa, akkor elegendő, ha minden változó azonos periódushoz tartozó értékeit leellenőrizzük.

6. példa. Oldjuk meg a $\begin{cases}\sqrt{2}\sin x=\sin y,\\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y\end{cases}$ egyenletrendszert!

Magyarázat

Ha az első egyenletből kifejezzük a $\sin x$ értéket, a második egyenletből pedig a $\cos x$ értéket, és négyzetre emeljük az egyenlet mindkét oldalát, majd összeadjuk az egyenletrendszer egyenleteit, akkor alkalmazhatjuk a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot. Így egy y változós egyenlethez jutottunk, melyet már könnyű úgy átalakítani, hogy csak egyfajta trigonometrikus függvény szerepeljen az egyenletben.

De a négyzetre emelés során egyenlet-következményt kapunk, ami nem ekvivalens átalakítás, így a gyökök között hamis gyököket is kaphatunk, melyeket ellenőrzéssel szűrhetünk ki.

Az ellenőrzésnél vegyük figyelembe, hogy az egyenletben szereplő trigonometrikus függvény (a $\sin x$ és $\cos x$ is) 2π szerint periodikus. Hasonlóképpen y-nak az egyenletben szereplő trigonometrikus szögfüggvények periódusa is 2π. Ezért az ellenőrzést elegendő elvégezni az összes olyan $(x; y)$ számpárra, ahol $x \in [0; 2\pi]$ és $y \in [0; 2\pi]$ (bármelyik másik 2π hosszúságú intervallum is választható). Célszerű azt is figyelembe venni, hogy azok a gyökök, melyeket a rendszer egyik egyenletéből kaptunk, azok ezt az egyenletet természetesen kielégítik, így csak a rendszer másik egyenletébe kell visszahelyettesíteni ellenőrzéskor.

Minden változó esetében a gyökök felírásakor figyelembe kell venni a periodicitást.

Megoldás

▶ Az adott egyenletrendszer ekvivalens a $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin y, & (1) \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cos y & (2) \end{cases}$

egyenletrendszerrel.

Emeljük az egyenletrendszer mindkét egyenletét négyzetre, majd a kapott egyenleteket adjuk össze:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 y + \frac{3}{2}\cos^2 y. \text{ Innen } 2 = \sin^2 y + 3\cos^2 y,$$

$2 = 1 - \cos^2 y + 3\cos^2 y$, vagyis $\cos^2 y = \frac{1}{2}$.

Tehát $\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ vagy $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

A kapott értékeket behelyettesítve a (2) egyenletbe, kapjuk hogy

$$\begin{cases} \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} \cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Ebből $\begin{cases} y = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$ (3) vagy $\begin{cases} y = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ n, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$ (4)

Az egyenletrendszerben mind a két változónak, az x-nek és az y-nak is csak olyan szögfüggvénye szerepel, mely 2π szerint periodikus, ezért az ellenőrzést elegendő elvégezni az összes olyan $(x; y)$ számpárra, ahol $x \in [0; 2\pi]$ és $y \in [0; 2\pi]$.

A (3) egyenlet megoldásai közül ezek a $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{11\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right)$ számpárok,

a (4) egyenlet megoldásai közül pedig az $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right)$.

Ezen számpárok közül csak az alábbiak a rendszer megoldásai:

$$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right).$$

A többi megoldás a kapott számpároktól periódusokban különbözik.

Felelet: $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{11\pi}{6}+2\pi k; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$,

$\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n, k \in \mathbf{Z}$. ◁

Az inverz trigonometrikus függvényeket tartalmazó egyenletek megoldása közben emlékezzünk vissza, ha $|a| \leqslant 1$, akkor

$$\boxed{\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}},$$

és bármely a értéknél

$$\boxed{\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}}.$$

Néha célszerű az inverz trigonometrikus függvényeket tartalmazó egyenletek megoldásánál kiválasztani a két oldal egy tetszőleges trigonometrikus függvényét és alkalmazni a megfelelő inverz függvény meghatározását.

7. példa. Oldjuk meg a $2\arcsin x = \arcsin \frac{10}{13}x$. egyenletet!

Magyarázat

Ha vesszük mind a két oldal szinuszát, akkor egyenlet-következményt kapuk: ha két szám egyenlő, akkor e számok szinuszai is egyenlők, de ha két szinusz érték egyenlő, ez nem jelenti azt, hogy a szögek, a számok is feltétlenül egyenlők. Tehát az igazsághalmaz nem változik az egyenes átalakításnál, viszont az inverz átalakításnál változhat, így az ellenőrzés elengedhetetlen.

Az $\arcsin x = \alpha$ jelölésnél, a meghatározás értelmében $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és $\sin \alpha = x$. Ahhoz, hogy meghatározzuk $\cos \alpha$-t, vegyük figyelembe, hogy $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és ezekre az értékekre $\cos \alpha \geqslant 0$, vagyis $\cos \alpha = \sqrt{1-\sin^2 \alpha}$.

Ellenőrzéskor, azokban az esetekben, amikor a meghatározott értékek nem gyökei az adott egyenletnek, célszerű összehasonlítani a nevezetes szögek trigonometrikus értékeivel. Például $\frac{12}{13} \approx 0{,}9$ több, mint $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$. Figyelembe véve, hogy az $y = \arcsin t$ függvény növekvő, azt kapjuk, hogy $\arcsin \frac{12}{13} > \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Megoldás

▶ Vezessünk be új változót. Legyen $\arcsin x = \alpha$, ahol $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ és $\arcsin \frac{10}{13}x = \beta$, ahol $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Ezzel az egyenlet

$$2\alpha = \beta \qquad (1)$$

alakban írható fel. Vegyük az (1) egyenlet mindkét oldalának szinuszát, akkor

$$\sin 2\alpha = \sin \beta,$$
$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin \beta. \qquad (2)$$

Az árkuszszinusz meghatározása alapján $\sin \alpha = x$, $\sin \beta = \frac{10}{13}x$. Mivel $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ezért $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$.

Így a (2) egyenlet $2x\sqrt{1-x^2} = \frac{10}{13}x$. alakban írható fel. Ebből

$$x\left(2\sqrt{1-x^2} - \frac{10}{13}\right) = 0.$$

Tehát $x = 0$ vagy $\sqrt{1-x^2} = \frac{5}{13}$, vagyis $1 - x^2 = \frac{25}{169}$, $x^2 = \frac{144}{169}$, $x = \pm\frac{12}{13}$.

Ellenőrzés.

1) $x = 0$ gyöke az egyenletnek $\left(2 \arcsin 0 = \arcsin\left(\frac{10}{13} \cdot 0\right); 0 = 0\right)$,

2) $x = \pm\frac{12}{13}$ – hamis gyök. Valóban, ha $x = \frac{12}{13}$, akkor $2 \arcsin -\left(\frac{12}{13}\right) \neq \arcsin \frac{120}{169}$ (mivel $\frac{12}{13} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért $2 \arcsin \frac{12}{13} > 2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, de $\arcsin \frac{120}{169} < \frac{\pi}{2}$). Hasonlóképpen, ha $x = -\frac{12}{13}$, akkor $2 \arcsin \frac{12}{13} < -\frac{\pi}{2}$ és megint nem kapunk igaz egyenlőséget.

Felelet: 0. ◁

Megjegyzés. A $2 \arcsin x = \arcsin \frac{10}{13}x$ egyenletet nem csak az előző módszerrel lehet megoldani, hanem ekvivalens átalakításokkal. Ebben az esetben viszont meg kell vizsgálni az egyenlet értelmezési tartományát:

$$\begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ \left|\frac{10}{13}x\right| \leqslant 1, \end{cases} \qquad (3)$$

és azt is vegyük figyelembe, hogy az egyenlet minden gyökére az egyenlet jobb oldala, az $\left(\arcsin \frac{10}{13}x\right)$ a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba esik (az árkuszszinusz megha-

tározás alapján). Így az egyenlet bal oldalának is ehhez az intervallumhoz kell tartoznia. Ez azt jelenti, hogy az egyenlet minden gyökére teljesül a $-\frac{\pi}{2} \leqslant 2\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$ kikötés, vagyis

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{4}. \qquad (4)$$

A $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon a sin t függvény növekvő, így ha a (4) kikötés teljesül (természetesen az értelmezési tartományon), akkor ha vesszük az egyenlet mindkét oldalának szinuszát, az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk (tehát az eredeti egyenlet a (3) és a (4) kikötéssel ekvivalens a (2) egyenlettel). A 7. példánál alkalmazott gondolatmenet alapján, az átalakítások után kapjuk, hogy $x = 0$ vagy $x = \pm\frac{12}{13}$. A kapott értékek elemei az egyenlet értelmezési tartományának (kielégítik a (3) kikötést, de a (4) kikötésnek csak az $x = 0$ gyök felel meg).

Ellenőrző kérdések

1. Magyarázd meg, hogyan oldható meg a $\cos x = 1 + x^2$ egyenlet, az egyenlet mindkét oldalán lévő kifejezés értékkészletének becslésével! Oldd meg az egyenletet!
2. Magyarázd meg, hogyan oldhatjuk meg azokat a trigonometrikus egyenleteket, melyekben csak az azonos argumentum szinuszának és koszinuszának összege, vagy különbsége és szorzata szerepel! Hozz fel példát ilyen típusú egyenletre!
3. Hozz fel példát olyan trigonometrikus azonosságra, amely szűkíti az értelmezési tartományt, és így az alkalmazása gyökvesztéshez vezethet! Magyarázd meg a szűkítés okát! Hogyan kell alkalmazni ezeket a képleteket, hogy ne veszítsünk gyököt? A módszert magyarázd meg a $2\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ egyenlet megoldásával!

Gyakorlatok

Oldd meg **(1–5.)** egyenleteket!

1. 1) $\sin x - \cos x = \sin 2x - \frac{1}{2}$; 2) $\sin x + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 0{,}5 \sin 2x$.

2. 1) $\sin 7x + \cos 12x = 2$; 2) $\sin 2x \sin 6x = 1$;

3) $\cos \pi x + \sin \frac{5\pi x}{2} = -2$; 4) $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$;

5) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 5 \operatorname{tg}^2 5x + 5 \operatorname{ctg}^2 5x = 12$.

3. 1) $5 \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg} x - 5$; 2) $\sin 2x + \operatorname{tg} 2x = -\frac{8}{3}\operatorname{ctg} x$.

4. 1) $9x^2 - 6x\cos 6\pi x + 1 = 0$;
2) $4x^2 - 4x\sin(xy) + 1 = 0$ (határozd meg azokat az $(x; y)$ számpárokat, melyek kielégítik az egyenletet).

5. 1) $2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi \arcsin x$; 2) $9(\arccos 2x)^2 - 3\pi \arccos 2x - 2\pi^2 = 0$;
3) $2\arcsin x + 3\arccos x = \pi$; 4) $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi^2}{16}$;
5) $2\arcsin 2x = \arccos 7x$; 6) $\arcsin x = 2\operatorname{arctg} x$.

6. Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket!

1) $\begin{cases} \sin x = -\sqrt{3}\sin y, \\ \sqrt{3}\cos x = \cos y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos 2x + 2\cos y = 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4\sin(3x + 2y) + \sin x = 0, \\ 4\sin(2x + 3y) + \sin y = 0. \end{cases}$

29. §. PARAMÉTERES TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA

29.1. Paraméteres egyenletek megoldása

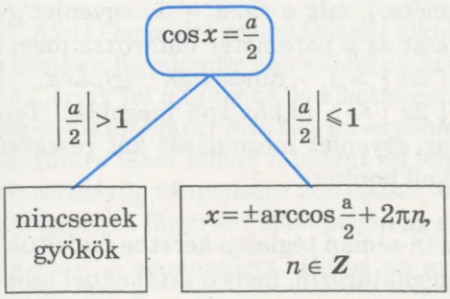
Ha egy egyenlet a változókon és a számtényezőkön kívül még betűváltozókat (paramétereket is tartalmaz), akkor az alábbi irányelv alkalmazható (lásd a 9. §-t).

Bármely paraméteres egyenletet és egyenlőtlenséget ugyanúgy oldhatunk, mint a nem paraméteres egyenletet addig, amíg minden átalakítás, melyet végrehajtunk, egyértelmű. Ha valamelyik átalakítás nem egyértelmű, akkor a megoldást részesetekre kell bontani, melyeknél viszont már a paraméteres megoldás is egyértelmű.

A paraméteres egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásának megtervezésénél, és a megoldás közben is célszerű sémát készíteni. Így könnyebb figyelemmel követni, hogy melyik lépés nem egyértelmű, és hány részesetre kell bontani a megoldást, és miben különböznek ezek a részesetek egymástól. Hogy a sémán belül (a szerteágazó megoldás közben) ne felejtkezzünk el valamelyik gyökről, a kapott gyököket célszerű téglalap keretbe foglalni.

1. példa. Oldjuk meg a $2\cos x - a = 0$ egyenletet!

Megoldás



Felelet:

1) ha $\left|\frac{a}{2}\right| > 1$, azaz $|a| > 2$, akkor nincsenek gyökök;

2) ha $\left|\frac{a}{2}\right| \leqslant 1$, azaz $|a| \leqslant 2$, akkor

$x = \pm\arccos\frac{a}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Magyarázat

Az a paraméter nem gátol abban bennünket, hogy az egyenletből kifejezzük a $\cos x$ kifejezést.

A $\cos t = b$ egyenletnek, ha $|b| > 1$ nincs megoldása, míg abban az esetben, ha $|b| \leqslant 1$ a megoldást az ismert képlettel tudjuk megadni (lásd a 46. táblázatot). Tehát a $\cos x = \frac{a}{2}$ egyenlet megoldása már nem egyértelmű, ezért innét már két részesetre kell bontani a megoldást.

A végső megoldás az abszolút érték jelével is felírható, és úgy is megadható, hogy a paraméterre vonatkozó kikötéseket egyenlőtlenséggel írjuk fel:

1) ha $a < -2$ vagy $a > 2$, akkor nincs megoldás;

2) ha $-2 \leqslant a \leqslant 2$, akkor

$x = \pm\arccos\frac{a}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

2. példa. Oldjuk meg a $\sin 2x = 4a\cos x$ egyenletet!

Megoldás

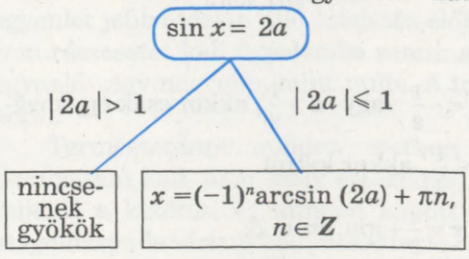
▶ $2\sin x\cos x - 4a\cos x = 0,$

$2\cos x(\sin x - 2a) = 0.$ (1)

Innen $\cos x = 0$ vagy $\sin x - 2a = 0$.

Tehát $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z},}$

vagy $\sin x = 2a$.



Magyarázat

Először alakítsuk át úgy az egyenletet, hogy csak egy szög trigonometrikus függvényei szerepeljenek benne a kétszeres szög szinuszára vonatkozó azonosságot alkalmazva:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

Ha az egyenletet nullára redukáljuk (minden tagját egy oldalra rendezzük), akkor a $2\cos x$ közös tényező kiemelhető.

Mivel mindkét tényező bármely valós számra értelmezhető, így az (1) egyenlet ekvivalens a $\cos x = 0$ vagy $\sin x - 2a = 0$ egyenletekkel, azaz a

$$\cos x = 0 \text{ vagy } \sin x = 2a$$

egyenletekkel.

Felelet:
Lásd a megjegyzés után. ◁

A $\cos x = 0$ egyenlet gyökei nem függenek az a paramétertől (ebben az egyenletben nem szerepel az a paraméter), míg a $\sin x = 2a$ egyenlet gyökeit az a paraméter határozza meg: ha $|2a| > 1$, nincsenek gyökök, ha $|2a| \leqslant 1$, akkor van megoldás. Tehát az egyenlet megoldását két részesetre kell bontani.

Megjegyzés. A felelet megadásához (a sémán téglalap keretbe foglaltuk) célszerű a kikötéseket pontosítani, azaz meghatározni, mely a értékeknél teljesülnek $|2a| > 1$ és a $|2a| \leqslant 1$ egyenlőtlenségek. Oldjuk meg a kapott egyenlőtlenségeket:

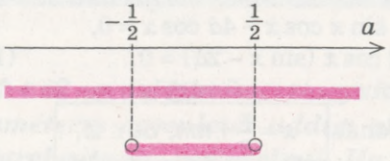
ha $|2a| \leqslant 1$, akkor $-1 \leqslant 2a \leqslant 1$, vagyis $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$;

ha $|2a| > 1$, akkor $2a < -1$ vagy $2a > 1$, tehát $a < -\frac{1}{2}$ vagy $a > \frac{1}{2}$.

Az összetettebb vagy szerteágazó megoldásoknál célszerű számegyenesen ábrázolni a paraméter lehetséges értékeit. Ezen a tengelyen tüntessük fel az a paraméter minden olyan értékét, melyet a megoldás közben határoztunk meg (167. ábra). *A tengely alatt (tőle balra) írjuk ki a kapott megoldásokat (a „nincs megoldáson" kívül) és jelöljük ki, mely paramétereknél kaptuk ezt a megoldást.*

1. $x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z$

2. $x = (-1)^n \arcsin(2a) + \pi n,\ n \in Z$



167. ábra

A rajzról könnyen leolvasható, ha $a < -\frac{1}{2}$ vagy $a > \frac{1}{2}$, akkor csak egy megoldáshalmazt kell feltüntetni, ha $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$, akkor kettőt.

Felelet. 1) ha $a < -\frac{1}{2}$ vagy $a > \frac{1}{2}$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$;

2) ha $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}$, $x = (-1)^n \arcsin(2a) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

3. példa. Oldjuk meg a

$$\operatorname{tg} 2x = a \operatorname{ctg} x \tag{1}$$

egyenletet!

Magyarázat

Az (1) egyenlet megoldásánál alkalmazzunk azonos átalakításokat. Ebben az esetben figyelembe kell vennünk az adott egyenlet értelmezési tartományát (ÉT). Írjuk fel a tangens és a kotangens értelmezési tartományát, majd oldjuk meg a kikötéseket. Minden az egyenletben szereplő szögfüggvényt egy argumentumra lehet hozni, mindent fel lehet írni x függvényeként. Alkalmazzuk a kétszeresszög tangensére vonatkozó azonosságot, majd alakítsuk át úgy, hogy csak egyfajta függvény szerepeljen az egyenletben, a $\operatorname{tg} x$. Ehhez alkalmazzuk a $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ azonosságot. De ez az azonosság leszűkíti az értelmezési tartományt (50. táblázat), és ezért, hogy ne veszítsünk gyököt, az értelmezési tartományból kizárt értéket $\left(x = \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ külön ellenőrizni kell.

Ha $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, akkor azonos átalakításokkal az egyenlet olyan alakra hozható, melyben csak az x egyféle trigonometrikus függvénye szerepel:

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{a}{\operatorname{tg} x}. \tag{2}$$

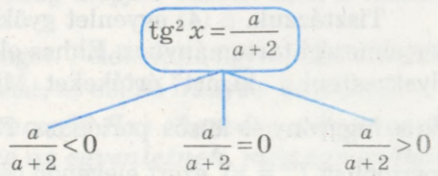
Mivel azok az értékek, melyeknél a nevezők értéke nulla, nem tartozik az (1) egyenlet értelmezési tartományához, így az eredeti egyenlettel ekvivalens egyenletet kapunk, ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a törtek nevezőivel. A $(2 + a) \operatorname{tg}^2 x = a$ egyenletet kapjuk, ami ekvivalens a (2) egyenlettel az (1) egyenlet értelmezési tartományán.

1) Ha $2 + a = 0$, vagyis $a = -2$, akkor $0 \cdot \operatorname{tg}^2 x = -2$ egyenletnek nincs megoldása.

2) Ha $2 + a \neq 0$, vagyis $a \neq -2$, akkor azt kapjuk, hogy $\operatorname{tg}^2 x = \frac{a}{a+2}$.

Ahhoz, hogy ezt az egyenletet meg tudjuk oldani, meg kell határozni az egyenlet jobb oldalán álló kifejezés előjelét, mivel $\operatorname{tg}^2 x$ nem lehet negatív. Három részesetet kell figyelembe venni: a jobb oldal kisebb, mint nulla, nullával egyenlő vagy nagyobb, mint nulla. A továbbiakban az alábbi sémát fogjuk követni.

Természetesen minden esetben pontosítani kell, az a mely értékeinél teljesül a kikötés, és minden kapott megoldást ellenőrizni kell, hozzátartozik-e a kapott érték az adott egyenlet értelmezési tartományához.



Megoldás

▶ ÉT. $\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ x \neq \pi m, m \in \mathbf{Z}, \end{cases}$ így $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}, \\ x \neq \pi m, m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

I. Ha $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, az (1) egyenletből kapjuk, hogy $\operatorname{tg}(\pi + 2\pi k) = a \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, vagyis $0 = a \cdot 0$, ami az a bármely értékénél igaz. Tehát az a bármely értékénél az egyenlet gyöke az

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \; k \in \mathbf{Z}.$$

II. Ha $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ $k \in \mathbf{Z}$, akkor a (2) egyenletet kapjuk: $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{a}{\operatorname{tg} x}$, ami az egyenlet értelmezési tartományán ekvivalens a $2 \operatorname{tg}^2 x = a - a \operatorname{tg}^2 x$ egyenlettel. Ebből a

$$(2 + a) \operatorname{tg}^2 x = a \tag{3}$$

egyenletet kapjuk.

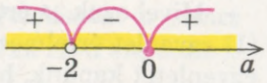
1) Ha $a = -2$, akkor nincs megoldás.

2) Ha $a \neq -2$, akkor a (3) egyenlet ekvivalens a

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{a}{a+2}. \tag{4}$$

a) Ha $\frac{a}{a+2} < 0$, akkor nincs megoldás.

Az $\frac{a}{a+2} < 0$ egyenlőtlenséget intervallummódszerrel oldjuk meg (168. ábra): $-2 < a < 0$.



168. ábra

Tehát, ha $-2 < a < 0$, akkor nincs megoldás.

b) Ha $\frac{a}{a+2} = 0$ (vagyis $a = 0$), akkor a $\operatorname{tg} x = 0$ egyenletet kapjuk, melynek a gyökei $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. De ezek az értékek nem tartoznak hozzá az egyenlet értelmezési tartományához. Tehát, ha $a = 0$, akkor nincs megoldás.

c) Ha $\frac{a}{a+2} > 0$ (vagyis $a < -2$ vagy $a > 0$), akkor a (4) egyenletből kapjuk, hogy $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{a}{a+2}}$. Ebből $x = \operatorname{arctg}\left(\pm \sqrt{\frac{a}{a+2}}\right) + \pi l$, $l \in \mathbf{Z}$.

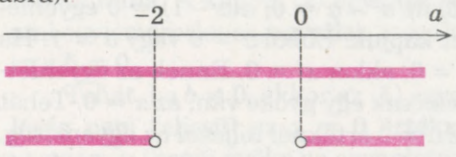
Tisztázzuk, a (4) egyenlet gyökei az a mely értékeinél nem tartoznak az értelmezési tartományhoz. Ehhez elegendő a (4) egyenletbe az x helyére behelyettesíteni a „kizárt" értékeket. Mivel az egyenletben szereplő trigonometrikus függvények közös periódusa $T = \pi$ (a $\operatorname{tg} 2x$ periódusa $T_1 = \frac{\pi}{2}$, a $\operatorname{ctg} x$ periódusa $T_2 = \pi$), ezért elegendő csak egy periódushoz tartozó értékeket visz-

szahelyettesíteni, például a $[0; \pi]$ intervallumból. Ebből az intervallumból az egyenlet értelmezési tartományához a $0; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \pi$ értékek tartoznak. Ha $x = 0$ vagy $x = \pi$, akkor a (4) egyenletből az $\frac{a}{a+2} = 0$ egyenletet kapjuk, azaz $a = 0$. Az $a = 0$ részesetet már vizsgáltuk (nincs megoldás). Ha $x = \frac{\pi}{4}$ vagy $x = \frac{3\pi}{4}$, akkor a (4) egyenletből: $\frac{a}{a+2} = 1$. De ez az egyenlőség az a egyetlen értékénél sem teljesülhet. Így minden $a < -2$ vagy $a > 0$ értékre a kapott $x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right) + \pi l,\ l \in \mathbf{Z}$ gyökök hozzátartoznak az eredeti egyenlet értelmezési tartományához.

Ábrázoljuk a kapott megoldást (169. ábra).

1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

2) $x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right) + \pi l,\ l \in \mathbf{Z}$



169. ábra

Felelet: 1) ha $-2 \leqslant a \leqslant 0$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$;

2) ha $a < -2$ vagy $a > 0$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$,

$x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right) + \pi l,\ l \in \mathbf{Z}$. ◁

29.2. Paraméteres feladatok megoldása

Azonkívül, hogy egyszerűen paraméteres egyenletet vagy egyenlőtlenséget kell megoldani, gyakran találkozhatunk paraméter-meghatározási feladatokkal. Ezek néha közvetlenül is megoldhatók, egyenlettel vagy egyenlőtlenséggel. Gyakran viszont nem lehet ilyen módszerekkel megoldani ezeket a feladatokat (vagy a megoldás túl terjedelmes), ilyenkor célszerű az adott egyenlet valamely tulajdonságát igazolni, majd ezen tulajdonság alapján választ adni a feladat kérdésére.

Tekintsünk át néhány ilyen tulajdonságot. Például, ha figyelembe vesszük az egyenletben szereplő függvények paritását, az alábbi irányelv követendő.

Ha az $f(x) = 0$ egyenletben szereplő $f(x)$ függvény páros vagy páratlan, akkor ha az α gyöke az egyenletnek, még egy gyököt tudunk rögtön megnevezni, mégpedig a $(-\alpha)$-t.

1. példa. Határozzuk meg az a paraméter azon értékeit, melyeknél a

$$a^2 \cos^2 x - x^2 - a = 0 \qquad (1)$$

egyenletnek egyetlen gyöke van.

Megoldás

Az $f(x) = a^2 \cos^2 x - x^2 - a$ függvény páros. ($D(f) = R$, $f(-x) = f(x)$). Tehát ha $x = \alpha$ gyöke az (1) egyenletnek, akkor az $x = -\alpha$ is gyöke az egyenletnek. Így egyetlen gyöke az egyenletnek csak akkor lehet, ha $\alpha = -\alpha$, vagyis $\alpha = 0$. Tehát ha az egyenletnek egy gyöke van, akkor az csak az $x = 0$ lehet.

Ha $x = 0$, akkor az első egyenletből az $a^2 - a = 0$, $a(a - 1) = 0$ egyenletet kapjuk. Ebből $a = 0$ vagy $a = 1$. Ha $a = 0$, akkor $x^2 = 0$. Ennek az egyenletnek csak egy gyöke van, az $x = 0$. Tehát az $a = 0$ értéknél teljesül az egyenlőség.

Ha $a = 1$, akkor a $\cos^2 x - x^2 - 1 = 0$ egyenletet kapjuk, vagyis

$$\cos^2 x = 1 + x^2. \qquad (2)$$

Mivel $\cos^2 x \leqslant 1$ és $1 + x^2 \geqslant 1$, ezért a (2) egyenlet ekvivalens a

$$\begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1 \end{cases}$$

egyenletrendszerrel.

A második egyenlet megoldása az $x = 0$, ami kielégíti az első egyenletet is. Tehát az egyenletrendszernek, és így a (2) egyenletnek is csak egy gyöke van. Ebből következik, hogy az $a = 1$ is megfelel a feladat feltételeinek.

Felelet: $a = 0$, $a = 1$. ◁

Magyarázat

Vegyük észre, hogy az egyenlet jobb oldalán álló függvény páros, így alkalmazzuk a megnevezett irányelvet. Valóban, ha $x = \alpha$ gyöke az $f(x) = 0$ egyenletnek, akkor $f(\alpha) = 0$ igaz számegyenlőség. Viszont a függvény párossága miatt $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Ezért az $x = -\alpha$ szintén gyöke az $f(x) = 0$ egyenletnek. Az egyenletnek akkor, és csak akkor lehet egy gyöke, ha α és $-\alpha$ egybeesik. Vagyis, ha $x = \alpha = -\alpha = 0$.

Tisztázzuk, léteznek-e az a paraméternek olyan értékei, melynél az $x = 0$ gyöke az (1) egyenletnek. (Ezek az $a = 0$ és $a = 1$ értékek.)

Mivel $a = 0$ és $a = 1$ értékeket azzal a feltétellel kaptuk, hogy az $x = 0$ gyöke az (1) egyenletnek, ezért szükséges leellenőrizni, hogy az a meghatározott értékeinél az egyenletnek valóban csak egy gyöke van.

A (2) egyenlet megoldásánál becsüljük meg az egyenlet mindkét oldalán lévő függvény értékkészletét:

$f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = 1 + x^2$.

$$\underbrace{\cos^2 x}_{0 \leqslant f(x) \leqslant 1} = \underbrace{1 + x^2}_{g(x) \geqslant 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$$

Más paraméteres feladatok megoldásánál az alábbi irányelv segíthet.

Ha egy paraméteres egyenlet vagy egyenlőtlenség megoldásánál az a feladat, hogy bármely szám megoldása legyen, akkor célszerű néhány értéket behelyettesíteni, és így kikötéseket tenni a paraméterre.

2. példa. Határozzuk meg azokat az $(a; b)$ számpárokat, melyeknél az

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1 \qquad (1)$$

egyenletnek minden valós szám a gyöke!

Megoldás

Ha az egyenletnek minden valós szám gyöke, akkor gyöke a nulla is.

Ha $x = 0$, akkor $b^2 = \cos b^2 - 1$, innen

$$1 + b^2 = \cos b^2. \qquad (2)$$

Figyelembe véve, hogy $1 + b^2 \geqslant 1$ és $\cos b^2 \leqslant 1$, kapjuk, hogy a (2) egyenlet ekvivalens az

$$\begin{cases} 1 + b^2 = 1, \\ \cos b^2 = 1. \end{cases}$$

egyenletrendszerrel.

Az egyenletrendszer első egyenletéből kapjuk, hogy $b = 0$, ami kielégíti a második egyenletet is. Tehát az egyenletrendszernek, és így a (2) egyenletnek is csak egy gyöke van, a $b = 0$.

Tehát a feladat feltétele csak akkor teljesülhet, ha $b = 0$.

Ha $b = 0$, akkor az (1) egyenletből az

$$a(\cos x - 1) = \cos(ax) - 1 \qquad (3)$$

egyenletet kapjuk.

Viszont a feladat feltételeinek megfelelően az egyenletnek minden valós szám gyöke, így a 2π is. Ha $x = 2\pi$, akkor $0 = \cos(2\pi a) - 1$, $\cos(2\pi a) = 1$. Innen $2\pi a = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Tehát $a = k$, $k \in \mathbf{Z}$ (ez azt jelenti, hogy a egész szám).

Ha a (3) egyenletnek minden valós szám gyöke, akkor a $\frac{\pi}{2}$ szám is az.

$x = \frac{\pi}{2}$ esetén azt kapjuk, hogy

$$-a = \cos\left(\frac{\pi}{2}a\right) - 1.$$

Magyarázat

Mi nem tudjuk megoldani az adott egyenletet (igaz nem is várják el tőlünk), hanem alkalmazzuk, hogy az egyenletnek bármely valós szám a megoldása.

Leggyakrabban olyan értéket választunk, amelynél az egyenlet valamelyik tagja nullává válik. Így, ha $x = 0$, akkor az első zárójelben álló kifejezés értéke nulla. A kapott (2) egyenletnek, ami egyismeretlenes, egyetlen megoldása a $b = 0$.

Tehát, ha $b \neq 0$, akkor az (1) egyenlőség nem teljesül az $x = 0$ értéknél, vagyis $x = 0$ nem gyöke az egyenletnek, ez viszont azt jelenti, hogy a b ezen értékénél az egyenletnek nem minden valós szám a megoldása.

Próbáljuk újra nullává alakítani az első zárójelben lévő kifejezés értékét, vegyük figyelembe, hogy a koszinusz 2π szerint periodikus, tehát az első zárójel értéke ismétlődik (helyettesítsük be az $x = 2$ értéket).

Továbbá próbáljuk meg, hogy a $\cos x$ értéke legyen nulla (helyettesítsük be az $x = \frac{\pi}{2}$-t).

A $\frac{\pi}{2}a$ értékek, ha a egész szám az egységsugarú körvonal és koordinátatengelyek metszéspontjai, így a $\cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)$ csak 1, –1 vagy 0 lehet.

Mivel $\cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)$ csak 1, –1 vagy 0 értéket vehet fel, ha a egész szám, így a csak 0; 1; 2 lehet.

Ha $a = 0$ (és $b = 0$), akkor az (1) egyenlet $0(\cos x - 1) = \cos 0 - 1$ alakban írható fel, mely minden valós számra teljesül. Tehát az $(a; b) = (0; 0)$ számpár megfelel a feladat feltételeinek.

Ha $a = 1$ (és $b = 0$), akkor az (1) egyenlet $\cos x - 1 = \cos x - 1$ alakban írható fel, mely minden valós számra teljesül. Tehát az $(a; b) = (1; 0)$ számpár megfelel a feladat feltételeinek.

Ha $a = 2$ (és $b = 0$), akkor az (1) egyenlet $2(\cos x - 1) = \cos 2x - 1$ alakban írható fel, mely nem teljesül minden valós számra, például $x = \pi$ nem gyöke az adott egyenletnek (visszahelyettesítve hamis egyenlőséget kapunk $-4 = 0$). Tehát az $(a; b) = (2; 0)$ számpár nem felel meg a feladat feltételeinek.

Felelet: (0; 0), (1; 0). ◁

Mivel az a és b értékeket, úgy kaptuk meg, hogy az egyenletbe az x-nek csak három értékét helyettesítettük be, le kell ellenőrizni, hogy ezen a és b értékeknél az adott egyenletnek minden valós szám a gyöke, azaz az (1) egyenlet minden valós x-re teljesül. Ha $a = 2$ és $b = 0$, azt kapjuk, hogy $\cos 2x = 2\cos - 1$. Ha ez az egyenlőség teljesülne bármely valós x-re, akkor a kétszeresszög koszinuszára még egy azonosságunk létezne. De ilyen azonosság nem létezik, tehát meg tudunk nevezni olyan x értéket, melyre ez az egyenlőség nem teljesül.

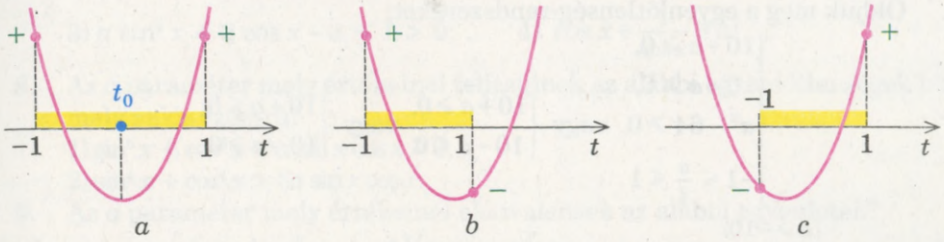
3. példa. Határozzuk meg az a paraméter azon értékeit, melynél a

$$\cos 2x + a \sin x - 9 = 0 \qquad (1)$$

egyenletnek vannak gyökei!

Magyarázat

Először alakítsuk át az egyenletet úgy, hogy csak egyféle szög egyféle trigonometrikus függvénye szerepeljen benne, majd alkalmazzuk a $\sin x = t$ helyettesítést. Figyelembe kell venni, hogy *a változócsere alkalmazása módosíthatja a feladat feltételeit*, a (2) egyenlet esetében ez azt jelenti: határozzuk meg az a paraméter azon értékeit, melyeknél az egyenletnek legalább egy gyöke van a [–1; 1] intervallumból (mert így a visszahelyettesítés után megoldható a $\sin x = t$ egyenlet, vagyis meghatározhatjuk az (1) egyenlet gyökeit). Ez három esetben lehetséges: ha a (2) egyenlet mindkét gyöke hozzátartozik ehhez az intervallumhoz, vagy a (2) egyenletnek csak egyik gyöke eleme a [–1; 1] intervallumnak, míg a másik tőle jobbra vagy balra van. Ábrázoljuk vázlatosan az $f(t) = 2t^2 - at + 8$ megfelelő eseteit (170. ábra). A rajzok alapján (vagy a 16. táblázat alapján) írjuk fel a (3) –(5) egyenlőtlenség-rendszereket, a gyökök helyeinek szükséges feltételeit. Ne felejtkezzünk el arról, hogy az $f(-1) = 0$ vagy az $f(1) = 0$ esetekre is teljesülnek a feladat feltételei.



170. ábra

A megoldás végén egyesíteni kell a kapott eredményeket.

Megjegyezzük, hogy a feladat úgy is megoldható, ha a (2) egyenlet gyökeit határozzuk meg: $t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 64}}{4}$, majd a $-1 \leqslant t_1 \leqslant 1$, $-1 \leqslant t_2 \leqslant 1$ egyenlőtlenségeket. Viszont a gyököt tartalmazó egyenlőtlenségek megoldása bonyolult.

Megoldás

▶ Az adott egyenlet ekvivalens az

$$1 - 2\sin^2 x + a\sin x - 9 = 0,$$

$2\sin^2 x + a\sin x + 8 = 0$ egyenlettel. Ez az egyenlet viszont a $\sin x = t$ változócserével a

$$2t^2 - at + 8 = 0 \qquad (2)$$

másodfokú egyenletre vezethető vissza.

Az (1) egyenletnek akkor, és csak akkor van megoldása, ha a (2) egyenletnek legalább egy gyöke van a $[-1; 1]$ intervallumból.

1) Ahhoz, hogy az $f(t) = 2t^2 - at + 8$ másodfokú polinom mind két gyöke az adott intervallumba essen, az alábbi feltételeknek kell teljesülni:

$$\begin{cases} f(-1) \geqslant 0, \\ f(1) \geqslant 0, \\ D \geqslant 0, \\ -1 \leqslant t_0 \leqslant 1. \end{cases} \qquad (3)$$

2) Ahhoz, hogy az $f(t)$ egyik gyöke hozzátartozzon a $[-1; 1]$ intervallumhoz, a másik gyöke pedig 1-től jobbra (vagy maga az 1) legyen, elegendő az alábbi feltételeknek teljesülni:

$$\begin{cases} f(-1) \geqslant 0, \\ f(1) \leqslant 0. \end{cases} \qquad (4)$$

3) Ahhoz, hogy az $f(t)$ egyik gyöke hozzátartozzon a $[-1; 1]$ intervallumhoz, a másik gyöke pedig -1-től balra legyen (vagy maga a -1), elegendő az alábbi feltételeknek teljesülni:

$$\begin{cases} f(-1) \leqslant 0, \\ f(1) \geqslant 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Oldjuk meg a egyenlőtlenség-rendszereket:

$$\begin{cases} 10+a \geqslant 0, \\ 10-a \geqslant 0, \\ a^2-64 \geqslant 0, \\ -1 \leqslant \frac{a}{4} \leqslant 1 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} 10+a \geqslant 0, \\ 10-a \leqslant 0 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} 10+a \leqslant 0, \\ 10-a \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\text{Tehát } \begin{cases} a \geqslant -10, \\ a \leqslant 10, \\ a \leqslant -8 \text{ vagy } a \geqslant 8, \\ -4 \leqslant a \leqslant 4 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} a \geqslant -10, \\ a \geqslant 10 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} a \leqslant -10, \\ a \leqslant 10. \end{cases}$$

Az első egyenlőtlenség-rendszernek nincs megoldása, a többi egyenlőtlenség-rendszerből pedig azt kapjuk, hogy

$$a \geqslant 10 \text{ vagy } a \leqslant -10.$$

Felelet: $a \in (-\infty; -10] \cup [10; +\infty)$. ◁

Gyakorlatok

Oldd meg az **(1–2.)** egyenleteket!

1. 1) $a \sin x = 1$; 2) $a \sin 2x = \cos x$;
3) $a \operatorname{tg} x = \sin x$; 4) $\operatorname{ctg} x = a \cos x$.

2. 1) $\cos 2x + 2 \sin x + a - 1 = 0$; 2) $\sin 3x - \sin 2x = a \sin x$;
3) $\frac{\operatorname{tg} ax}{\sin bx} = 0$; 4) $a \sin x + \operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos x}$.

3. Határozd meg az a paraméter azon értékeit, melyekre az alábbi egyenleteknek van megoldásuk:
1) $2 \sin x + 4 \cos x = a$; 2) $3 \sin x - 4 \cos x = b$;
3) $a \cos 2x - \sin x = 0$; 4) $\cos 2x + a \cos x = 0$;
5) $\arcsin^2 x + (3a - 3) \arcsin x + (a - 2)(5 - 4a) = 0$!

4. Az a paraméterek mely értékeinél lesz a

$$\cos^2 2x + (a - 3) \cos 2x = 0$$

egyenletnek pontosan 4 gyöke a $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ intervallumon?

5. Határozd meg azokat az $(a; b)$ számpárokat, melyeknél az

$$a(\cos 3x - 1) + b^2 - 2b = \cos(3ax + (b-1)^2) - 2$$

egyenlet megoldása a valós számok halmaza!

6. Határozd meg az a paraméter azon értékeit, melyeknél a

$$(4a + 2) \sin x + 2a \cos x + a + 1 = 0$$

egyenletnek pontosan egy gyöke van a $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$ intervallumon!

7. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:
1) $2 \sin x > a$; 2) $(5a - 7) \cos x < a + 5$;

3) $a\sin^2 x + 2\cos x - a + 1 > 0$; 4) $\cos x + \frac{1}{\cos x} \geqslant a$!

8. Az a paraméter mely értékeinél teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek bármely valós számra?

1) $\sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x \geqslant 0$;

2) $\sin^4 x + \cos^4 x > 3a\sin x\cos x$.

9. Az a paraméter mely értékeinél ekvivalensek az alábbi egyenletek?

1) $\sin x + \frac{1}{2} = 0$ és $\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{a}{2}\right) = 0$;

2) $\cos x - \frac{1}{2} = 0$ és $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x + \frac{a-2}{2}\right) = 0$;

3) $\sin 2x + a = \sin x + 2a\cos x$ és $2\cos 2x + a^2 = 5a\cos x - 2$.

10. Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:

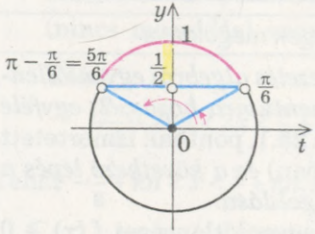
1) $\begin{cases}\cos x\cos y = a^2,\\ \sin x\sin y = 1.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\cos y = \sqrt{a},\\ \sin y\cos x = 1!\end{cases}$

30. §. TRIGONOMETRIKUS EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA

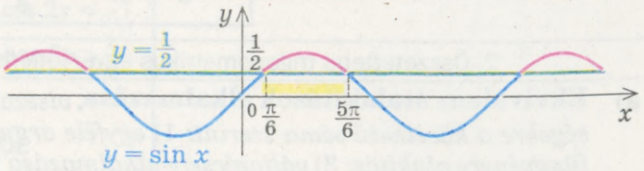
51. táblázat

Egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldása

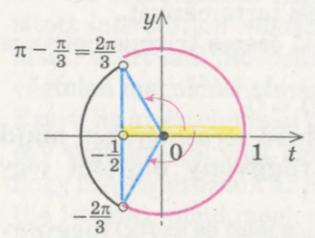
egységsugarú körvonalon

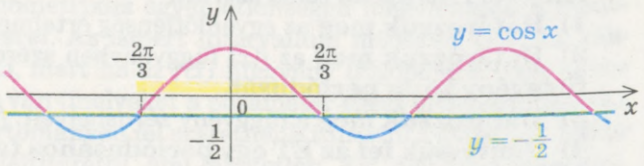


grafikusan



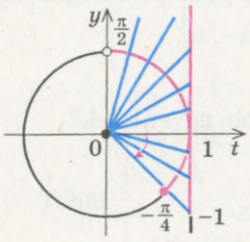
$$\sin x > \frac{1}{2} \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$$

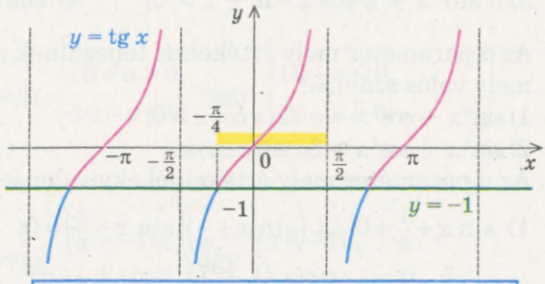




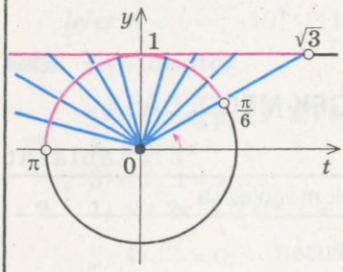
$$\cos x > -\frac{1}{2} \quad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$$

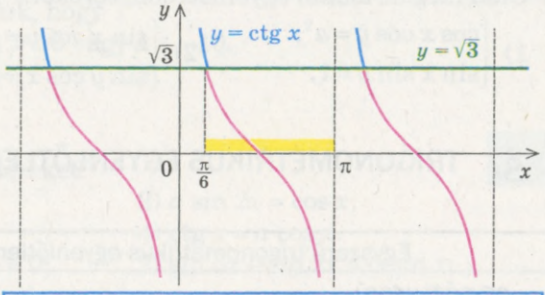
Az 51. táblázat folytatása





$\operatorname{tg} x \geqslant -1 \qquad -\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$





$\operatorname{ctg} x < \sqrt{3} \qquad \frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in Z$

2. Összetettebb trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldása

a) **Ekvivalens átalakítások alkalmazása,** *visszavezetés algebrai egyenlőtlenségekre a következő séma szerint:* 1) *egyféle argumentumra hozás;* 2) *egyféle függvényre alakítás;* 3) *változócsere alkalmazása* (a 25.1. pontban ismertetett trigonometrikus egyenletek megoldásához hasonlóan) *és a következő lépés a kapott egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenség megoldása.*

b) **Az intervallum módszer alkalmazása** (ha az egyenlőtlenséget $f(x) \gtrless 0$ rendeztük) az alábbi séma szerint:

1) Határozzuk meg az egyenlőtlenség értelmezési tartományát.

2) Határozzuk meg az $f(x)$ függvényben szereplő összes trigonometrikus **függvény** közös **periódusát.**

3) Határozzuk meg a függvény zérushelyeit: $f(x) = 0$.

4) Tüntessük fel az ÉT egy periódusához tartozó zérushelyeket, **majd határozzuk meg minden intervallumon a függvény előjelét** (egy perióduson belül).

5) Írjuk fel a megoldást, figyelembe véve a relációs jelet és az $f(x)$ függvény periódusát.

Magyarázat és indoklás

Összetettebb trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldásainak módszereit példákon szemléltetjük (az egyszerűbb trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldását a 27.§-ban tárgyaltuk).

1. példa. Oldjuk meg az $\frac{5}{4}\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 2x<\cos 2x$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

▶ $\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}(1-\cos^2 2x)<\cos 2x.$

Ezért

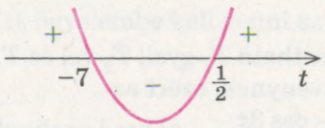
$2\cos^2 2x+13\cos 2x-7>0.$

A $\cos 2x=t$ változócserével a

$$2t^2+13t-7>0$$

egyenlőtlenségre jutunk, melynek a megoldása

$$t<-7 \text{ vagy } t>\frac{1}{2}.$$



Visszahelyettesítés után $\cos 2x<-7$ (nincs megoldás) vagy $\cos 2x>\frac{1}{2}$.

Ezért

$$-\frac{\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

Tehát $-\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$ ◁

Magyarázat

Alkalmazzunk ekvivalens átalakításokat. Vezessük vissza algebrai egyenlőtlenségekre az alábbi séma szerint:

1) azonos argumentumra hozzuk ($2x$);
2) egyfajta függvényre alakítjuk ($\cos 2x$);
3) változócserét alkalmazunk ($\cos 2x=t$).

Visszahelyettesítés után megoldjuk a kapott egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenségeket.

Az összetettebb trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldhatók a módosított *intervallum módszerével*. Az ismert intervallum módszert (4.§. 11. táblázat) azért kell módosítani, mert ha az $f(x)$ függvény trigonometrikus, akkor végtelen megoldáshalmaza van (melyeket a paraméter egész értékeire kapjuk). Ezért, ha az értelmezési tartományon fel szeretnénk tüntetni a gyököket, akkor egy végtelen halmazt kell feltüntetni, ami lehetetlen. Ezt úgy lehet elkerülni, hogy meghatározzuk az $f(x)$ függvényben szereplő függvények közös periódusát (ha létezik), majd meghatározzuk egy perióduson belül minden intervallumon a függvény előjelét.

Így az $f(x) \gtrless 0$ típusú **egyenlőtlenségek megoldásánál** az intervallum módszert az alábbi séma szerint alkalmazhatjuk:

1. **Határozzuk meg** az egyenlőtlenség értelmezési tartományát.
2. **Határozzuk meg** az $f(x)$ függvény periódusát **(ha létezik)**.
3. **Határozzuk meg** a függvény zérushelyeit: $f(x) = 0$.
4. **Tüntessük fel az ÉT egy periódusához tartozó zérushelyeket, majd határozzuk meg minden intervallumon a függvény előjelét** (egy perióduson belül).
5. **Írjuk fel a megoldást** (figyelembe véve a relációs jelet és az $f(x)$ függvény periódusát).

2. példa. Oldjuk meg a $\cos 2x \leqslant \cos 3x - \cos 4x$ egyenlőtlenséget!

▶ Oldjuk meg az egyenlőtlenséget intervallum módszerrel. Ehhez rendezzük az egyenlőtlenséget $f(x) \leqslant 0$ alakra:

$$\cos 2x + \cos 4x - \cos 3x \leqslant 0.$$

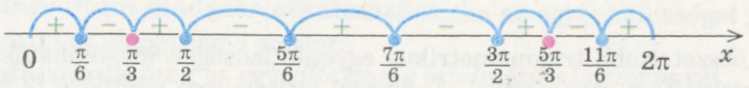
1. Értelmezési tartomány – bármely valós szám.
2. Mint ahogy már tudjuk, a koszinusz 2π szerint periodikus. Így a $\cos 2x$ függvény periódusa $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, a $\cos 3x$ periódusa pedig $T_2 = \frac{2\pi}{3}$ és a $\cos 4x$ periódusa $T_3 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

A 2π intervallum hossza maradék nélkül osztható T_1-gyel, T_2-vel és T_3-mal is. Így a 2π közös periódusa mind a három függvénynek, ezért az

$$f(x) = \cos 2x + \cos 4x - \cos 3x$$

függvény 2π szerint periodikus.

3. Meghatározzuk az $f(x)$ függvény zérushelyeit: $\cos 2x + \cos 4x - \cos 3x = 0$. Ebből $2\cos 3x \cos x - \cos 3x = 0$, $\cos 3x(2\cos x - 1) = 0$.
Innen $\cos 3x = 0$ vagy $2\cos x - 1 = 0$. Megoldva a kapott egyenleteket, az $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$ vagy az $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ gyököket kapjuk.
4. Jelöljük meg a kapott értékeket egy 2π hosszúságú intervallumon, például 0-tól 2π-ig, és 9 intervallumot kapunk (171. ábra)



171. ábra

Minden intervallumon határozzuk meg az $f(x)$ függvény előjelét. Ennek érdekében célszerű az $f(x)$ függvényt szorzatként felírni: $f(x) = \cos 3x\,(2\cos x - 1)$.

Feletet (a felírásánál vegyük figyelembe a függvény periodicitását):

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right],$$

$k \in \mathbf{Z}$. ◁

Megjegyzés. Ha a trigonometrikus egyenlőtlenséget az intervallum módszer alkalmazásával oldjuk meg, gyakran nagyon sok intervallumon kell meghatározni a függvény előjelét. Ahhoz, hogy csökkentsük a munka terjedelmét, figyeljük, melyik zérushely környezetében vált a függvény előjelet.

Abban az esetben, ha az $f(x)$ függvényt $\varphi(x) \cdot g(x)$ szorzatként írtuk fel, akkor vegyük figyelembe, hogy a szorzat előjele nem változik, ha mind a két tényező előjele (a $\varphi(x)$ és $g(x)$ függvényeké) is megváltozik.

A gyakorlatban ahhoz, hogy alkalmazni tudjuk ezt a tulajdonságot, minden zérushelyet külön színnel jelölünk (ahogy ez a 188. ábrán látható) vagy, ha csak két zérushely van, az egyiket a számegyenes felett, míg a másikat a számegyenes alatt jelöljük.

Ha egy függvénynek nincsenek többszörös gyökei, akkor minden zérushely környezetében a függvény előjelet vált (azzal a feltétellel, hogy csak egyik szorzótényező vált előjelet). Ebben az esetben elegendő egy intervallumon meghatározni az előjelet, és a többinél váltakozva kitenni. Ha vannak többszörös gyökök, akkor ezen gyökök környezetében nem biztos, hogy a függvény előjelet vált. Ezt figyelembe kell venni az előjelek kitevésekor.

Ellenőrző kérdés

Milyen módszerekkel lehet megoldani az összetettebb trigonometrikus egyenlőtlenségeket? Hozz fel példákat!

Gyakorlatok

Oldd meg az (**1–6.**) egyenlőtlenségeket!

1. 1) $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > \sqrt{3}$; 2) $\sin 4x - \cos 4x \operatorname{ctg} 2x < \sqrt{3}$.

2. 1) $\sin x > \cos^2 x$; 2) $\cos^2 x - \sin^2 x > \sin 2x$.

3. 1) $\cos 2x + 5 \cos x + 3 \geqslant 0$; 2) $\sin x < \cos x$.

4. 1) $\cos 2x + \cos 6x > 1 + \cos 8x$; 2) $\sin x \sin 7x > \sin 3x \sin 5x$.

5. 1) $\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$; 2) $\sin x > \sqrt{1 - \sin 2x}$.

6. 1) $\sin 9x - \sin 5x + 2 \sin^2 x < 2 \sin 2x + 1 - \cos 2x$;

2) $2 \sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.

7. Határozd meg a $\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x$ egyenlőtlenség azon gyökeit, melyekre teljesül az $|x| < \pi$ feltétel!

8. Határozd meg azokat az x értékeket a $0 \leqslant x \leqslant \pi$ intervallumból, melyekre teljesül a

$$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2}\sin x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

egyenlőtlenség!

9. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $\sin 4x > a\,(\sin 3x - \sin x)$; 2) $a\,(\cos x - \sin x)^2 + b\cos^2 x \geqslant 0$!

KIEGÉSZÍTŐ GYAKORLATOK A 4. FEJEZETHEZ

Oldd meg az (**1–8.**) egyenleteket!

1. 1) $\sin^2 x - 4\sin x = 5$; 2) $\cos^2 x + 5\cos x = 6$;

3) $4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$; 4) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$.

2. 1) $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 0$; 2) $\sin x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 0$;

3) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$; 4) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 0$.

3. 1) $1 + \cos x - 2\cos\frac{x}{2} = 0$; 2) $1 - \cos x - 2\sin\frac{x}{2} = 0$;

3) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$; 4) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

4. 1) $\cos^2 x - 3\cos x \sin x + 1 = 0$; 2) $\sin^2 x + 3\cos x \sin x + 1 = 0$;

3) $2 + \cos^2 x = 2\sin x$; 4) $3 - 3\cos x = 2\sin^2 x$.

5. 1) $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$; 2) $(1 - \cos 4x)\cos 2x = \sin^2 2x$;

3) $5\sin^2 x + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 4$; 4) $6\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 7$.

6. 1) $1 - \cos x - \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} = 0$; 2) $1 + \cos x + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 0$;

3) $\cos^2 4x + 3\sin^2 2x - 1 = 0$; 4) $\cos^2 4x + 3\cos^2 2x - 1 = 0$.

7. 1) $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)$; 2) $\sin 3x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

3) $1 - \cos 4x = \sin 2x$; 4) $1 + \cos 4x = \cos 2x$.

8. 1) $1 - \cos(\pi + x) - \sin\frac{3\pi + x}{2} = 0$; 2) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) + 5\sin(\pi - x) + 3 = 0$;

3) $2\cos^2(2\pi + x) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2$; 4) $5\sin^2(1{,}5\pi - x) + 2\sin^2(\pi - x) = 2$.

Határozd meg a (**9–10.**) egyenletek gyökei közül azokat, melyek a megadott intervallumba esnek!

9. 1) $\sin x + \cos x = 1$ a $(-2\pi; 0)$ intervallumban;

2) $\sin x - \cos x = 1$ a $(0; 2\pi)$ intervallumban;

3) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$ a $[0; 90°]$ intervallumban;

4) $-\sin^2 x + \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$ a $[180°; 270°]$ intervallumban.

10. 1) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2$ a $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ intervallumban;

2) $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \sin\frac{x}{2}$ a $[\pi; 2\pi]$ intervallumban;

3) $4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$ a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban;

4) $4 \cos x \cos 2x \sin 3x = \sin 2x$ a $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ intervallumban.

Oldd meg a (**11–26.**) egyenleteket!

11. 1) $\sin 6x - 2 \sin 2x = 0$;

2) $\cos 6x + 2 \cos 2x = 0$;

3) $\cos^2\frac{x}{2} + \cos 3x = \sin^2\frac{x}{2} - \cos x$;

4) $\sin^2 x + \sin 3x = \cos^2 x + \sin x$.

12. 1) $4 \cos^2 x - \sin 2x = 1$;

2) $3 \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x = 2$;

3) $\sin^2 x + 14 \sin x \cos x = 15 \cos^2 x$;

4) $\cos^2 x - 12 \cos x \sin x = 13 \sin^2 x$.

13. 1) $\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x} = 0$;

2) $\frac{\sin x - \sin 3x}{1-\cos x} = 0$;

3) $\frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x}{1-\cos x} = 0$;

4) $\frac{3 \cos^2 x - 4 \cos x}{1+\sin x} = 0$.

14. 1) $\frac{\cos x + \cos 3x}{1+\sin x} = 0$;

2) $\frac{\sin x - \sin 3x}{1+\cos x} = 0$;

3) $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = 0$;

4) $\frac{\sin 2x}{1-\sin 2x} = 0$.

15. 1) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$;

2) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$;

3) $\sin^2 x = \sin^2 3x$;

4) $\cos^2 x = \cos^2 3x$.

16. 1) $\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg} 2x$;

2) $\frac{\cos 2x - \sin 4x}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} 2x$;

3) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$;

4) $\sqrt{1-\cos x} = \sin x$.

17. 1) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$;

2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2 \cos 3x$;

4) $\cos 5x + \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 9x\right) - \sqrt{3} \sin 2x = 0$.

18. 1) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$;

2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

3) $5 \sin 2x - 11 (\sin x + \cos x) + 7 = 0$;

4) $\sin 2z + 5 (\sin z + \cos z) + 1 = 0$.

19. 1) $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + 0{,}375 = 0$;

2) $\cos^3 z \cos 3z + \sin^3 z \sin 3z = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

3) $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{8}$;

4) $8 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 1 = 0$.

20. 1) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$; 2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;

3) $\cos 3x = 1 - \sqrt{3} \sin 3x$; 4) $3 \sin x + 5 \cos x = 4$.

21. 1) $\sqrt{1 + 4 \sin x \cos x} = \cos x - \sin x$; 2) $\sqrt{\cos 2x - \sin 4x} = \sin x - \cos x$;

3) $\frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 2x} + \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 4x} + \frac{5}{2} = 0$; 4) $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} + 2 = 0$.

22. 1) $\arcsin(x + 2{,}5) = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin\left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{\pi}{6}$;

3) $(x^2 - 4) \arcsin x = 0$; 4) $\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \arccos x = 0$.

23. 1) $\arccos(\sin x) = \frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) - \frac{x}{4} = \frac{\pi}{2}$;

3) $\arcsin(3 - 2x) = -\frac{\pi}{4}$; 4) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$.

24. 1) $\arcsin x \cdot \arccos x = \frac{\pi^2}{18}$; 2) $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi^2}{16}$;

3) $3 \arcsin x - \pi = 0$; 4) $4 \operatorname{arctg} x - 6\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \pi$.

25. 1) $(\arcsin x)^2 - 4 \arcsin x = 0$; 2) $(\arccos x)^2 - 5 \arccos x = 0$;

3) $\operatorname{arctg}(1 + x) + \operatorname{arctg}(1 - x) = \frac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin(1 - x) - 2 \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

26. 1) $\sqrt{\operatorname{tg} x} = -2 \sin x$; 2) $\sqrt{-\operatorname{tg} x} = \sqrt{2} \cos x$;

3) $\sqrt{\cos x} = -\sin x$; 4) $\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{2} \sin x$.

27. Határozd meg az összes olyan x és y értéket, melyre teljesülnek az alábbi egyenletek:

1) $12 \sin x + 5 \cos x = 2y^2 - 8y + 21$; 2) $3 \cos x - 4 \sin x = 2y^2 - 4y + 7$;

3) $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5$; 4) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 2y^2 - 4y + 3$!

Oldd meg a (**28–36.**) egyenlőtlenségeket!

28. 1) $\cos^2 x > \frac{1}{4}$; 2) $\sin^2 x < \frac{1}{4}$;

3) $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x - 3 > 0$; 4) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 \geqslant 0$.

29. 1) $\frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{\cos x-1}>0$; 2) $\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{\sin x-1}>0$;

3) $\cos^3 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x>\frac{5}{8}$; 4) $\cos^3 x\sin 3x+\cos 3x\sin^3 x<\frac{3}{8}$.

30. 1) $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}>\frac{1}{2}$; 2) $\sin^6 x+\cos^6 x>\frac{5}{8}$;

3) $\sin x+\sqrt{3}\cos x>1$; 4) $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x>1$.

31. 1) $\operatorname{tg}^2 x+(2-\sqrt{3})\operatorname{tg} x-2\sqrt{3}<0$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+\sqrt{3}>0$;

3) $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x\geqslant 0$; 4) $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x\leqslant 0$.

32. 1) $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 3x<-1$; 2) $\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} 3x>-1$;

3) $3\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x\leqslant 0$;

4) $2\cos^2 x+(2\sqrt{3}-1)\cos x\sin x-\sqrt{3}\sin^2 x\geqslant 0$.

33. 1) $\frac{\sin 3x\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x}\leqslant 0$; 2) $\cos x\cos 2x\cos 3x\leqslant 0$;

3) $(3\sqrt{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x-2-\sqrt{3})(2\sin 2x-1)\geqslant 0$;

4) $\cos 2x+2\sin 2x\geqslant 2\sqrt{2}\cos x$;

34. 1) $3\sin 2x-1>\sin x+\cos x$; 2) $\cos 2x\leqslant\sqrt{2}(\cos x-\sin x)$;

3) $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}<0$; 4) $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin 2x}\geqslant\frac{1}{\sin 3x}$.

35. 1) $2\arccos x>\arcsin x$; 2) $2\arcsin x>\arccos x$;

3) $2(\arcsin x)^2-3\arcsin x+1>0$;

4) $(\arccos x)^2-6\arccos x+8<0$.

36. 1) $\sin(2x+10^\circ)+\sin(x+10^\circ)-\sin x<0$;

2) $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0$;

3) $(\operatorname{arctg} x)^3+(\operatorname{arcctg} x)^3>\frac{\pi^3}{32}$;

4) $\operatorname{arctg}(3x^2-3x+1)<\operatorname{arcctg}(3x^2-3x+1)$.

37. Határozd meg az alábbi függvények értékkészletét:

1) $y=\frac{3}{\pi}\arccos\left(\sqrt{0{,}125}(\cos x-\sin x)\right)$;

2) $y=\frac{9}{\pi}\arcsin\left(\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}\right)$!

38. Határozd meg az $y=\sin 2x$ függvény értékkészletét, ha:

1) $x\in[\operatorname{arctg} 0{,}5;\ \operatorname{arctg} 3]$; 2) $x\in\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{3};\ \operatorname{arctg} 2\right]$;

3) $x\in\left[\arccos 0{,}8;\ \frac{5\pi}{12}\right]$; 4) $x\in\left[\arccos\frac{5}{13};\ \frac{5\pi}{12}\right]$!

39. Oldd meg az egyenleteket:
1) $7 \operatorname{tg} x + \cos^2 x + 3 \sin 2x = 1$; 2) $\sin 2x + 1 = \sin^2 x + 6 \operatorname{ctg} x$!

40. Az a mely értékeinél lesz egyenlő eggyel a $2 + \cos x(5 \cos x + a \sin x)$ kifejezés az x legalább egy értékénél?

41. Az a mely értékeinél lesz egyenlő (-1)-gyel a $3 + \sin x(2 \sin x + a \cos x)$ kifejezés az x legalább egy értékénél?

MATEMATIKATÖRTÉNETI ADALÉKOK

A matematika ukrán művelői

A matematika történetének minden korszaka gazdag érdekes sorsú ismert tudósokban. Volt, akinek sikerült még életében hírnevet és ismertséget szereznie, másoknak azonban nehéz életutat kellett bejárniuk, gyakran osztoztak népük tragikus sorsában. Ebben a fejezetben megismerkedhetsz néhány Ukrajnából származó matematikus rövid életrajzával, olyanokéval, akik jelentősen hozzájárultak az egyetemes és az európai tudomány fejlődéséhez.

Mihajlo Osztrogradszkij



Mihajlo Osztrogradszkij (1801–1862)

Osztrogradszkij számos tételét és szabályát tanítják a matematikában. A világ minden matematikusa hallott már Osztrogradszkij integrációs módszeréről, az Osztrogradszkij-tételről vagy az Osztrogradszkij-féle képletről.

Mihajlo Osztrogradszkij kisnemesi családban született a poltavai kormányzóság Kobeljacki kerületéhez tartozó Pasenna faluban (ma Poltava megye Kozelscsinszki járása). Az Osztrogradszkij család felmenői a kozák sztarsinákhoz tartoztak, a családfa a szóbeszédek alapján az ismert volhíniai államférfiaktól, a felvilágosult Osztrozsszkij fejedelmektől eredeztethető; innen származik az Osztrogradszkij név is. Mihajlo Osztrogradszkij a poltavai gimnáziumban kezdte, majd az akkoriban megnyílt Harkivi Egyetemen folytatta a tanulmányait. Az egyetem elvégzését követően 1822-ben Párizsba utazott. A francia fővárosban a matematika olyan korifeusainak az előadásaira járt, mint Laplace, Poisson, Ampere, Fourier, Sturm vagy Cauchy. 1826-ban Augustin Cauchy az egyik tudományos értekezésében elismerően írt a fiatal Osztrogradszkij sikereiről. Ez a vélemény akkoriban többet ért bármilyen diplománál. Amikor tehát visszatért Pétervárra, híre megelőzte és az első oroszországi matematikusként vált ismertté.

Tudományos munkásságának közel 40 esztendeje alatt Mihajlo Osztrogradszkij körülbelül 50, a matematika és a mechanika különböző területeit érintő munkát adott ki. Osztrogradszkijt megválasztották a Párizsi Tudományos Akadémia külső tagjává, emellett tagja volt az orosz, a torinói, a római és az amerikai akadémiának, számos tudományos társaság tiszteletbeli tagjának is vallhatta magát. Szülőfalujában temették el. A Poltavai Tanárképző Főiskolán múzeumot nyitottak tiszteletére. Az UNESCO feltüntette a kiemelkedő események és évfordulók naptárában az ismert ukrán matematikus születésének 200. évfordulóját.

Heorhij Voronij

Heorhij Voronijt a szakma a XIX–XX. század fordulójának egyik legtehetségesebb, számelmélettel foglalkozó matematikusának ismeri el, bár életében mindössze tizenkét cikket publikált. Ám ezek nem akármilyen értekezések voltak! Munkái újabb lökést adtak az analitikus számelmélet, az algebrai számelmélet, a geometriai számelmélet területét érintő legújabb irányzatoknak, amelyek ma már számos országban széleskörűen elterjedtek.



Heorhij Voronij
(1868–1908)

Voronij a Poltava megyei Zsuravkában született (napjainkban ez a falu Csernyihiv megye Varvinszki járásában található). Nagyapja vándorkereskedő volt, miután kisebb földterülethez jutott az Udaj folyócska mentén, földműveléssel kezdett foglalkozni. Édesapja a tudományos pályát választotta, elvégezte a Kijevi Egyetemet, a fia pedig a Pétervári Egyetem fizika-matematika karát. A magiszteri disszertáció megvédését követően, 1894-ben kinevezték a Varsói Egyetem professzorává.

Az egyik barátjának a következőket mesélte: „...csak a feleségem tudja, hogy a matematika számomra maga az élet, ez a mindenem."



Mihajlo Kravcsuk
(1892–1942)

Mihajlo Kravcsuk

Mihajlo Kravcsuk több mint 180 mű szerzője. Közöttük van 10 olyan kötet, amely a matematika különböző fejezeteivel foglalkozik. Ezek a munkák a tudományok tárházát gyarapítják. Napjainkban is számos kutatásban alkalmazzák a Kravcsuk-polinom és -nyomaték fogalmát vagy a Kravcsuk-oszcillográfot.

Mihajlo Kravcsuk széles látókörű matematikus volt. Neve jól cseng az egyetemes matematika világában. Csu-

pán azt nem tudták róla, hogy ukrán. Sokáig a honfitársai sem hallottak erről a kivételes tehetségű emberről. Kravcsukot ugyanis a „nép ellenségének" nyilvánították, és ereje teljében, új elképzelésekkel a tarsolyában Kolimába száműzték, ahol ötvenedik évében elhunyt. 1992-ben, a feledés hosszú éveit követően Ukrajna és a világ tudományos körei méltóan megemlékeztek a kiváló matematikus születésének 100. évfordulójáról. Az UNESCO feltüntette Kravcsukot az elismert tudományos személyiségek nemzetközi évforduló-naptárában.

Mihajlo Kravcsuk földmérő mérnök gyermekeként látta meg a napvilágot 1892-ben a volhíniai Csovniciben. Az elemi iskolát a szülőfalujában végezte. Mihajlo Kravcsuk aranyéremmel fejezte be a gimnáziumot 1910-ben. Ugyanabban az évben felvették a Kijevi Szent Volodimir Egyetem fizika-matematika karára. Itt szerzett első fokozatú diplomát 1914-ben és ezt követően az egyetemen folytatta pályáját. Matematikát tanított Kijev egyetemein és középiskoláiban.

Mihajlo Kravcsuk kivételes műveltségű ember volt. Jelentős szerepe van az ukrán tudományos terminológia kialakításában és a matematika nyelvének terjesztésében. Kravcsuk azokhoz a tudósokhoz tartozott, akiknek a munkái új utakat nyitottak a tudomány fejlődésében és vázolták a továbblépés lehetőségeit is.

„Szerelmem Ukrajna és a matematika" – ezek a szavak vannak felvésve Kravcsuk gránitból készült síremlékére, amelyet 2003-ban állítottak fel a Kijevi Műszaki Egyetem múzeuma előtt.

Miron Zarickij



Miron Zarickij (1889–1961)

Miron Zarickij tudományos érdeklődése elsősorban a halmazelméletre és a logikai algebrára, valamint a valós változójú függvényelméletre terjedt ki.

Miron Zarickij Ternopil megyében született papi családban. A Lembergi Egyetemen matematikát és fizikát tanult. Az egyetem elvégzése után gimnáziumokban tanított.

1925-ben Zarickij Lembergbe költözött, itt folytatta tudományos pályáját. Abban az időben Galícia ukrán tudósai elsősorban a Sevcsenko Tudományos Társaság köré tömörültek, ahol 1927-ben Zarickij tényleges tagságot nyert.

Ezt az időszakot a Lembergi Egyetemen, a Lembergi Műszaki Főiskolán és az Ungvári Egyetemen végzett fárasztó, de érdekes munka követte. Érdemes felidézni az ismert matematikus, Sztefan Banah szavait Zarickijról: „Nem ismerek senki mást, aki ennyire logikusan és lakonikusan tudná előadni a matematikai analízist." Kedvelte a természettudományokat, a világirodalmat és a filozófiát is. A tudományra elsősorban úgy tekintett, mint az igazság és a szépség hordozójára, amely az embert a szellemi fejlődés újabb fokaira emeli. Nem véletlenül nevezték Zarickij professzort a „szabályok költőjének".

Volodimir Levickij



Volodimir Levickij (1872–1956)

Népünk matematikai műveltségének letéteményese – így jellemezte Volodimir Levickijt Mihajlo Kravcsuk. Erre minden alapja megvolt. Hiszen éppen Levickij professzor volt az, aki először jelentetett meg ukrán nyelven matematikai tárgyú írást, ő volt az első ukrán természettudományi évkönyv pótolhatatlan szerkesztője, aki maga köré gyűjtötte az ukrán matematikusokat a tudományos munka kiteljesedése érdekében. Levickij hatalmas érdemeket szerzett azzal, hogy összegyűjtötte és rendszerezte az ukrán nyelvű matematikai szakkifejezéseket tartalmazó anyagokat. Tudományos tevékenységének fő területe az analitikus függvények elmélete volt. De foglalkozott emellett a mértannal, az algebrával, a differenciálegyenletekkel és matematikatörténettel is. Sok figyelmet szentelt az elméleti fizikának és -csillagászatnak.

Volodimir Levickij Ternopilban született egy ősi papcsalád sarjaként. 1890-ben a Lembergi Egyetem Filozófiai Karának hallgatója lett, majd 1893-ban a Sevcsenko Tudományos Társaság matematika-természettudományi-orvosi szekciójának tagja.

A Lvivi Egyetemen professzori címet szerzett. Volodimir Levickij majdnem 100 tudományos-ismeretterjesztő cikket írt és fordítást adott közzé. Levickij szinte teljes tudományos munkássága és társadalmi szerepvállalása a Sevcsenko Tudományos Társasághoz köthető.

MELLÉKLET

1. táblázat

<table>
<tr><th colspan="2">1. Egyenletrendszerek</th></tr>
<tr><th>Egyenletrendszerek és megoldásaik</th><th>Példák</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Egyenletrendszer megoldásáról akkor beszélünk, ha meg kell határozni két (vagy több) egy- vagy többismeretlenes egyenlet közös megoldását. Az egyenletrendszereket kapcsos zárójel segítségével írjuk fel.
Az egyenletrendszer megoldásának nevezzük a változó azon értékét vagy (több változó esetén) a változók azon rendezett szám-n-eseit, amelyek a rendszer minden egyenletét kielégítik.
Az egyenletrendszert megoldani annyit jelent, mint meghatározni az összes gyökét vagy bebizonyítani, hogy nincs megoldása.
Ha az egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor ellentmondásosnak nevezzük.</td><td>$\begin{cases} x-y=4, \\ 2x+y=11 \end{cases}$ két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer.
A (5; 1) számpár, azaz $\begin{cases} x=5, \\ y=1 \end{cases}$ az egyenletrendszer megoldása.</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} x^2-y+z=0, \\ xy+xz+yz=19, \\ x+y-z=2 \end{cases}$ három egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer.
A (1; 4; 3) számhármas, azaz $\begin{cases} x=1, \\ y=4, \\ z=3 \end{cases}$ az egyenletrendszer egyik megoldása.</td></tr>
<tr><th colspan="2">2. Ekvivalens egyenletrendszerek</th></tr>
<tr><td>Két egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk egy adott halmazon, ha ezen a halmazon azonos megoldásokkal rendelkeznek (vagyis az első egyenletrendszer mindegyik megoldása a második egyenletrendszernek is megoldása és fordítva).
Ha az adott rendszer egyenleteinek sorrendjét felcseréljük, akkor az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert kapunk.
Ha az egyenletrendszer egyik egyenletét egy másik, vele egyenértékűre cseréljük, akkor az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert kapunk.</td><td>Az egyenletrendszer megengedett értékeinek halmazát a rendszert alkotó függvények értelmezési tartományának közös része adja.
Az egyenletrendszer minden ekvivalens átalakítása csak az eredeti rendszer megengedett értékeinek halmazán történhet.</td></tr>
</table>

Az 1. táblázat folytatása

3. Az egyenletrendszer megoldásának módszerei

Behelyettesítő módszer

Az egyenletrendszer valamelyik egyenletéből kifejezzük az egyik ismeretlent, és a kapott kifejezést behelyettesítjük a másik egyenlet vagy egyenletek megfelelő változójának helyére (majd a kapott egyenletet vagy egyenletrendszert megoldjuk, és a kapott érték segítségével kiszámítjuk a többi ismeretlen értékét is).

Példa. Oldjuk meg az egyenletrendszert: $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3! \end{cases}$

Megoldás. Az első egyenletből kifejezzük az y-t: $y = 2x - 3$. A második egyenletbe ezt az y helyébe helyettesítjük. Azt kapjuk, hogy: $x + 2x - 3 = 3$. Innen $x = 2$.

Akkor $y = 2x - 3 = 1$.

Felelet: (2; 1).

Egyenlő együtthatók módszere

Ha az egyenletrendszer első egyenletét megszorozzuk egy $\alpha \neq 0$ számmal, a másodikat pedig egy $\beta \neq 0$ számmal, akkor az eredeti egyenletrendszerrel ekvivalens egyenletet kapunk. Arra törekszünk, hogy az egyik ismeretlen együtthatója a két egyenletben egymásnak ellentettje legyen.

Példa. Oldjuk meg az egyenletrendszert: $\begin{cases} 5x - 3y = 9, & \vert \cdot 2 \\ 3x + 2y = 13. & \vert \cdot 3 \end{cases}$!

Megoldás. Szorozzuk az első egyenlet mindkét oldalát 2-vel, a második egyenletet pedig 3-mal (arra törekszünk, hogy az y változó együtthatója a két egyenletben egymásnak ellentettje legyen), majd a két egyenletet összeadjuk. A kapott egyenletből meghatározzuk az x értékét, majd az egyik eredeti egyenletből kiszámítjuk a másik (y) ismeretlen értékét.

$$\begin{cases} 10x - 6y = 18, \\ 9x + 6y = 39. \end{cases} \quad \vert + \qquad 19x = 57, \quad x = 3.$$

Akkor $3 \cdot 3 + 2y = 13$, $2y = 4$, $y = 2$.

Felelet: (3; 2).

Az 1. táblázat folytatása

4. Kétismeretlenes egyenletrendszer grafikus megoldása

Az eredeti egyenletrendszert ekvivalens átalakításokkal olyan rendszerré alakítjuk, hogy a benne szereplő egyenletek grafikonjai könnyen megszerkeszthetők legyenek. Utána közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk a két függvényt, majd leolvassuk az egyenesek metszéspontjainak koordinátáit. Ezek a koordináták (jelen esetben számpárok) adják az egyenletrendszer megoldását.

Példák

1. Oldjuk meg az egyenletrendszert $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3! \end{cases}$

Megoldás. Az adott egyenletrendszer ekvivalens a következővel: $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = 3 - x. \end{cases}$

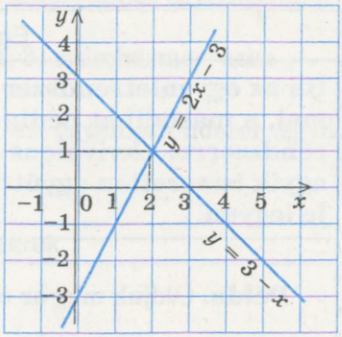
Mindkét egyenlet grafikonja egyenes.
Megrajzolásához elegendő két pontot meghatároznunk.
Ha például

$y = 2x - 3$:

x	0	1
y	–3	–1

$y = 3 - x$:

x	0	1
y	3	2



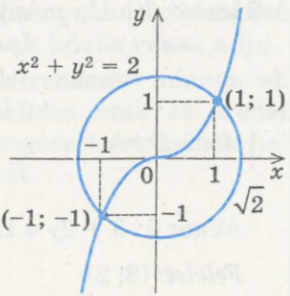
A grafikonok egy pontban metszik egymást M (2; 1) (1. ábra). Tehát a (2; 1) számpár az adott egyenletrendszer egyetlen megoldása.
Felelet: (2; 1).

2. Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenletrendszert: $\begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ x^3 - y = 0! \end{cases}$

Megoldás. Az adott rendszer ekvivalens a következő egyenletrendszerrel $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^3. \end{cases}$

Az első egyenlet grafikonja egy olyan kör, amelynek középpontja az origó, sugara pedig $\sqrt{2}$. A második egyenlet grafikonja egy harmadfokú parabola $y = x^3$ (2. ábra).

A grafikonok két pontban metszik egymást. Metszéspontjaik koordinátái: (–1; –1) és (1; 1).
Felelet: (–1; –1), (1; 1) az egyenletrendszer megoldása.



A függvényérték meghatározása

2. táblázat

	A függvény típusa	A függvényérték meghatározásakor tett kikötések	
1	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	*A tört nevezője nem egyenlő nullával.*
2	$y = \sqrt[2k]{f(x)}$ $(k \in N)$	$f(x) \geqslant 0$	*Páros kitevőjű gyökjel alatt csak nemnegatív kifejezés állhat.*
3	$y = \operatorname{tg}(f(x))$	$f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $(k \in Z)$	*A tangens jele után álló kifejezés csak* $\frac{\pi}{2} + \pi k$*-tól eltérő értékeket vehet fel, ahol k egész szám.*
4	$y = \operatorname{ctg}(f(x))$	$f(x) \neq \pi k$, $k \in Z$	*A kotangens jele után álló kifejezés csak* πk*-tól, eltérő értékeket vehet fel, ahol k egész szám.*
5	$y = \arcsin(f(x))$	$\lvert f(x) \rvert \leqslant 1$, azaz $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$	*Az árkuszszinusz és árkuszkoszinusz után csak olyan kifejezés állhat, amelynek abszolút értéke kisebb vagy egyenlő nullával.*
6	$y = \arccos(f(x))$		
7	$y = x^{\alpha}$		
	a) α *természetes szám*	x **tetszőleges szám**	
	b) α *negatív egész szám vagy nulla*	$x \neq 0$	
	c) α *pozitív nem egész szám*	$x \geqslant 0$	
	d) α *negatív nem egész szám*	$x > 0$	

FELELETEK ÉS ÚTMUTATÁSOK

1. fejezet

1. §. 1.1. 13. 34. **14.** 80 %. **1.2. 5.** 1) $-1\frac{2}{3}$; 1; 2) – 1; 2; 3) 0; ±2; 4; 4) – 5,5; –0,5; ±2,5. **6.** 1) [3; 4]; 2) $(-\infty;-4)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; 3) $(-\infty;-0{,}5]\cup[1{,}5;+\infty)$; 4) (– 5,5; – 3,5) ∪ (0;2). **2. §. 2.1. 1.** 1) 2,5; –2; $3\frac{1}{3}$; $a+\frac{1}{a}$; 2) –3; –2; 1; b^2-3; 3) 1; 2; 0; $\sqrt{m+1}$. **2.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) [–3; +∞); 3) $x\neq -1$; 4) $\boldsymbol{R}$; 5) $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$; 7) [1; 5]; 8) [–3; 0) ∪ (0; +∞); 9) [–3; 3) ∪ (3; +∞); 10) $(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup[1;+\infty)$; 11) [0; 2) ∪ (2; +∞); 12) $\boldsymbol{R}$. **3.** 1) {5}; 2) $\boldsymbol{R}$; 3) [0; +∞); 4) [0; +∞); 5) $\boldsymbol{R}$; 6) [–5; +∞); 7) [3; +∞). **4.** a) $D(f)=[-3;5]$; $E(f)=[-3;2]$; növekszik: [–2; 3]; csökken: [–3; –2] és [3; 5]; $f(1)=0$; b) $D(f)=[0;6]$; $E(f)=[0;4]$; növekszik: [0; 2] és [5; 6]; csökken: [2; 5]; $f(1)=2$. **10.** 1) Növekvő; 2) csökkenő; 3) növekvő; 4) csökkenő. **11.** 2) 4. **2.2. 1.** 3) Páros; 4) páratlan; 5) páros és páratlan; 6) páratlan. **2.** 1) $k>0$, $b>0$; 2) $k<0$, $b<0$; 3) $k>0$, $b<0$. **6.** 1) $a<0$, $b>0$, $c>0$; 2) $a>0$, $b<0$, $c<0$; 3) $a<0$, $b>0$, $c<0$; 4) $a>0$, $b<0$, $c>0$. **2.4.** 1) $y=\frac{1}{3}x+2$, $D=\boldsymbol{R}$, $E=\boldsymbol{R}$; 2) $y=-\frac{1}{3}x-2$, $D=\boldsymbol{R}$, $E=\boldsymbol{R}$; 3) $y=\frac{2}{x}$, D: $x\neq 0$, E: $y\neq 0$; 4) $y=-\frac{1}{x}$, D: $x\neq 0$, E: $y\neq 0$; 5) $y=x^2$, $D=[0;+\infty)$, $E=[0;+\infty)$. **3.** 1) $y=2\sqrt{x}$; 2) $y=-2\sqrt{x}$; 3) $y=\sqrt{x}+2$; 4) $y=-\sqrt{x+2}$. **3. §. 3.1. 2.** 1) a) Igen; b) igen; 2) a) igen; b) nem. **6.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem; 4) igen; 5) nem. **7.** 1) $3\frac{2}{3}$; 2) –4; 3) –4; 4) –3; $\frac{2}{3}$. **8.** 1) Nincs gyöke; 2) 2; 3) $-\sqrt{2}$; 4) nincs gyöke. **9.** 1) $x\neq 1{,}5$ (a gyök létezésének feltétele); 2) $x\geqslant 0$. **11.** 1) 7; 2) 0; 4,5; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{1}{3}$. **3.2. 1.** 1) 2; 2) 3; 3) (1; 0). **2.** 1) 0; 2) 0; 3) –1; 4) 0,5. **3.** 1) 3; 2) (–2; 5); 3) (3; 1); 4) nincs gyöke; 5) (2; 1); 6) (–1; 2; –3). **4.** 1) 6; 2) 1; 3) 0; 4) 6; 5) 2; 6) 1. **5.** 1) (–5; –5); (2; 2); 2) (–2; –2); 3) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 4) (–2; –2). **4. §. 1.** 1) $(-\infty;-2]\cup(1;2]\cup(4;+\infty)$; 2) $(-\infty;-2)\cup(3;8)$; 3) (4; 5]; 4) [–10; –2) ∪ (4; +∞). **2.** 1) [–2; –1] ∪ [1; 2]; 2) $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$; 3) $(-\infty;-3]\cup(0;3]$; 4) (–6; 2). **3.** 1) $(-2;2)\cup[4;+\infty)$; 2) (–2; –1) vagy 1; 3) $(-\infty;0)\cup[2;3]$; 4) $(-\infty;-1)\cup[4;+\infty)$. **7. §. 7.1. 1.** 1) $a=4$, $b=5$, $c=0$, $d=1$; 2) $a=2$, $b=0$, $c=1$, $d=2$. **2.** $a=0$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{2}$. **5.** $a=1$, $b=2$. **6.** $a=\frac{6}{11}$, $b=-\frac{10}{11}$. **7.2. 1.** 1) $3x^2+x+4$;

2) $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$; 3) $x^3 - 2x^2 + 4x - 2$. **2.** 1) $\boldsymbol{Q}(x) = 4x^2 - 6x - 1$, $\boldsymbol{R}(x) = 12x + 3$; 2) $\boldsymbol{Q}(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10$, $\boldsymbol{R}(x) = 20x + 21$. **3.** 1) $a = -18$, $b = -35$; 2) $a = -8$, $b = 20$; 3) $a = -1$, $b = -2$. **4.** 1) $\boldsymbol{Q}(x) = x + 6$, $\boldsymbol{R}(x) = 12x + 12$; 2) $\boldsymbol{Q}(x) = x$, $\boldsymbol{R}(x) = -20x - 30$. **7.3. 1.** 1) -101. **2.** $a = -3$. **3.** $x + 3$. **4.** $a = -1$, $b = 1$. **5.** 8; $5\frac{2}{3}$. **7.** $-2x^3 + 8x^2 + 14x - 20$. **8.** $a = -2$. **9.** 3. **10.** $2x^3 - 10x^2 + 6x + 18$. **11.** $a = 3$, $b = 9$. **12.** $x^2 + 5x + 1 = 0$. **13.** $x^2 - 5x + 2 = 0$. **14.** $x^2 - 30x + 9 = 0$. **7.4. 1.** 1) $\boldsymbol{Q}(x) = x^2 + 2x + 1$, $\boldsymbol{R}(x) = 0$; 2) $\boldsymbol{Q}(x) = 5x^2 - x + 20$, $\boldsymbol{R}(x) = 96$; 3) $\boldsymbol{Q}(x) = x^2 - 18x + 64$, $\boldsymbol{R}(x) = -168$. **2.** 1) Igen; 2) igen. **3.** 1) $2x^2 - 5x - 3$; 2) $2x^2 - 11x + 5$. **7.5. 1.** 1) 1; 2) -3; 2; 3) -4; 4) -2; 1. **2.** 1) 1; 2) $-0{,}5$; 3) ± 1; $-\frac{2}{3}$; 4) -1; $\frac{2}{3}$. **3.** 1) $(2x + 1)(x + 1)(x - 2)$; 2) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)$; 3) $(x - 1)^3(x + 1)$; 4) $(x - 1)^2(x + 5)(x - 5)$. **4.** 1) 1; $-1 \pm \sqrt{3}$; 2) -2; -1; 3; 3) $-0{,}5$; 1; 4) 0,5; $1 \pm \sqrt{2}$. *Útmutatás.* Először meghatározzuk a többtagú kifejezés racionális gyökét ($x = \alpha$), majd elosztjuk a többtagú kifejezést $(x - \alpha)$-val. **5.** 1) $(x^2 + 3x - 2)(x^2 - 2x + 3)$; 2) $(x^2 + 3x - 1)(x^2 - 7x + 2)$. **6.** 1) $\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2}\right)$; 2) $\left(\left(1 + \sqrt{2}\right)x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(\left(\sqrt{2} - 1\right)x^2 - \sqrt{2} - 1\right)$; 3) $\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2}\right)$. **8. §. 1.** 1) $-\frac{2}{3}$; 4; 2) 0,5; 3,5; 3) -1; 2; 3; 6. **2.** 1) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; 2) $(-0{,}8; 2)$; 3) $(-3; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{3}\right)$; 4) $\left(-2; 2\frac{2}{3}\right)$. **3.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) -1; -3. **4.** 1) $[1; 3]$; 2) -8; 12; 3) $[-5; 8]$. **5.** 1) Nincs megoldása; 2) $[2; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (8; +\infty)$. **6.** 1) $[1; 2]$; 2) $-2\frac{1}{3}$; 3. **7.** 1) -3; 5; 2) $[-1; 4]$. **8.** 1) $-\frac{2}{3}$; 0,5; 2; 2) $-2 - \sqrt{5}$; $\sqrt{5}$. **9.** 1) 0; ± 2; 4; 2) -2; 1; 3; 6. **10.** 1) $(-1; 5)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{41}}{2}\right) \cup (-1; 2) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{41}}{2}; +\infty\right)$. **11.** 1) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; 2) $[1; 3]$. **12.** 1) $(-5; -2) \cup (-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -5) \cup (-3; 3) \cup (5; +\infty)$. **13.** 1) $[-6; -2] \cup [4; 8]$; 2) $(-\infty; -8) \cup (2; +\infty)$. **14.** 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$. **15.** 1) $\left[-3 - \sqrt{5}; -4\right) \cup (-2; 0]$; 2) $\left[-1 - 2\sqrt{2}; -3\right) \cup (1; 3]$.

Az 1. fejezet kiegészítő gyakorlatai. 2. 1) 8; 2) 6. **3.** 1) 8. **9.** 1) 0,25.

2. fejezet

10. §. 2. 1) -2; 2) 0,5; 3) -1; 4) 2; 5) 5; 6) 3. **3.** 1) 20; 2) 10; 3) 6; 4) $3\sqrt[5]{16}$. **4.** 1) 3; 2) 10; 3) -2; 4) 5. **5.** 1) -2; 2) 3; 3) -5; 4) 2. **6.** 1) 77; 2) 6; 3) 15; 4) 5. **7.** 1) 108; 2) 200; 3) 0,9; 4) $1\frac{1}{3}$. **9.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[3; +\infty)$; 3) $[-2; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$. **10.** 1) $\frac{3\sqrt[7]{64}}{2}$; 2) $\frac{2(\sqrt{7} + 1)}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$, ha $a = 9$; $\frac{\sqrt{a} - 3}{a - 9}$, ha $0 \leqslant a < 9$ vagy $a > 9$; a kife-

jezés nincs értelmezve, ha $a < 0$; 4) $\frac{1}{3}$, ha $x = 1$; $\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$, ha $x \neq 1$. **11.** 1) $a^2b\sqrt[5]{ab^2}$; 2) $ab^3\sqrt[4]{a^3b}$; 3) $-3ab^4\sqrt[3]{a^2b^2}$; 4) $2ab^2\sqrt[6]{2a^3b^5}$. **12.** 1) $|ab^3|\sqrt{|b|}$; 2) $ab\sqrt[7]{a^2b}$; 3) $2a^2b\sqrt[6]{b}$; 4) $a^2|b|\sqrt[8]{ab}$. **13.** 1) $\sqrt[3]{7a^3}$; 2) $-\sqrt[4]{ab^5}$; 3) $\sqrt[7]{5a^7b^7}$; 4) $\sqrt[6]{a^7b}$. **14.** 1) $\sqrt[4]{7a^4}$, ha $a \geqslant 0$; $-\sqrt[4]{7a^4}$, ha $a < 0$; 2) $\sqrt[7]{a^{22}b}$; 3) $\sqrt[6]{2ab^7}$; 4) $\sqrt[8]{-3b^{11}}$. **15.** 1) $-a$; 2) a; 3) 0; 4) 0. **16.** 1) $2|a|b^2\sqrt[4]{2}$; 2) ab^2c; 3) $\sqrt[20]{|a|^{17}}$; 4) $\sqrt[60]{2}\cdot\sqrt[12]{3}\cdot\sqrt[30]{|a|^{11}}$. **17.** 1) $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$; 2) $\sqrt[4]{y}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{b}(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})}{\sqrt{a}}$; 4) $-\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$, ha $x \geqslant 0, y > 0$; $\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$, ha $x \leqslant 0$, $y < 0$. **18.** 1) $\sqrt[3]{7}$; 2) $\pm\sqrt[6]{3}$; 3) $-\sqrt[5]{5}$; 4) nincs megoldása; 5) ± 2; 6) -4. **11. §. 1.** 1) 3; 2) nincs megoldása; 3) -26; 4) 0; 5) 45. **2.** 1) 8; 2) 2. **3.** 1) 2; 2) 10; 3) 4; 4) 7. **4.** 1) 3; 2) -5; 3) -11; 4) -8; 5. **5.** 1) 1; 2) 3; 3) 0; 4) $\pm\sqrt{2}$. **6.** 1) 1; 2; 10; 2) -1. **7.** 1) (8; 0); 2) (4; 1); 3) (4; 1); 4) (16; 1). **8.** 1) (27; 1), (1; 27); 2) nincs megoldása; 3) $\left(-\frac{5}{7}; -\frac{3}{7}\right)$; 4) (0,5; 1,5). **12. §. 12.1. 1.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{1}{9}}$; 3) $\sqrt[4]{5}$; 4) $\sqrt[7]{\frac{1}{64}}$; 5) $\sqrt{8}$; 6) $\sqrt[3]{\frac{1}{49}}$. **2.** 1) $3^{\frac{5}{6}}$; 2) $4^{\frac{1}{5}}$; 3) $7^{-\frac{9}{2}}$; 4) $a^{-\frac{2}{9}}$; 5) $(2b)^{\frac{1}{4}}$; 6) $|c|^{\frac{4}{11}}$. **3.** 1) Nem; 2) igen; 3) igen; 4) nem. **4.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $(1; +\infty)$; 4) $[-3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$. **5.** 1) 9; 2) $\frac{3}{8}$; 3) 32; 4) $\frac{9}{625}$; 5) 8,2; 6) 6,75; 7) 3,25. **7.** 1) $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}+5}$; 3) $\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}-d^{\frac{1}{2}}}$; 4) $m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}$. **8.** 1) $1 + c$; 2) $x + y$; 3) $x - 1$; 4) $k^{\frac{1}{2}}-l^{\frac{1}{2}}$. **9.** 1) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+4}$; 2) $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$; 3) $z^{\frac{1}{3}}-2$; 4) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$. **10.** 1) 1; 2) 128; 3) $4\sqrt{2}$; 4) $\pm 4\sqrt{2}$. **12.2. 1.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$; 5) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$. **13. §. 13.1. 1.** 1) -1; 2) 3. **2.** 1) 0; 2) 0; 3) nincs megoldása; 4) 3. **3.** 1) 1; 2) (4; 25). **4.** 1) 8; 2) 4; 3) 2; 4) 1, -1. **5.** 1) (16; 16); 2) (4; 4). **13.2. 1.** 1) $\frac{13-\sqrt{61}}{2}$; 2) -3; 1; 3) 4; 4) 4. **2.** 1) 1; 2) [5; 8]. **3.** 1) $1\frac{2}{7}$; 2) $2-2\sqrt{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **4.** 1) $\frac{15+3\sqrt{5}}{10}$; 2) -1. **5.** 1) 32; 2) 64. **14. §. 1.** 1) $(-\infty; -3]$; 2) $(-\infty; 0] \cup \left[3; 3\frac{4}{7}\right)$. **2.** 1) $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; +\infty)$. 2) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. **3.** 1) -2; $[-1; 3]$; 2) -3; $(-0,5; 1]$. **4.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[10; +\infty)$. **5.** 1) $\left[3-2\sqrt{2}; 9\right)$; 2) $[0; 4) \cup (9; +\infty)$. **6.** 1) $(-\infty; -3] \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. **7.** 1) $[2; 5{,}2]$; 2) $[1; 5) \cup (10; +\infty)$. **8.** 1) Nincs megoldása; 2) 2; 3. *Útmutatás.* Meghatározni az egyenlőtlenség megengedett értékeinek halmazát, majd figyelembe kell venni, hogy

csak két szám tartozik hozzá. **15. §. 1.** 1) Ha $a \in \boldsymbol{R}$ $x = a + 4$; 2) ha $a \geqslant 0$ $x = a^2 - 2a$; ha $a < 0$, akkor nincs megoldása; 3) ha $m \leqslant 0$ vagy $m > 3$, nincs megoldása; ha $0 < m \leqslant 3$ $x = \frac{m^4 - 6m^2 + 81}{4m^2}$; 4) ha $a = 0$ $x = 0$; ha $a \geqslant 1$ $x = \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$; ha $a < 0$ vagy $0 < a < 1$, akkor nincs megoldása. **2.** 1) Ha $a \leqslant 1$ $x = a$; ha $1 < a < 2$ $x \in [1; a]$; ha $a = 2$, akkor $x \in [1; 2)$; ha $a > 2$, akkor $x = a$ vagy $x \in [1; 2)$; 2) ha $a < 0$, akkor nincs megoldása; ha $a = 0$, akkor $x \in (0; +\infty)$; ha $a > 0$, akkor $x \in \left[-\frac{4}{3}a; -a\right) \cup (0; +\infty)$; 3) ha $a \leqslant -4$, akkor nincs megoldása; ha $-4 < a \leqslant 0$, akkor $x \in \left(2 - \sqrt{4+a}; 2 + \sqrt{4+a}\right)$; ha $a > 2$, akkor $x \in \left[-\frac{a}{4}; 2 + \sqrt{4+a}\right)$; ha $a \leqslant -\frac{1}{2}$, akkor $x \in \left[a; \frac{-3 + \sqrt{-7-16a}}{8}\right]$; ha $-\frac{1}{2} < a < -\frac{7}{16}$, akkor $x \in \left[\frac{-3 - \sqrt{-7-16a}}{8}; \frac{-3 + \sqrt{-7-16a}}{8}\right]$; ha $a = -\frac{7}{16}$, akkor $x = -\frac{3}{8}$; ha $a > -\frac{7}{16}$, akkor nincs megoldása; 5) ha $a < -2$ vagy $a > 2$, akkor $x \in \left(\frac{2 - \sqrt{2a^2-4}}{2}; |a|\right)$; ha $-2 \leqslant a < -\sqrt{2}$ vagy $\sqrt{2} < a \leqslant 2$, akkor $x \in \left(\frac{2 - \sqrt{2a^2-4}}{2}; \frac{2 + \sqrt{2a^2-4}}{2}\right)$; ha $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$, akkor nincs megoldása. **3.** $a \leqslant 5{,}125$. **4.** $a < 0$, $a = \sqrt{2}$. **5.** $a \leqslant 1$. **6.** Ha $a \leqslant 1$ $\left((1+\sqrt{2})x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left((\sqrt{2}-1)x^2 - \sqrt{2} - 1\right)$; egy megoldása van; ha $a > 1$, akkor nincs megoldása.

Az 2. fejezet kiegészítő gyakorlatai. 1. 1) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3}$; 3) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$; 4) $\frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{5}$. **2.** 1) 0; 2) 1; 3) $\sqrt{2} - 0{,}75$; 4) 1. **3.** 1) $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{2}}$; 2) 1; 3) $x - 1$; 4) $\frac{1-c}{\sqrt{c}}$. **4.** 2) $\frac{1}{8b}$; 3) $-2\sqrt[4]{x}$. **5.** 1) $x + 1$; 2) $ab^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)$; 3) $3y^{\frac{1}{2}}$. **6.** 1) Nincs gyöke; 3) -2; 3; 4) 3. **7.** 1) 2; 3) 2; 4) 7. **8.** 1) $-\frac{1}{11}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) [5; 10]; 4) [7; 14]. **9.** 1) 8; 2) 0,5; 3) -3; 6; 13; 4) 1; 2; 10. **10.** 1) 8; $\frac{56 \pm 12\sqrt{21}}{7}$; 2) 1; 1,5; 4) nincs megoldása. **11.** 1) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}; \frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$; 2) (0; 1); 3) nincs megoldása; 4) nincs megoldása. **12.** 1) $(t + 1; t)$, $t \in \boldsymbol{Z}$; 2) (5; 4); (−0,5; −0,4); 3) $\left(1 + \sqrt{5}; \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$; 4) (2; 3); $\left(4\frac{1}{3}; -1\frac{2}{3}\right)$. **13.** 1) $[-2; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) [0; 3]; 4) $(-2; -1]$. **14.** 1) $(-\infty; -2] \cup \left[-1; \frac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$; 2) $(-2; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$; 3) $(-\infty; 0{,}75] \cup (4; 7)$;

4) $[-3; 1)$. **15.** 1) $[1; 2]$; 2) $[4; 20]$; 3) $\left[2; 2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$; 4) $\left[2; \frac{\sqrt{146}-7}{2}\right)$. **16.** 1) $[-2; 0) \cup$ $\cup$ $(0; 1{,}6)$; 2) $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$; 3) -1; $[2; +\infty)$; 4) -2; 1; $[3; +\infty)$. **17.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $\left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty)$; 3) $[-1; 3]$; 2; 4) -3; $[-2; 4]$. **18.** 1) $\left[-1-2\sqrt{13}; -5\right) \cup \left(1; -1+2\sqrt{13}\right]$; 2) $(-\infty; 0) \cup [1; 2]$; 3) $\left[-5; -4+2\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$; 4) $\left(6-2\sqrt{\sqrt{5}-2}; 7\right]$. **19.** 1) $[2{,}5; 3]$; 2) $[1; 1{,}5]$; 3) $\left(5\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **20.** 1) $\left(-1; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{5}}; 1\right)$; 2) $(0; 0{,}5)$; 3) $(-0{,}75; 1)$; 4) $[-1; 0)$. **21.** 1) $(0; 4) \cup \left[\frac{8+4a^2+8\sqrt{a^2+1}}{a^2}; +\infty\right)$; 2) ha $a < 2$, akkor $x \in \left(0; \frac{a}{a-2}\right] \cup (1; +\infty)$; ha $a = 2$, akkor $x \in (1; +\infty)$; ha $a > 2$, akkor $x \in \left(1; \frac{a}{a-2}\right]$. **22.** $-1{,}25 < a \leqslant 1$ vagy $a \geqslant 1{,}25$. **23.** $a < -3$ vagy $a > 1$. **24.** $a < -1$.

3. fejezet

16. §. 3. 1) $\frac{5\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{5}$; 3) $\frac{5\pi}{9}$; 4) $-\frac{4\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{8}$; 6) $-\frac{5\pi}{6}$. **4.** 1) 540°; 2) 135°; 3) −72°; 4) 210°; 5) −10°; 6) 330°; 7) −22,5°; 8) $\frac{540°}{\pi}$. **17. §. 1.** 3) III; 4) III; 5) III; 6) IV. **18. §. 1.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) 1; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) -1; 8) $\sqrt{3}$. **2.** 2) $T = \pi$; 4) $T = \frac{\pi}{3}$; 5) T – a 0 kivételével bármely természetes szám. Legkisebb pozitív szám nem létezik. **3.** 1) π (πk, $k \neq 0$, $k \in \mathbf{Z}$); 2) $\frac{\pi}{5}\left(\frac{\pi k}{5}, k \neq 0, k \in \mathbf{Z}\right)$; 3) 6π ($6\pi k$, $k \neq 0$, $k \in \mathbf{Z}$); 4) $\frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi k}{3}, k \neq 0, k \in \mathbf{Z}\right)$; 5) 5π ($5\pi k$, $k \neq 0$, $k \in \mathbf{Z}$). **19. §. 5.** 1) sin 3,9, sin 3,3, sin 1,2; 2) cos 1,9, cos 1,2, cos 0,3; 3) tg (−1,3), tg 0,7, tg 1,5; 4) ctg 2,9, ctg 1,1, ctg 0,5. **20. §. 1.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem; 4) igen; 5) igen; 6) igen. **2.** 1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$; 2) $\sin\alpha = 0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$, $\operatorname{ctg}\alpha = -1\frac{1}{3}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$; 4) $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -5$. **3.** 1) 0; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 1; 4) $-\cos^2\alpha$; 5) 1; 6) 0; 7) $\sin\alpha$; 8) 1; 9) $\frac{2}{3}$; 10) $-2\operatorname{tg}\alpha$. **5.** 1) $-\frac{3}{8}$; 2) a) 2; b) 2.

21. §. 21.1. 1. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9) 1; 10) $\sqrt{3}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.** 1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\sin \alpha$; 4) $\cos \beta$; 5) $\operatorname{ctg} 3\alpha$; 6) $\operatorname{tg} 6\alpha$; 7) $\operatorname{tg} 7\alpha$; 8) $\operatorname{tg} 5\alpha$; 9) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$; 10) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$. **3.** 1) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; 5) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; 6) $-2-\sqrt{3}$. **21.2. 1.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $1\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $\frac{1}{2}$. **4.** 1) $\sin \alpha$; 2) $\sin^2 \alpha$; 3) $2\sin \alpha$; 4) $\frac{1}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$. **5.** 1) $-\frac{24}{25}$; 2) $-\frac{7}{25}$; 3) $3\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{24}$. **6.** 1) $\frac{120}{169}$; 2) $-\frac{119}{169}$; 3) $-1\frac{1}{119}$; 4) $-\frac{119}{120}$. **7.** 1) $\frac{24}{25}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $3\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{24}$. **8.** 1) $-\frac{24}{25}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $-3\frac{3}{7}$; 4) $-\frac{7}{24}$. **9.** –0,8. **10.** –1,125; 0. **21.3. 1.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) –1; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) 1. **2.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** 1) $\cos^2 \alpha$; 2) $-\cos^2 \alpha$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 \alpha$; 5) 1. **21.4. 1.** 1) 0; 2) $-\sin 18°$; 3) $\sqrt{2}\sin 25°$; 4) $\operatorname{tg} 20° \operatorname{ctg} 5°$; 5) $\sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)$; 6) $4\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$; 7) $4\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$. **3.** 1) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}\left(\cos 10° - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{3\pi}{10}\right)$. **4.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **22. §. 22.1. 1.** 1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; 3) $\sqrt{2}-1$. **2.** 1) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{2}{3}$. **3.** $3+2\sqrt{2}$. **4.** $-\frac{2}{\sqrt{13}}$. **5.** 0,6. **6.** $-\frac{1}{3}$. **7.** 2. **8.** $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. *Útmutatás.* Ha $\alpha = 18°$, akkor $36° = 2\alpha$ és $54° = 3\alpha$ (ahol $\sin\alpha > 0$).

Az 3. fejezet kiegészítő gyakorlatai. 1. 1) 0; 2) $|\sin\beta + \cos\beta|$; 3) 13; 4) $\sin\beta$. **2.** 1) $2\operatorname{tg}\alpha$; 2) –1; 3) 1; 4) 1. **7.** 1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{1}{(m+1)^2}$; 3) $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$. *Útmutatás.* A feltételből következik, hogy $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$, ahol $|\cos\alpha| \leqslant 1$; 4) $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos 2\alpha = -\frac{7}{9}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. fejezet

23. §. 1. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{2}$; 6) $-\frac{\pi}{4}$. **2.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. **3.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) π; 6) $\frac{3\pi}{4}$. **4.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$. **5.** 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{3}{4}$. **6.** 1) 7; 2) 3; 3) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **7.** 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. **8.** 1) $\sqrt{7}$; 2) 1,5; 3) $\frac{1}{\sqrt{26}}$; 4) $\frac{3}{5}$. **9.** 1) $\frac{\pi}{7}$; 2) $7 - 2\pi$; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $8 - 2\pi$; 5) $\frac{\pi}{5}$; 6) $4 - \pi$; 7) $\frac{\pi}{9}$; 8) $10 - 3\pi$. **24. §. 1.** 1) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) nincs megoldása; 3) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) nincs megoldása. **3.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **4.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **5.** 1) $(-1)^{n+1} \times$ $\times \arcsin 0{,}6 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pm\arccos 0{,}3 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg} 3{,}5 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\operatorname{arcctg} 2{,}5 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **6.** 1) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. **7.** 1) $(-1)^n\,\pi + 4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{15}{4} + 10\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2} + 3\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{7\pi}{4} + 7\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **8.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pm 2\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{3} + 3\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **10.** 1) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + 3\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **11.** 1) $-\frac{5\pi}{12} - \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pi - 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $-8\pi n$; $-\frac{4\pi}{3} - 8\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. **12.** 1) $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; 2) $\pm\frac{\pi}{18}$; $\pm\frac{11\pi}{18}$; $\pm\frac{13\pi}{18}$; 3) $-\frac{5\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{16}$; $\frac{7\pi}{16}$; $\frac{11\pi}{16}$; $\frac{15\pi}{16}$. **13.** 1) $-\frac{17\pi}{18}$; $-\frac{13\pi}{18}$; $-\frac{5\pi}{18}$; $-\frac{\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18}$; $\frac{19\pi}{18}$; 2) 0; $\pm 2\pi$; 4π; 3) 0; 2π; 4π; 4) $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{4}$.

25. §. 1. 1) $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$;

3) $(-1)^n \arcsin\frac{1}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\pi + 4\pi n$, $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\pm\pi + 6\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^n \arcsin\frac{1}{5}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. **4.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 5+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $2\operatorname{arcctg}\frac{5}{7}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **5.** 1) $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{4}\right)+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **6.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **7.** 1) $\pi + 2\pi n$; $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{5}{13}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^n \arcsin\frac{3}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **8.** 1) $2\pi n$; $\pi + 4\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $4\pi n$; $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n, \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n, \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{-7\pm\sqrt{53}}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **10.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **11.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **12.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) πn; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **13.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **14.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. **15.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. **16.** 1) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. **17.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **18.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$;

$-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 4+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. **19.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2\operatorname{arctg} 2+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) πn; $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **20.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\pi+2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. **26. §. 1.** 1) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi(1-n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi(1-n)\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** 1) $\left(\pi n;\frac{\pi}{4}-\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;-\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\pi+2\pi n;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\pi+2\pi k\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$. **4.** 1) $\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n;\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi n\right)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n;\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **5.** 1) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);-\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi(n+k);\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+\pi(n+k);-\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$. **6.** 1) $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi(k+n);\frac{\pi}{12}+\pi(k-n)\right)$, $\left(\frac{\pi}{12}+\pi(k+n);\frac{5\pi}{12}+\pi(k-n)\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{12}+\pi(n+k);-\frac{\pi}{12}+\pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi(n+k);-\frac{5\pi}{12}+\pi(n-k)\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$. **7.** 1) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n+\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n-\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$. **8.** 1) $\left(2\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

27. §. 1. 1) $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) nincs megoldása; 4) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\boldsymbol{R}$; 4) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$. **4.** 1) $\left(\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left[\frac{3\pi}{4}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **5.** 1) $\left(\frac{\pi}{8}+\pi n;\frac{3\pi}{8}+\pi n\right)$,

$n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}+6\pi n; \frac{11\pi}{2}+6\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{5}+\frac{\pi n}{5}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **6.** 1) $\left[\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left[-\frac{9\pi}{2}+6\pi n; 6\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{2}; \frac{5\pi}{48}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **7.** 1) $\left(-\frac{2\pi}{9}-\frac{2\pi n}{3}; -\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left[-\frac{7\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}\right]$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\left(-\frac{3\pi}{2}+2\pi n; 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **8.** 1) $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{4}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **28. §. 1.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** 1) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) nincs megoldása; 3) $3 + 4n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) 1; 5) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{11}+\pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$. **4.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $(0{,}5; \pi + 4\pi n)$; $(-0{,}5; \pi - 4\pi n)$ $n \in \mathbf{Z}$. **5.** 1) 1; 2) $-0{,}25$; 3) 1; 4) 1; 5) 0,125; 6) $0; \pm 1$. **6.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi(2k-n); \frac{\pi}{6}-\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(2k+n); -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(4k+n); \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$. 3) $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$; $\left((-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$; 5) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; -\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k, n \in \mathbf{Z}$; 6) $(\pi n; \pi k)$; $(-0{,}5 \arccos(-0{,}75) + \pi n; -0{,}5 \arccos(-0{,}75) + \pi k)$, $(0{,}5 \arccos(-0{,}75) + \pi n; 0{,}5 \arccos(-0{,}75) + \pi k)$, $(-0{,}5 \arccos 0{,}25 + \pi n; -0{,}5 \arccos 0{,}25 + \pi k)$, $(0{,}5 \arccos 0{,}25 + \pi n; 0{,}5 \arccos 0{,}25 + \pi k)$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

Útmutatás. Írjuk fel az egyenletrendszert $\begin{cases} 4\sin(3x+2y) = -\sin x, \\ \sin y = -4\sin(2x+3y) \end{cases}$ alakban, és szorozzuk meg az első és második egyenlet jobb, illetve bal oldalait megfelelően. Vegyük figyelembe, hogy az átalakítások során hamis gyökök keletkezhetnek. A $4 \sin 5x + \sin x = 0$ egyenlet megoldásakor induljunk ki abból, hogy $\sin 5x = \sin(x + 4x)$. **29. §. 1.** 1) Ha $-1 < a < 1$, nincs megoldása; ha $a \leqslant -1$ vagy $a \geqslant 1$, akkor $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{a}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) ha $-0{,}5 \leqslant a \leqslant 0{,}5$, akkor $x = \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; ha $a < -0{,}5$ vagy $a > 0{,}5$ $x = \frac{\pi}{2}+\pi n$, akkor $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2a}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) ha $a = 0$ vagy $a < -1$, vagy $a > 1$, akkor $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; ha $-1 \leqslant a < 0$ vagy $0 < a \leqslant 1$, akkor $x = \pi n$, $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) ha $-1 < a < 1$, akkor

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; ha $a\leqslant -1$ vagy $a\geqslant 1$, akkor $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{a}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** 1) Ha $a<-0{,}5$ vagy $a>4$, akkor nincs megoldása; ha $a=-0{,}5$, akkor $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; ha $-0{,}5<a\leqslant 0$, akkor $x=(-1)^n\arcsin\frac{1\pm\sqrt{2a+1}}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; ha $0<a\leqslant 4$ $x=(-1)^n\arcsin\frac{1-\sqrt{2a+1}}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) ha $a<-1{,}25$ vagy $a>5$, akkor $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; ha $a=-1{,}25$, akkor $x=\pm\arccos 0{,}25+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; ha $-1{,}25<a<1$, akkor $x=\pi n$; $x=\pm\arccos\frac{1\pm\sqrt{4a+5}}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; ha $1\leqslant a<5$, akkor $x=\pi n$, $x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{4a+5}}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $b=0$-ban az egyenlet nincs értelmezve; ha $b\neq 0$ és $a=0$, akkor $x\neq\frac{\pi k}{b}$, $x\in\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{Z}$; ha $b\neq 0$ i $a\neq 0$, akkor $x=\frac{\pi n}{a}$, $n\in\mathbf{Z}$, $n\neq\frac{ak}{b}$, $k\in\mathbf{Z}$; 4) ha $a=-1$ vagy $2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$, akkor $x=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; ha $a<-1$ vagy $-1<a\leqslant 2-2\sqrt{2}$, vagy $a\geqslant 2+2\sqrt{2}$, akkor $x=2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2+a}{a\sqrt{2}}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** 1) $-2\sqrt{5}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{5}$; 2) $-5\leqslant b\leqslant 5$; 3) $a\in\mathbf{R}$; 4) $a\in\mathbf{R}$; 5) $\frac{4-\pi}{2}\leqslant a\leqslant\frac{4+\pi}{2}$. **4.** $3-\frac{1}{\sqrt{2}}<a<3+\frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.** (0; 1); (1; 1). **7.** 1) Ha $a<-2$, akkor $x\in\mathbf{R}$; ha $-2\leqslant a<-2$, akkor $x\in\left(\arcsin\frac{a}{2}+2\pi n;\pi-\arcsin\frac{a}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; ha $a\geqslant 2$ nincs megoldása; 2) ha $a\leqslant\frac{1}{3}$, akkor $x\in\left(-\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n;\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; ha $\frac{1}{3}<a<3$, akkor $x\in\mathbf{R}$; ha $a\geqslant 3$, akkor $x\in\left(\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n;2\pi-\arccos\frac{a+5}{5a-7}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) ha $a<-1$, akkor $x\in\mathbf{R}$; ha $a=-1$, akkor $x\in(-\pi+2\pi n,\pi+2\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$; ha $-1<a<0$ vagy $0<a<3$, akkor $x\in\left(-\arccos\frac{1-\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n;\ \arccos\frac{1-\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; ha $a=0$, akkor $x\in\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; ha $a\geqslant 3$, akkor $x\in\left(-\arccos\frac{1-\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n;-\arccos\frac{1+\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n\right)\cup\left(\arccos\frac{1+\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n;\arccos\frac{1-\sqrt{a+1}}{a}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **8.** 1) $-0{,}5\leqslant a\leqslant 0{,}5$; 2) $-\frac{1}{3}<a<\frac{1}{3}$. **9.** 1) $a<-2$, $a=1$, $a>2$; 2) $a<0$, $a=1$, $a>4$; 3) $a=2$. **10.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi(k+n);\frac{\pi}{2}+\pi(k-n)\right)$, k,

$n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\pi(k+n); \frac{\pi}{2}+\pi(k-n)\right)$, $k,\ n \in \mathbf{Z}$; 4) ha $a < -2$, akkor $x \in \left[\arccos\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n;\ 2\pi-\arccos\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n\right] \cup \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; ha $-2 \leqslant a \leqslant 2$, akkor $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, ha $a > 2$, akkor $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, -\arccos\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n\right] \cup \left[\arccos\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **30.** §. **1.** 1) $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; **2.** 1) $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n;\ \pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{3\pi}{8}+\pi n; \frac{\pi}{8}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** 1) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **4.** 1) $\left(\pi n; \frac{\pi}{8}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{3\pi}{8}+\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8}+\pi n; \frac{2\pi}{3}+\pi n\right) \cup \left(\frac{7\pi}{8}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **5.** 1) $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **6.** 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; -\frac{2\pi}{7}+2\pi n\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{7}+2\pi n; 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{4\pi}{7}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{4\pi}{7}+2\pi n;\ \frac{6\pi}{7}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{6\pi}{7}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. **7.** $\left(-\frac{7\pi}{12}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{12}\right)$. **8.** $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$. **9.** 1) Ha $a \leqslant -2$, akkor $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \pi+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; ha $-2 < a < -\sqrt{2}$, akkor $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right) \cup \left(\pi+2\pi n; 2\pi-\arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; ha $a = -\sqrt{2}$, akkor $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; ha $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$, akkor $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\arccos\frac{a}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(2\pi-\arccos\frac{a}{2}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; ha $a = \sqrt{2}$, akkor $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; ha $\sqrt{2} < a < 2$,

akkor $x \in \left(2\pi n; \arccos\frac{a}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\pi + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup$
$\cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi n; 2\pi - \arccos\frac{a}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; ha $a \geqslant 2$, akkor $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup$
$\cup \left(\pi + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Az 4. fejezet kiegészítő gyakorlatai. **1.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** 1) πn, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) πn, $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** 1) $\pi + 2\pi n$, $4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $2\pi n$, $\pi + 4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **4.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{3\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arcctg} 2 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **5.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $2\pi n$, $\pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **6.** 1) $2\pi n$, $(-1)^n\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pi + 2\pi n$, $\pm\frac{5\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. **7.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) πn, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **8.** 1) $\pi + 2\pi n$, $\pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **9.** 1) $-\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$, π; 3) 67,5°; 4) 240°. **10.** 1) $\frac{5\pi}{6}$; 2) 2π; 3) $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$; 4) $\frac{\pi}{5}$. **11.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **12.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 15 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 13 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **13.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 3) $\pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **14.** 1) $\frac{\pi n}{2} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. **15.** 1) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$. **16.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **17.** 1) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{(-1)^n}{2}\arcsin(\sqrt{3}-1)+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{21}+\frac{\pi n}{7}$, $n\in\mathbf{Z}$. **18.** 1) $\pi+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pi+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{5\sqrt{2}}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **19.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. **20.** 1) πn, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{2\pi n}{3}$, $\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $-\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}+(-1)^n\arcsin\frac{4}{\sqrt{34}}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **21.** 1) $2\pi n$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\pm\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\sqrt{2}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\sqrt{5}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **22.** 1) -2; 2) 7; 3) 0; 4) $\pm0{,}5$; 1. **23.** 1) 0; $\pm\frac{4\pi}{3}$; $\pm\frac{8\pi}{5}$; 2) $-\frac{10\pi}{3}$; -2π; $-\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{6+\sqrt{2}}{4}$; 4) 1,75. **24.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) nincs megoldása. **25.** 1) 0; 2) 1; 3) $\pm\sqrt{2}$; 4) 0. **26.** 1) πn, $-\frac{7\pi}{12}+2\pi n$, $-\frac{11\pi}{12}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $-\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **27.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{12}{13}+2\pi n;2\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(-\arccos\frac{3}{5}+2\pi n;1\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;2\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $(2\pi n;1)$, $n\in\mathbf{Z}$. **28.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$. **29.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;2\pi n\right)\cup\left(2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\left(-\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **30.** 1) $\left(-\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2};\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3};\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **31.** 1) $\left(-\operatorname{arctg}2+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$;

2) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\left[\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$. **32.** 1) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\frac{11\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left(2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\right.$ $\left.\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\right.$ $\left.2\pi+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\left[-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\operatorname{arctg}2+\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$. **33.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left[\frac{5\pi}{3}+2\pi n;\frac{11\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\frac{11\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$. **34.** 1) $\left(-\pi+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{8}+\pi n;\frac{\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{2\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{8}+\pi n;\frac{3\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{4\pi}{7}+\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{5\pi}{8}+\pi n;\frac{5\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+\pi n;\frac{6\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{8}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\left(2\pi n;\frac{\pi}{7}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{3\pi}{7}+2\pi n\right]\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{7}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left[\frac{9\pi}{7}+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\frac{11\pi}{7}+2\pi n\right]\cup\left(\frac{5\pi}{3}+2\pi n;\frac{13\pi}{7}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$. **35.** 1) $\left[-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $(0{,}5;\ 1]$; 3) $[-1;\ \sin 0{,}5)\cup(\sin 1;\ 1]$; 4) $[-1;\ \cos 2)$. **36.** 1) $\left(\frac{17\pi}{36}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{53\pi}{36}+2\pi n;\frac{35\pi}{18}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; 4) $(0;\ 1)$. **37.** 1) $0\leqslant a\leqslant 3$; 2) $-4{,}5\leqslant a\leqslant 4{,}5$. **38.** 1) $[0{,}6;\ 1]$; 2) $[0{,}6;\ 1]$; 3) $[0{,}5;\ 1]$; 4) $\left[0{,}5;\frac{120}{169}\right)$. **39.** 1) πn, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **40.** 1) $a\leqslant-2\sqrt{6}$ vagy $a\geqslant 2\sqrt{6}$; 2) $a\leqslant-4\sqrt{6}$ vagy $a\geqslant 4\sqrt{6}$.

TÁRGYMUTATÓ

A

$a \sin\alpha + b \cos\alpha$ kifejezés átalakítása 305
abszolútérték geometriai értelmezése 17
abszolútértékes egyenletek 180
– egyenlőtlenségek 130
alaphalmaz szűkítése 78, 359
árkuszkoszinusz 315
árkuszkotangens 320
árkuszszinusz 312
árkusztangens 317
az n-edik gyök tulajdonsága 160
azonos argumentum trigonometrikus függvényei közötti összefüggések 273
azonosság 276

B

Bézout-tétel 120
Bézout-tétel következménye 121

Cs

csökkenő függvény 29

E

egész kitevőjű hatvány 186
egyenlet gyöke 67
– gyökeiről szóló tétel 83
– lehetséges értékeinek halmaza 67
egyenletek 67
– ekvivalens átalakítása 63
– ekvivalenciája 95, 213
– megoldása 67
egyenlőtlenségek ekvivalenciája 68
– ekvivalens átalakítása 90
– lehetséges értékeinek halmaza 90
– megoldása 90
egyismeretlenes egyenletek 66
egyenlet-következmények 67
egytagú kifejezés 114
– fokszáma 114
egyváltozós egyenlőtlenségek 90
– többtagú kifejezések 115
ekvivalens egyenletek 68
– egyenlőtlenségek 90

F

félszög-képletek 299
fordított arányosság függvénye 43
függvény 29
– értelmezési tartománya 30
– lehetséges értékének halmaza 160
– periódusa 246
– zérushelyei 96
függvénygrafikon 28
függvénytranszformációk 50

G

geometriai transzformációk függvénygrafikonjai 50
gyök 163
– alaptulajdonsága 161
– alatti kifejezés 163
gyökkitevő 163
gyöknek a gyöke 161, 169
gyökvesztés 78

H

halmazok 8
– egyenlősége 11
– metszete 9
– különbsége 9
– uniója 9
hamis gyök 70
hányados gyöke 161, 169
harmonikus rezgések 256
– – amplitúdója 256
– – frekvenciája 256
– – kezdőfázisa 256
– – periódusa 256
háromszoros szög szögfüggvényei 299
hatvány gyöke 161, 169
hatványfüggvény 194
– tulajdonsága 186
hiperbola 44
homogén egyenletek 211, 338
Horner-séma 124

I

intervallum-módszer 91
inverz függvény 60
– – tulajdonsága 61
– trigonometrikus függvények egyenletei 365
irracionális egyenletek 180, 205
– egyenlőtlenségek 212
– kitevőjű hatvány 188

K

kétszeres argumentum szögfüggvényei 284
kétváltozós egyenlőség grafikonja 101

– egyenlőtlenség grafikonja 101
– egyenlőtlenség-rendszerek grafikus megoldása 108
kiegészítő argumentumok képletei 291
komplementer (kiegészítő) halmaz 9
koszinusz 239
koszinuszfüggvény grafikonja 256
kotangens 239
kotangensfüggvény grafikonja 264

L

lineáris függvény 42
– – grafikonja 40

M

másodfokú függvény 28
– – grafikonja 46
matematikai indukció 111

N

n-edfokú polinom 115
n-edik gyök 160
négyzetgyök 160
nem teljes hányados 118
növekvő függvény 28
nulladfokú polinom 116

O

osztás maradéka 118
összegezési, addíciós képletek 278

P

parabola 45, 46
paraméteres egyenletek megoldása 138
– egyenlőtlenségek megoldása 138
páratlan függvény 29
páros függvény 29
periodikus függvény 246
– – grafikonja 249

R

racionális gyök 126
– kitevőjű hatvány 187
radián 234

Sz

szám abszolútértéke 17
számtani gyök 163
szám törtrésze 31
számfüggvény 28
szinusz 239
szinuszfüggvény grafikonja 252
szorzat gyöke 161, 169
szög 234
szögek mérése 234
szögfüggvények szorzatát összeggé alakító képletek 293

T

tangens 239
tangensfüggvény grafikonja 260
tényező bevitele a gyökjel alá 160
tényező kihozatala a gyökjel alól 161
természetes kitevőjű hatvány 186
többszörös gyök 123
többtagú kifejezés főtagja 115
– – gyöke 120
– – maradékos osztása 118
– – osztása kéttagú kifejezéssel 124
– – azonossága 116
– kifejezések különbsége 116
– – szorzattá alakítása 121
törtkitevőjű hatvány 186
trigonometria 310
– alapazonossága 273
trigonometrikus egyenletek 324, 335
– –gyökeinek kiválasztása 342
– egyenletrendszerek 347
– egyenlőtlenségek 379
– függvények tulajdonsága 245

Ü

üres halmaz 8

V

változócsere 180, 335
Viète-formulák 122
visszavezetési képletek 288

TARTALOM

Előszó a tanulókhoz 3
Előszó a tanárokhoz 4
A tankönyvben előforduló jelölések 6

1. fejezet. FÜGGVÉNYEK, EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK

1. §. Halmazok 8
1.1. Halmazok. Halmazműveletek 8
1.2. Számhalmazok. A valós számok halmaza 16
2. §. Függvények 28
2.1. A számfüggvények fogalma. A számfüggvények alaptulajdonságai 28
2.2. Az alapfüggvények tulajdonságai és grafikonjai 40
2.3. Függvényábrázolás ismert alapfüggvények képéből geometriai transzformációkkal 50
2.4. Inverz függvény 60
3. §. Egyenletek 66
3.1. Egyenlet-következmények és az egyenletek azonos átalakítása 66
3.2. A függvények tulajdonságainak alkalmazása az egyenletek megoldásánál 82
4. §. Egyenlőtlenségek: ekvivalens átalakítások és az általános intervallum-módszer 90
5. §. Kétváltozós egyenletek és egyenlőtlenségek grafikonjai 100
6. §. A matematikai indukció módszere 111
7. §. Egyváltozós többtagú kifejezések és a velük való műveletek 114
7.1. Az egyváltozós többtagú kifejezések meghatározása és azonosságaik 114
7. 2. Műveletek többtagú kifejezésekkel. A többtagú kifejezés maradékos osztása többtagú kifejezéssel 118
7.3. Bézout-tétel. A többtagú kifejezés gyökei. Viète képletei 120
7.4. A Horner-séma 124
7.5. Az egész együtthatós polinomok racionális gyökeinek meghatározása 126
8. §. Az abszolútértékes egyenletek 130
9. §. Paraméteres egyenletek és egyenlőtlenségek 138
9.1. Paraméteres egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása 138
9.2. Paraméteres feladatok megoldása 143
9.3. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ másodfokú polinom gyökei valamint az adott A és B számok egymáshoz való elhelyezkedésének alkalmazása 146
Kiegészítő gyakorlatok az 1. fejezethez 151
Matematikatörténeti adalékok 154

2. fejezet. HATVÁNYFÜGGVÉNY

10. §. Az n-edik gyök és tulajdonságai. Az $y = \sqrt[n]{x}$ függvény és grafikonja 160
11. §. Irracionális egyenletek 180
12. §. A hatvány fogalmának általánosítása. A hatványfüggvény tulajdonságai és grafikonja 186
12.1. A hatvány fogalmának általánosítása 186
12.2. Hatványfüggvény. Tulajdonságai és grafikonja 194
13. §. A függvény tulajdonságainak alkalmazása az irracionális egyenletek megoldása során 205
13.1. A függvény tulajdonságainak alkalmazása az irracionális egyenletek megoldása során 205
13.2. Példák az irracionális egyenletek más módszerekkel történő megoldására 208
14. §. Irracionális egyenlőtlenségek 212
15. §. A paraméteres irracionális egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása 220
Kiegészítő gyakorlatok a 2. fejezethez 229
Matematikatörténeti adalékok 232

3. fejezet. TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK

16. §. A szögek radiánmértéke 234
17. §. Szög- és számargumentumú trigonometrikus függvények 239
18. §. Trigonometrikus függvények tulajdonságai 245
19. §. Trigonometrikus függvények grafikonjai és tulajdonságai 252
19.1. Az $y = \sin x$ függvény és tulajdonságai 252
19.2. Az $y = \cos x$ függvény és tulajdonságai 256
19.3. Az $y = \operatorname{tg} x$ függvény és tulajdonságai 260
19.4. Az $y = \operatorname{ctg} x$ függvény és tulajdonságai 264
20. §. Azonos argumentum trigonometrikus függvényei közötti összefüggések 273
21. §. Addíciós (összegezési) képletek és azok következményei 278
21.1. Addíciós képletek 278
21.2. Kétszeres argumentum szögfüggvényei 284
21.3. Visszavezetési képletek 288
21.4. Azonos szögfüggvények összege és különbsége, szögfüggvények szorzatát összeggé és különbséggé alakító képletek 293
22. §. Trigonometrikus azonosságok 299
22.1. A háromszoros és félargumentum azonosságai. Trigonometrikus függvények kifejezése a szög tangensének félargumentuma által 299
22.2. Az $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ kifejezés átalakítása 305
Kiegészítő gyakorlatok a 3. fejezethez 308
Matematikatörténeti adalékok 310

4. fejezet. TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK ÉS EGYENLŐTLENSÉGEK

23. §. A trigonometrikus függvények inverzei 312
23.1. Az $y = \arcsin x$ függvény 312
23.2. Az $y = \arccos x$ függvény 315
23.3. Az $y = \operatorname{arctg} x$ függvény 317
23.4. Az $y = \operatorname{arcctg} x$ függvény 320
24. §. Egyszerűbb trigonometrikus egyenletek megoldása 324
24.1. A $\cos x = a$ egyenlet 324
24.2. A $\sin x = a$ egyenlet 327
24.3. A $\operatorname{tg} x = a$ és $\operatorname{ctg} x = a$ egyenletek 330
25. §. Az egyszerűbb trigonometrikus egyenletektől eltérő trigonometrikus egyenletek megoldása 335
25.1. Változócserével megoldható trigonometrikus egyenletek 335
25.2. Trigonometrikus egyenletek megoldása olyan átalakításokkal, hogy csak egyfajta trigonometrikus kifejezés (azonos argumentumú függvény) szerepeljen benne 336
25.3. Homogén trigonometrikus egyenletek és homogén egyenletre visszavezethető trigonometrikus egyenletek megoldása 338
25.4. Az $f(x) = 0$ alakú trigonometrikus egyenletek megoldása szorzattá alakítással 340
25.5. A trigonometrikus egyenletek gyökeinek kiválasztása 342
26. §. Trigonometrikus egyenletrendszerek megoldása 347
27. §. Egyszerű trigonometrikus egyenlőtlenségek 350
28. §. Példák összetettebb trigonometrikus egyenlet és egyenletrendszer megoldására 356
29. §. Paraméteres trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása 368
29.1. Paraméteres egyenletek megoldása 368
29.2. Paraméteres feladatok megoldása 373
30. §. Trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldása 379
Kiegészítő gyakorlatok a 4. fejezethez 384
Matematikatörténeti adalékok 388
Melléklet 392
Feleletek és útmutatások 396
Tárgymutató 411

Навчальне видання

НЕЛІН ЄВГЕН ПЕТРОВИЧ

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ
Академічний рівень

Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів із навчанням угорською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української

Перекладачі:
Дезидер Федорович Поллої
Юдіт Імріївна Кулін

Угорською мовою

Зав. редакцією *А. А. Варга*
Редактор *Б. Б. Ковач*
Коректор *І. О. Петро*

Формат 70×90 1/16. Папір офс. Гарнітура Schoolbook.
Друк офс. Умовн. друк. арк. 30,3. Обл.-вид. арк. 23,5.
Додатковий тираж 75 пр. Зам. № 192П.

Державне підприємство
"Всеукраїнське спеціалізоване видавництво "Світ"
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2980 від 19.09.2007
www.dsv-svit.lviv.ua
e-mail: office@dsv-svit.lviv.ua

Друк ВАТ "Патент"
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи Зт № 5 від 27.06.2000
e-mail: patent@uzh.ukrtel.net